Matemática

Ensino Médio

REFERENCIAL CURRICULAR

Ana Maria Beltrão Gigante
Maria Rejane Ferreira da Silva
Monica Bertoni dos Santos

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 191 24/8/2009 15:53:29

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 192 24/8/2009 15:53:29

Referencial Curricular de Matemática: ensino médio

Ao longo desse referencial, junto às situações de aprendizagem, os objetivos são formulados a partir de habilidades e competências, dos modos de pensar da Matemática e dos conceitos considerados estruturantes desta disciplina, tendo em vista conteúdos mínimos que, em conexão com os blocos de conteúdos, são trabalhados em níveis crescentes de complexidade, ao longo dos três anos do ensino médio. São, também, sugeridas algumas complementações que ficam a critério do professor, bem como outras quaisquer que ele entenda serem pertinentes ao seu planejamento. Os temas estruturantes estão dispostos em unidades e estão sequenciados, a partir de uma ordem que pode ser alterada pelo professor.

Nas unidades propostas, é enfatizado o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, com ênfase no pensamento aritmético, no pensamento algébrico, no pensamento geométrico e no estatístico-probabilístico, que se relacionam e se complementam.

Em cada unidade, os propósitos são relacionar diferentes conceitos matemáticos, estabelecendo conexões entre eles; desenvolver estratégias que favoreçam a construção de conceitos matemáticos, contextualizando-os, ampliando-os e aprofundando-os; proporcionar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, estabelecendo relações entre as diferentes formas de pensar matematicamente.

As diferentes linguagens são exploradas e o vocabulário matemático é construído e reconstruído, na medida do possível, a partir da etimologia das palavras. Em especial, a linguagem de conjuntos é apresentada, na medida em que ela favorece a representação das funções, um dos conceitos estruturantes da Matemática, formalizado ao longo do ensino médio.

Diferentes formas de expressão, a falada, a escrita, a gestual, a corporal, o desenho, os registros gráficos, promovem a comunicação de ideias. A comunicação oral e as discussões, provocadas pelos desafios, estimulam a crítica e a defesa dos posicionamentos pessoais. A leitura de textos, de diagramas, quadros, tabelas e gráficos promove a interpretação. O registro sistemático das descobertas, das hipóteses e das conclusões individuais e coletivas sistematiza e consolida as aprendizagens. O domínio da língua materna, de outras línguas e de outras linguagens, em particular as linguagens da Matemática, amplia as capacidades de representação, comunicação e expressão, que possibilitam a construção de significados relacionados a vivências que se incorporam ao repertório de saberes de cada indivíduo e de seu grupo social. O trabalho no ensino médio tem como objetivo desenvolver tais capacidades, pois "é na adolescência que a linguagem adquire essa qualidade de compreender e agir sobre o mundo real". (Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 2008, p. 16)

A história da Matemática permeia todo o trabalho, de tal forma que os alunos possam perceber a Matemática como uma construção histórica em constante evolução, reconhecendo a sua contribuição na interpretação e explicação dos fenômenos das ciências, relacionando os processos matemáticos com as diferentes manifestações artísticas ao longo da história e na atualidade.

Destaca-se a valorização do trabalho coletivo, na interpretação das situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação, favorecendo a

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 193 24/8/2009 15:53:29

construção coletiva do conhecimento.

As situações-problema que apresentam sequências e regularidades possibilitam a identificação de padrões e permitem que, a partir deles, estabeleçam-se relações que, tratadas por processos matemáticos, levam à generalização de expressões analíticas que representam equações, leis de funções e fórmulas de cálculos que modelam os fenômenos naturais e sociais.

O estudo da Geometria, trabalhado das formas tridimensionais para as bidimensionais, explora as propriedades das figuras planas e espaciais, relacionando-as, enfocando as medidas que possibilitam o cálculo do perímetro, da área e do volume das figuras estudadas. As simetrias e as homotetias, fundamentando a congruência e semelhança de figuras planas, oportunizam que os alunos vivenciem e percebam uma geometria de movimento e transformações no plano. A trigonometria é trabalhada a partir da semelhança de triângulos e se amplia nas funções trigonométricas que modelam fenômenos periódicos. As Geometrias Não-Euclidianas são abordadas através da Geometria Fractal, num contexto geométrico, em conexão com sequências e regularidades que permitem generalizações.

