

## O ESPAÇO EM PIAGET

Antonio Carlos Jesus Zanni de Arruda

Marcelo Carbone Carneiro

Pós-Graduação em Ensino de Ciências, UNESP

Bauru, SP, Brasil

### Resumo

A presente pesquisa busca entender o espaço como construção da inteligência, segundo a Epistemologia Genética de Piaget. Para Tanto, é necessário distinguir o aspecto lógico-matemático do conhecimento, que é construído por coordenações gerais das ações, do aspecto infralógico ou físico, que elabora-se a partir de coordenações no espaço e no tempo.

### Introdução

A presente pesquisa buscou investigar a questão do espaço na epistemologia genética de Piaget e, em especial, no livro *A Representação do Espaço na Criança*<sup>1</sup>.

O problema da discussão sobre o espaço é tão antigo quanto à história do pensamento, ora o caracterizando como absoluto, ora como relativo, ora como fenomênico etc.

O espaço seria uma noção? Realidade inerente às coisas? É constituído pela experiência? Ou pela razão? Ou na relação entre a experiência e a razão? E seja qual for a resposta, qual a especificidade da experiência, da razão e da relação entre ambos?

Segundo Piaget, as teorias clássicas que discutiram o espaço desconsideraram o processo de construção no sujeito e na história da ciência.

Piaget considera a noção do espaço como construção subjetiva que elabora-se progressivamente e para dar conta desta, torna-se necessário relacionar epistemologia e desenvolvimento psicológico.

Todo conhecimento, segundo Piaget, é um vir a ser e consiste em passar de um conhecimento menor para um estado mais completo. *“Entretanto esse vir a ser não ocorre ao acaso, mas constitui um desenvolvimento, este mesmo deve ser examinado desde os estágios denominados de formação; é verdade que essa última, que ainda consiste, pois, num desenvolvimento a partir de condições anteriores (conhecidas ou desconhecidas), existe o risco de regressão sem fim (isto é, de um apelo à biologia): apenas como o problema é o da lei do processo e como os estágios finais (isto é, atualmente finais) são tão importantes sob este aspecto quanto os primeiros conhecidos, o setor de desenvolvimento considerado pode permitir soluções pelo menos parciais, com a condição, porém, de assegurar uma colaboração da análise histórico-crítica com a análise psicogenética”*.<sup>2</sup>

Os dados psicológicos devem constituir-se em material fundamental para o estudo da questão do espaço, pois permite a análise dos fatos e caracterizar o processo.

Do nascimento à vida adulta, assiste-se ao desenvolvimento do sujeito. Objetivamos aqui, pois, perseguir a evolução da noção espacial no sujeito e destacar seus mecanismos próprios.

Somos levados através desta discussão aos problemas educacionais, pois, a compreensão dos mecanismos próprios da construção do conhecimento possibilita uma leitura sobre o ensino desta noção.

---

<sup>1</sup> PIAGET, J. & INHELDER, B. *A Representação do Espaço na Criança*. Porto Alegre: Artes Médicas. 1993.

<sup>2</sup>Piaget, J. *Psicologia e Epistemologia*. RJ, Forense, 1978. p. 13.

## Delimitação do Problema

Das primeiras ações elementares do período sensório-motor à operação formal, a história da construção do espaço é a de uma atividade propriamente dita, inicialmente ligada ao objeto ao qual se acomoda, mas assimilando-a ao seu próprio funcionamento, até transformá-la em uma organização geométrica das coisas.

A organização espacial das coisas manifesta-se na ação sensório-motora na forma de uma atividade que regula as percepções. Nesse nível, o elemento sensível limita-se a servir de “significante”, ao passo que a assimilação ativa e motora constrói as relações.

È após o nível de representação nascente<sup>3</sup> que a ação desenvolve seu papel formador, sendo que a imagem é a imitação interior e simbólica das ações anteriormente executadas, de início, depois simplesmente executáveis, das quais constatamos a importância na construção das formas, a partir das relações topológicas elementares de vizinhança, ordem e de envolvimento.

No período das operações concretas e depois formais a ação é reorganizada sob a forma enriquecida e purificada das operações, que são mais ricas do que as ações iniciais, porque tornadas reversíveis e suscetíveis de composições indefinidas e mais puras porque ultrapassam, de agora em diante, igualmente os objetos sobre os quais se apóiam.