As representações gráficas têm suporte na Geometria e possibilitam a localização e movimentação de pontos e objetos em um plano, a partir de eixos coordenados. A relação da Geometria com a Álgebra sistematiza-se na Geometria Analítica, apresentada a partir de um contexto histórico.

A ideia de proporcionalidade é tratada como conceito estruturador no estudo das grandezas e medidas, tanto diretas como inversamente proporcionais, nas razões e proporções. Ainda, em conexão com a Geometria, a proporcionalidade está presente, por exemplo, no estudo das homotetias, da semelhança de figuras planas e das relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo; em conexão com a Álgebra, está presente no estudo das funções um dos temas estruturantes da Matemática.

Os problemas de contagem, resolvidos pelo princípio multiplicativo, permitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Vivências do aleatório e do acaso possibilitam o reconhecimento das ideias de chance e de possibilidade que levam ao cálculo de probabilidades. Pesquisas que possibilitam a coleta, a organização, a interpretação e a análise dos dados coletados levam ao estudo da Estatística.

Ao concluir o ensino médio, etapa final da educação básica, é esperado que o aluno tenha construído conhecimentos que lhe permitam ler e interpretar a realidade, desenvolvendo habilidades e competências para atuar na sociedade e na sua vida profissional, estando, ainda, apto para continuar seus estudos.

Segundo as Orientações Curriculares para o ensino médio (2006), "... o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade dos estudos, mas também a preparação para o trabalho e o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos" (p. 69).

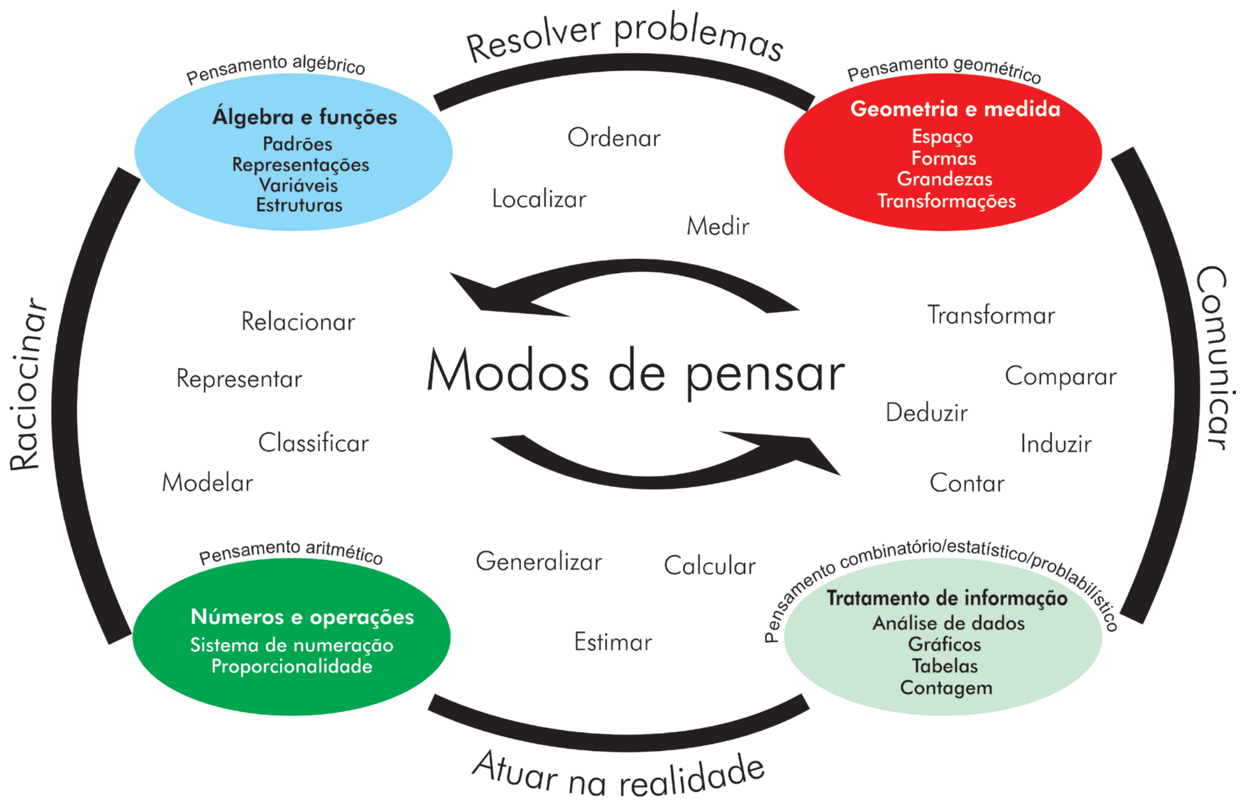
Desta forma, a Matemática, como área ou disciplina, deve ser considerada tanto como uma ciência com suas linguagens, seus modos de pensar, seus conceitos e temas estruturadores, seus métodos específicos de investigação, quanto como um instrumento que visa "a uma exploração mais adequada de suas possibilidades de servir às outras áreas, na ingente tarefa de transformar a informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação" (Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 2008, p. 39).