Ora, o interesse de tais operações constitutivas do espaço é triplo. Em primeiro lugar, sua ordem de sucessão genética é, em linhas gerais, paralela à ordem de construção axiomática da geometria, pois as relações topológicas precedem nos dois casos às estruturas projetivas e euclidianas e estas últimas encontram-se, nos dois casos, em uma situação de equivalência do ponto de vista da complexidade de suas ações iniciais<sup>4</sup>.

Em segundo lugar, o interesse dessas operações, consideradas geneticamente, é introduzir um fato novo no debate clássico que refere-se a relação entre a intuição e a lógica, na medida em que as ações se interiorizam em operações, as intuições perceptivas e práticas do início tornam-se coerentes e racionais antes mesmo de serem formalizadas. O sistema das operações concretas ultrapassa, portanto, em rigor, o nível intuitivo elementar, sem atingir o das operações formais, fontes das proposições hipotético-dedutivas. Entre a intuição e a lógica existe o estágio das operações concretas, superior à pré-lógica intuitiva e inferior à lógica formal.

Mas, sobretudo, e em terceiro lugar, o sistema de operações concretas permite evidenciar um outro fato novo que interessa às relações entre a intuição e a lógica, que em paralelo exato com as operações de caráter lógico-aritmético, existem operações concretas de caráter infralógico<sup>5</sup> ou espaço-temporal que são precisamente constitutivas do espaço.

È por isso que se admite frequentemente a persistência de um resíduo intuitivo até no interior dos axiomáticos geométricos mais apurados e esse resíduo não é outra coisa senão comprovação da origem infralógica das noções fundamentais de vizinhança e de ordem espacial.

Os estudos sobre Piaget no Brasil destacaram o conhecimento lógico-matemático e desconsideraram o conhecimento físico ou infralógico.

---

<sup>3</sup>Com a construção da função semiótica ou simbólica, o sujeito expressa certas condutas que caracterizam esta representação nascente, tais como: a imitação diferida, o jogo simbólico, o desenho, a imagem mental e a linguagem.

<sup>4</sup>Aqui temos uma questão bastante interessante: parece razoável que o ensino de geometria não deveria desconsiderar a ordem da construção da geometria na Criança? A proposta de Piaget é a de que é indispensável ao educador dominar os processos de construção do conhecimento.

<sup>5</sup>Piaget faz uma distinção entre o conhecimento lógico-matemático e Físico (infralógico). O estudo do espaço refere-se ao conhecimento físico, embora exista uma relação intrínseca entre essas duas formas de conhecimento.

## 1. Percepção e representação do espaço – o papel da imagem (02 a 04 anos)

Na medida que intervém a atividade sensório-motora desde o nível do espaço perceptivo, já é possível distinguir, embora num estado relativamente indiferenciado, duas funções complementares: a sensibilidade e a motricidade, sendo que as relações espaciais são elaboradas graças a esta última, mas desde a sua construção e, sobretudo, uma vez construídas, elas são significadas graças a significantes que consistem precisamente em índices sensoriais. É assim que, em uma forma vista em perspectiva, ou em profundidade, intervirá uma série de “relações virtuais” que ultrapassam os dados registrados pelos órgãos receptores. Tais relações virtuais são um produto da motricidade, ao passo que o elemento sensorial atual preenche a seu respeito a função de índice.

Mas a atividade sensório-motora não poderia, sozinha, transpor os limites de campo dos objetos presentes em contato direto com o sujeito. Além do mais, ela chega a certas antecipações a reconstituições que lhe permitem situar o objeto atrás dos anteparos ou agrupar os deslocamentos segundo certos “desvios”. Mas seu poder pára aí e cabe à representação estender o campo espacial além dos limites do campo perceptivo.

È a partir do momento em que aparece a função simbólica, em que se diferenciam os significantes, sob a forma de símbolos (imagens) ou de signos (palavras) e os significados, sob a forma de relações pré-conceituais, que a representação é acrescentada à atividade sensório-motora. È nesse nível que começa o espaço representativo.

O primeiro problema que se encontra, então, é o do papel representativo da imaginação e da ação como tal. Deve-se dizer a esse respeito, que a representação espacial tem a ver com a ação, pois ela é interiorizada, isto é, reproduzida ou esboçada interiormente graças a esses signos e símbolos, a ação evoca prolongando, então, diretamente a atividade sensório-motora do nível precedente. A imagem funciona, então, como expressão simbólica do espaço representativo.

No que se refere à ação, constata-se incessantemente o quanto é fundamental seu papel, em oposição ao da imagem. A intuição geométrica é essencialmente ativa, ela consiste, antes de tudo, em ações virtuais, esquemas de ações efetivas anteriores ou esquemas antecipadores de ações ulteriores e, quando a ação comete um engano, a intuição muda de repente. Desde as reações elementares de ordem, de envolvimento, ou as relações projetivas, perspectivas a reconstituir, sombras a projetar, feixes a seccionar, superfícies a rebater etc, até as semelhanças e conjuntos a coordenar em planos, todas as formas de intuição espacial repousam em ações, ações de colocar cada vez mais próximo ou em uma sucessão definida de envolver, de cerrar e de afastar, de mudar de ponto de vista, de cortar, de rebater, de dobrar e de desdobrar, de aumentar ou de diminuir etc.

Dois pontos importantes devem ser notados nessas ações e dizem respeito ao problema de saber se a representação espacial é apenas uma evocação figurada que substitui a ação ou é verdadeiramente uma ação interiorizada. O primeiro é que os pequenos sujeitos não conseguem imaginar o resultado de tais ações, sendo que um ponto de vista perspectivo não é reconstituído antes que o sujeito tenha ocupado a posição correspondente. O segundo ponto se refere às experiências que a criança faz, quando modifica por sua ação os objetos materiais colocados à sua disposição, isto é, nos caracteres intrínsecos do objeto, que são assimilados progressivamente de forma cada vez mais dedutiva.

As experiências iniciais que o espaço engendra são, com efeito, sobretudo experiências feitas pelo sujeito sobre suas próprias ações, e consistem em determinar como essas ações encadeiam-se umas nas outras. Mas elas não são apenas isso, e é suficiente que o fato físico constatado seja um pouco complexo para que sua leitura suponha previamente uma coordenação das ações. Além dos conhecimentos adquiridos sobre o objeto, e o que o sujeito aprende na experiência geométrica, é, portanto necessariamente também, a maneira pela qual

as suas ações se coordenam entre si e determinam umas às outras, por exemplo, a ação de colocar B entre A e C implica a de colocar também entre C e A, da mesma forma que o envolvimento do cordão em sua alça permanece definitivo, enquanto a ação inversa não tenha sido executada. É assim que as relações topológicas, primeiro, e as relações projetivas e euclidianas, depois supõem um número crescente de coordenações cada vez mais complexas entre as ações, implicando a determinação de uma reta, de um ângulo, de paralelas, de coordenadas etc, alguma coisa além da constatação simples, mas tal constatação se insere num ajustamento preciso das ações entre si.

Pode-se compreender, então, que a representação espacial é uma ação interiorizada e não simplesmente a imaginação de um dado exterior qualquer, resultado de uma ação. A representação espacial não chega, efetivamente, a prever esse resultado, senão tornando-se ela mesma ativa, operando sobre os objetos simbolizados como a ação opera sobre os objetos reais, ao invés de limitar-se e evocá-los. Ordenar em pensamento não é somente imaginar uma seqüência de objetos já ordenados, é ordenar essa seqüência tão real e ativamente como se tratasse de uma ação material, mas executando interiormente tal ação por meio de objetos simbolizados.

A interiorização das ações espaciais é efetuada segundo etapas muito graduais. Depois da atividade sensório-motora elementar, vem a ação evocada em imaginação, mas após ela ter sido executada materialmente, o pensamento forma-se, então, da reprodução do ato efetivo na sua materialidade e irreversibilidade (4 a 5 anos).

Com o estágio II (4-5 a 7-8 anos), a coordenação crescente das ações exteriores traduz-se por uma coordenação interna de seus esquemas, mas procede ainda por tateios, chegando tão somente a antecipações fragmentárias, podendo-se então falar de uma articulação progressiva das intuições.

As operações concretas (7-8 anos a 11-12 anos), resultam dessa articulação quando as ações interiorizadas sob a forma de esquemas são bastante coordenadas para que sua composição e, em conseqüência, cada uma delas possa ser desenrolada nos dois sentidos, é essa composição reversível que caracteriza a primeira forma de equilíbrio das ações interiorizadas e que constitui os primeiros sistemas propriamente operatórios.

Após, com o desenvolvimento dessas coordenadas operatórias, vários sistemas podem ser pensados simultaneamente, o que caracteriza as operações formais e torna possível sua tradução sob a forma de proposições hipotético-dedutivas (em torno de 11-12 anos). Aqui acaba a intuição e começa um tipo de pensamento, que mesmo constituindo um acabamento dessa interiorização contínua dessas ações, prepara a axiomatização do espaço, graças às suas formalizações discursivas crescentes.

A cada uma dessas fases de interiorização da ação corresponde uma etapa particular da imagem, a conexão funcional entre a imagem significante e as relações significadas por elas, transforma-se de modo contínuo desde o início da representação até o período formal final.

O essencial da ação não está naturalmente nessa marca e sim na modificação imposta ao objeto, isto é, na assimilação daquele aos esquemas do sujeito. Tão logo se produz no plano sensório-motor, ela consiste em uma imitação do objeto pela ação, mais precisamente, a imitação não é senão o prolongamento, em positivo, do negativo em que consiste a acomodação.

A imagem não pode, por si mesma, desempenhar o papel ativo nesse ato do conhecimento, ela não é instrumento da assimilação como tal, mas expressão da acomodação que a acompanha. Ela não desempenha, portanto, senão um papel de significante, ou de símbolo em relação ao ato. Papel importante, na medida em que é pela imagem que tal ação torna-se representativa. Mas, por mais indispensável que seja a título de suporte ou significante, não é a imagem que determina as significações, é a ação assimiladora que constrói as relações, cuja imagem não é senão o símbolo. Nada, portanto, é mais inexato do

que reduzir a intuição do espaço a um sistema de imagens, pois as realidades apreendidas são essencialmente as ações, “significadas” e não substituídas pela imagem.

Mas se a função da imagem, simbólica desde o início, torna-se cada vez mais secundária na medida em que o elemento ativo do pensamento adquire um estrutura melhor definida, é preciso compreender que o papel da imagem permanece, até o final, bem diferente no caso das operações espaciais. Um espaço é, com efeito, um esquema único, que engloba em único bloco, sem interrupção, todos os elementos que o compõem, ao passo que uma classe lógica é um conjunto de elementos descontínuos, reunidos por suas semelhanças apenas, independentemente de suas distâncias no espaço e no tempo. Pois precisamente esse caráter de esquema único que levou Kant a fazer de espaço uma forma de sensibilidade, isto é, a considerar seu caráter intuitivo, no sentido de sensível. Porém, Kant não considera o caráter operatório do espaço, pois não considerou o aspecto infralógico ou relativo à construção do objeto.

A Imagem intervém nas operações infralógicas e lógico-matemáticas. No caso das classes, seriações ou conjuntos numéricos, a imagem também intervém, certamente a título de símbolo auxiliar do pensamento, podemos assim imaginar uma classe ou pela imagem de um desses indivíduos constituintes, ou por um quadro vazio e figural e podemos ver a seqüência dos números sob a forma de bastões alinhados, de discos empilhados etc., mas a imagem não é, então, de modo algum, adequada ao esquema operatório, ou ela figura somente o esqueleto sem o conteúdo, ou ela apóia-se num dos conteúdos individuais e não no conjunto. Ao contrário, a imagem, de um sistema espacial é relativamente adequada, já que esse sistema constitui um objeto único e que a imagem nele se apóia como tal enquanto resultado das operações. Sem dúvida, ela permanece sempre simbólica e não substitui em nada as operações ativas. Há uma adequação relativa entre o símbolo e seu objeto, ao passo que o símbolo figurado de um produto operatório lógico-aritmético só representa uma parte muito incompleta do sistema. É por isso que a imagem espacial, malgrado suas inexatidões flagrantes, tem sido seguidamente considerada como desempenhando um papel essencial na intuição geométrica, e no esquema do espaço, enquanto o caráter operatório e intelectual deste último é comparável ao dos sistemas de classe, de relações lógicas e de números, salvo que as operações de que se trata são infralógicas e não lógico-aritméticas.

## **2. As operações infralógicas**

No nível das proposições hipotético-dedutivas, há, mais do que uma lógica geral, a das implicações e incompatibilidades entre proposições. Isso não significa que essa lógica seja tornada independente das operações ou ações, já que as proposições anunciam sempre operações e que suas implicações e incompatibilidades ainda são operações, mas em segundo grau.

As operações construtoras do espaço são de caráter infralógico e não lógico. A operação lógica apóia-se em objetos individuais considerados como invariantes e limita-se a reuni-los ou relacioná-los independentemente de suas vizinhanças ou distâncias espaço-temporais que os separam. Ao contrário, a operação infralógica consiste em engendrar o objeto por meio de seus próprios elementos e chega, assim, não a classes ou a relações independentes do espaço, mas a objetos totais de diversas ordens, como por exemplo reunir as partes de um objeto em um todo e colocá-los segundo uma ordem de sucessão determinada. A partir de então, ao invés de reunir ou de dissociar os objetos segundo suas semelhanças ou suas diferenças, as operações infralógicas reunirão ou dissociarão as partes do objeto segundo suas vizinhanças ou suas diferenças de posição, assim alguns elementos vizinhos constituirão uma reunião a qual é acrescentada a uma reunião vizinha, constituindo cada reunião de ordem

um objeto parcial e sendo essas totalidades de diversos graus, elas mesmas partes do objeto total que é o espaço considerado.

Poder-se-ia dizer que as vizinhanças e as diferenças de posição são relações como as outras, e que as partes de objetos são objetos como os outros, constituindo sua reunião simples classes e senão sendo as operações infralógicas senão ou caso particular das operações lógicas? Não, porque reunir elementos segundo suas vizinhanças ou segundo suas semelhanças para constituir com eles, ou objetos, ou classes de objetos, implica uma posição fundamental de modo de reunião, as reuniões do primeiro tipo formam sistemas de interrupção, cuja síntese final chega ao contínuo, ao passo que as do segundo tipo permanecem descontínuas.

A noção do contínuo constitui a síntese das relações topológicas elementares, que estão na raiz da construção do espaço. Mas por elaborada que seja essa noção, e por tardia geneticamente, que seja sua aplicação à totalidade dos quadros projetivo e euclidiano que resultam de coordenações operatórias de conjunto, o contínuo considerado em seu ponto de partida perceptivo, é precisamente o caráter distintivo do objeto, em oposição ao das coleções discretas. Não é, portanto, de espantar que, representado sob essa forma primitiva desde a fonte intuitiva das operações infralógicas que se apóiam no objeto, ele se encontre em seu termo sob uma forma precisa e geral, que o distingue das operações lógico-aritméticas. Com efeito, a partir do contínuo perceptivo que caracteriza as vizinhanças mais elementares, a noção do contínuo evolui em duas direções complementares. A primeira é a da decomposição progressiva, por partição do objeto em alguns elementos, em número restrito, eles mesmos contínuos e isomorfos ao todo, depois por decomposição desses elementos em pontos visíveis em número ainda finito, e finalmente por decomposição indefinida em pontos desprovidos de toda forma. A segunda é a de coordenação cada vez mais vasta, falando do objeto, a construção infralógica começa por não proceder senão aos poucos, construindo as relações topológicas interiores a cada configuração. Nesse nível, o contínuo, ainda intuitivo, não se aplica ao espaço vazio por falta de um espaço que englobe todos os objetos. Ao contrário, com a coordenação dos pontos de vista, que caracterizam a construção do espaço projetivo, e com os relacionamentos euclidianos, que acabam na construção dos sistemas de coordenadas, o contínuo se aplica ao espaço inteiro, considerado como o enquadre geral de todos os objetos ou de todos os observadores.

### **3. As operações infralógicas constitutivas das relações topológicas, projetivas e euclidianas**

As operações nos ensinam que o todo é maior do que a parte, sem se preocupar em saber se uma das partes contém mais ou menos elementos do que a outra. Diríamos ao contrário, que a quantificação torna-se extensiva se é possível estabelecer, por outro lado, que A contém mais elementos do que A' ou menos ou a mesma quantidade.

A quantificação métrica ou numérica quando intervém uma unidade nessa comparação entre A e A' ou entre A e B e em consequência se podemos dizer quanto A é superior ou inferior a A'. Diremos ao contrário, que a quantificação extensiva permanece não métrica se não intervém a unidade e se sabemos apenas que A é inferior ou superior a A', sem poder dizer quanto.

É impressionante constatar que as operações infralógicas que permitem à criança construir sua representação elementar do espaço, são de caráter simplesmente intensivo e em consequência, comparável ao da pura lógica qualitativa das classes e das relações definidas por apenas por suas qualidades. Em outras palavras, as relações topológicas que o sujeito constrói não precedem, inicialmente, por simples encaixes ou construção de ordens, mas sem

chegar, por falta de análise do contínuo, a outra coisa além de uma série de lógica qualitativa do espaço. Sem dúvida, bem antes de ser capaz de medir, ele vê que uma parte do conjunto é maior ou menor do que a outra, mas tais reações extensivas permanecem por muito tempo intuitivas e não dão lugar a sistemas operatórios definidos antes da construção das perspectivas e das semelhanças, ao passo que as relações intensivas dão lugar a intuições mais precoces e a agrupamentos mais rápidos. Em particular, a topologia elementar da criança é unicamente de caráter intensivo, o que é alias bem natural, pois apenas a introdução do infinito na análise do contínuo torna a topologia extensiva, isto é, matemática, ao passo que até o nível formal todas as operações espaciais da criança se apóiam somente no finito.

Pode-se traduzir essa intuição dizendo que o envolvimento de um elemento é o conjunto de suas vizinhanças, elas mesma gradualmente vizinhas, e que tal elemento ou sua cercadura é envolvido por uma fronteira se podemos determinar as situações “interior a A”, “exterior a A”, ou na “fronteira (Ao) de A), um ponto será, portanto, interior a A se existe um envolvimento desse ponto que só contém pontos de A, um ponto será exterior a A se existe um envolvimento desse ponto que não contém nenhum ponto de A, um ponto estará finalmente na fronteira de Ao se qualquer envolvimento desse ponto contiver, ao mesmo tempo, pontos interiores e pontos exteriores a A. No caso de uma fronteira que separa A de A', a separação será expressa desde então pela dupla disjunção –  $(A+Ao)XA' = 0$  e  $(A' + Ao)XA = 0$ . Quanto à noção de ordem, ela é construída por meio de uma sucessão linear de elementos, ou de uma sucessão de envoltimentos. Finalmente, o contínuo aparece, no nível das intuições representativas e das operações concretas, sob uma forma intermediária entre o contínuo perceptivo e o contínuo matemático. Pode-se dizer que no nível das intuições representativas e das operações concretas o contínuo é expresso sob a forma não irracional, mas naturalmente não suficiente do ponto de vista matemático.

Uma vez fornecidas essas diversas noções, pela representação intuitiva, constatamos que a criança chega às estruturas operatórias seguintes quando a articulação das intuições em jogo torna-se suficiente para assegurar sua composição reversível em outras palavras desde o nível das operações concretas –

Partição e adição primitiva (6 – 7 anos).

Esse agrupamento é o exato equivalente, no domínio infralógico da vizinhança, ao agrupamento de encaixes das classes A,B,C etc., no domínio lógico.

As operações infralógicas constitutivas das relações topológicas elementares são: Partição e Adição Primitiva, Ordem de Colocação, Reciprocidade das Vizinhanças, Relações Simétricas de Intervalos, Multiplicação biunívoca de elementos, Multiplicação biunívoca de relações, Multiplicações co-unívocas de elementos e de relações.

As operações infralógicas constitutivas das relações projetivas são: Adição e subtração dos elementos projetados, Ordem retilínea, Reciprocidade das perspectivas, Relações simétricas de intervalos, Multiplicação biunívoca de relações e Multiplicações co-unívocas de elementos e de relações.

As operações infralógicas constitutivas do espaço euclidiano são: Adição e subtração de elementos, Colocações e deslocamentos, Reciprocidade das referências, Ajustes dos intervalos ou distâncias, Multiplicação biunívoca dos elementos, Multiplicação biunívoca das relações de colocação e deslocamentos, Multiplicação co-unívoca dos elementos e Multiplicação co-unívoca das relações.

As relações topológicas elementares são construídas entre parte vizinhas de um mesmo objeto ou entre um objeto e sua vizinhança imediata, de modo contínuo e sem referências às distâncias. Um espaço topológico não é, portanto, senão uma reunião contínua de elementos, deformáveis, por estiramentos ou contrações e que não conservam retas, distâncias ou ângulos ,etc.

Observa-se no desenvolvimento psicológico do espaço, um processo análogo ao que assinala-se na evolução da noção de tempos. Precedendo as intuições topológicas e as do espaço projetivo e euclidiano, e começando dessas últimas por serem fragmentárias antes de chegar à constituição de enquadres de conjunto, pode-se, com efeito, estabelecer a seguinte analogia, da mesma forma que existem tempos locais, ligados a cada movimento, antes que um tempo homogêneo e uniforme os reúna, também existem tantos espaços, na criança pequena, quantos objetos ou configurações distintas, não pertencendo ao espaço intervalos vazios entre muitos elementos separados, ou pelo menos aos mesmos espaços que os contínuos cheios. A esse respeito as operações projetivas desempenham, em sua gênese, um papel fundamental na coordenação geral do espaço, papel, que, do ponto de vista das estruturas operatórias, é preciso destacar.

Com as noções projetivas, as formas das figuras, suas posições respectivas, e as distâncias aparentes que as separam, mas todas sempre relativamente a um ponto de vista considerado, são acrescentadas às relações topológicas internas.

Esse sistema de referências projetivas não conserva ainda as distâncias e as dimensões, como um sistema de coordenadas, mas as posições relativas dos elementos da figura ou das figuras umas em relação às outras.

Pode-se, portanto, caracterizar geneticamente a geometria projetiva como geometria dos pontos de vista, ficando entendido que ela supõe a construção prévia das relações topológicas e que as conserva se acrescentando a elas.

As noções projetivas elementares dependem, em consequência, das mesmas operações que as relações topológicas, mas consideradas em função da intervenção de um ponto de vista. A introdução de um ponto de vista permite, por outro lado, precisar as noções das dimensões do espaço, no caso particular determinado por esse ponto de vista. Com efeito, enquanto topologicamente a primeira dimensão corresponde apenas à noção de ordem linear, a segunda às noções de interior e exterior em relação a uma fronteira linear fechada, e a terceira às noções de interior e exterior em relação a uma fronteira fechada a duas dimensões (superfície), por outro lado as mesmas relações tomam, em relação a um ponto de vista perspectivo ao qual as formas são relacionadas, significados relativos à orientação da retas ou dos planos – “à esquerda ou à direita”, “em cima ou embaixo” e “frente ou atrás”, marcam assim, as três direções de um espaço tridimensional.

Projetar uma figura consiste em transformá-la em uma segunda obtida num plano por intermédio de um conjunto de retas que ligam os pontos da primeira aos pontos correspondentes da segunda e orientadas a partir de um ponto comum exterior a tais figuras.

Os problemas principais da geometria projetiva espontânea são assim, coordenar os diversos pontos de vista sucessivos, pela construção de projeções e de secções elementares que intervêm no relacionamento do quadro visual e os objetos, bem como dos diversos anteparos que seccionam tais projeções.

È em tais relacionamentos que a reta ocupa uma posição privilegiada, não somente enquanto instrumento da construção de projeções, mas enquanto única forma que se conserva fora das mudanças de pontos de vista. A esse respeito, os oito agrupamentos das operações que se distinguem a propósito das relações topológicas elementares encontram-se na construção espontânea das relações projetivas, mas transformados pela adjunção das relações novas devidas à intervenção de um ponto de vista.

## **Conclusão**

O Conhecimento lógico-matemático ou aritmético não recorre à experiência, na medida em que é puramente dedutivo.

O conhecimento infralógico ou físico, pelo contrário, repousa na experiência e visa atingir as relações, objetos e acontecimentos, tais como são na realidade.

Portanto, o conhecimento físico busca a assimilação do real a esquemas operatórios, o que significa a construção de explicações dedutivas. Este tipo de conhecimento é essencialmente ligado ao real e sua construção envolve esquemas especializados de assimilação, isto é, para o conhecimento físico devemos levar em conta as propriedades dos objetos e não poderíamos construir raciocínios a priori sobre eles<sup>6</sup>.

As noções matemáticas constituem-se por coordenações gerais das ações por oposição às noções físicas que se constituem por coordenações particulares que diferenciam os objetos entre si, abstraindo suas propriedades específicas. No entanto, as ações particulares devem estar coordenadas entre si, isto é, participa da coordenação especializada (física) coordenações gerais (lógico-matemático). Portanto, apesar de distintos é bastante móvel a fronteira entre o conhecimento físico e o lógico-matemático.

O conhecimento físico não é um produto da experiência externa ou interna, senão por uma união necessária entre as estruturas lógico-matemáticas (que nascem das coordenações gerais das ações) e os dados experimentais assimilados àquelas.

A importância do estudo da noção espacial está em compreendermos como a inteligência constrói formas de relações entre o sujeito e o mundo real, isto é, compreender a natureza da contribuição da experiência e dos processos dedutivos da razão na construção dos conhecimentos físicos.

Piaget critica as explicações fundadas na idéia de que o espaço seria adquirido pela experiência ou por um conjunto de imagens sobre as coisas.

Os estudos dos dados genéticos mostram que, durante as fases iniciais de formação das noções, o quadro se constrói em correlação com a organização do seu conteúdo e consiste nessa organização mesma.

Para Piaget<sup>7</sup>:

*De uma parte, as coordenações gerais da ação que constituem, nós temos visto, o ponto de partida das formas lógico-matemáticas, se estruturam e se afirmam somente na medida do seu exercício, isto é, a propósito das ações especializadas (portanto físicas) que se trata de coordenar entre elas. Disso resulta que, antes dos 11-12 anos, não existe, na criança, lógica formal aplicável indiferentemente a tudo, mas os diversos tipos de raciocínios (por ex.  $A = B$ ;  $B = C$  portanto  $A = C$  ou  $A < B$ ;  $B < C$  portanto  $A = C$ , etc.) devem ser reconstruídos por ocasião de cada nova noção que se trata de elaborar (quantidade de matéria, peso, volume, etc.). De outra parte, não existe dado experimental que não suponha, nem sequer para sua leitura, uma coordenação lógico-matemática (não importa a qual nível) para a qual esse dado é necessariamente relativo.*

Como o sujeito se relaciona com os objetos no desenvolvimento e aquisição das noções físicas, como é o caso da noção espacial?

O conhecimento físico dependente de coordenações lógico-matemáticas e há uma formação simultânea e de uma solidariedade progressiva entre essas duas formas de conhecimento.

A constituição de coordenações gerais, fonte dos conhecimentos lógico-matemáticos, é indissociável das coordenações especializadas, fonte de conhecimentos físicos. O

<sup>6</sup>Esta idéia aparece no pensamento de Hume, de que o conhecimento das questões físicas necessitam da experiência, no entanto, para Piaget o conhecimento físico depende de uma composição operatória (física e lógico-matemática) que leva em conta as propriedades dos objetos.

<sup>7</sup> PIAGET, J. **Introduction a l'Épistémologie Génétique**: La Pensée Physique, Paris: PUF, 1974, p. 18.

conhecimento do mundo físico e as coordenações lógico-matemáticas se elaboram em função de um duplo movimento de interiorização e de exteriorização.

Os conhecimentos físicos iniciais nascem de ações relativamente isoladas, que ligam diretamente o objeto ao sujeito e apreendendo o objeto somente sob seu aspecto mais exterior e mais fenomenista, enquanto as relações que ligam ao sujeito permanecem egocêntricas, isto é, relativas à atividade momentânea do sujeito. O Progresso do conhecimento físico, pelo contrário, é resultado da atividade de coordenar as ações entre elas tornando-as relativas ao sistema de conjunto, nas quais cada ação se constitui uma transformação entre outras.

Essa coordenação consiste numa descentração das ações iniciais, na medida em que as ações se coordenam, o sujeito se afasta do seu ponto de vista egocêntrico, pois cada uma das suas ações é inserida num sistema coerente e reversível que o engloba.

A atividade coordenadora se produz sobre a ação direta ligada ao objeto e esta atividade coordenadora se interioriza em esquemas operatórios, e, estes, quanto melhor estruturados ou formalizados se encontrem, mais se afastam das ações concretas imediatas. Por outro lado, e reciprocamente, o objeto se exterioriza e se objetiva na medida em que encontram assimilados às coordenações gerais da ação ou do pensamento, e não mais à atividade imediata do sujeito.