Sua aprendizagem está vinculada a um ensino proposto a partir de situações de aprendizagem que pressupõem a ação do aluno sobre o objeto do conhecimento, que possibilitam o desenvolvimento de habilidades e competências e a apropriação de conhecimentos matemáticos. Isto implica numa seleção criteriosa de conteúdos que se originam nos diferentes temas estruturadores e estão em conexão, portanto, no abandono de programas extensos, de conteúdos isolados, compartimentalizados e supostamente esgotados, apresentados de forma que o aluno apenas ouça, repita e reproduza o que lhe é "passado" pelo professor.

Apresentados em unidades temáticas, nos três anos do ensino médio, os conteúdos mínimos, em conexão com os blocos de conteúdos, seus temas e conceitos estruturadores, em cada uma, são referidas as competências e habilidades de representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sociocultural, transversalizadas pelo ler, o escrever e o resolver problemas. As situações de aprendizagem são apresentadas como exemplos e, ao final de cada unidade, são feitas recomendações de aprofundamento de conceitos, no intuito de oferecer ao professor subsídios para o seu planejamento.

Os blocos de conteúdos, os modos de pensar e os conceitos que estruturam a Matemática

No diagrama a seguir, estão indicados diferentes modos de pensar que constituem a Matemática e que estão expressos nos blocos de conteúdos: Números e Operações, Álgebra e funções, Geometria e medida, e Tratamento da informação, que abrangem os conceitos que estruturam a Matemática e que este Referencial Curricular propõe sejam trabalhados em níveis crescentes de complexidade.



Neste referencial, os conteúdos relativos aos quatro blocos de conteúdos foram distribuídos nos três anos do ensino médio, possibilitando que os conceitos que os estruturam sejam constantemente retomados e aprofundados em níveis crescentes de complexidade.

Os diferentes modos de pensar que constituem a Matemática, desdobrados nos conceitos estruturantes de cada bloco de conteúdos, estão explicitados no quadro da página ao lado, onde se pode "ler", na gradação das cores, o nível de complexidade em que serão explorados em cada série ou a série em que são mais enfatizados.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 196 24/8/2009 15:53:34

		5ª e 6ª	7ª e 8ª	1º ano	2º ano	3º ano
Pensamento aritmético						
Números e operações nos Conjuntos Numéricos	Naturais					
	Fracionários					
	Inteiros					
	Racionais					
	Irracionais					
	Reais					
	Complexos					
Sistema de numeração	Base 10					
	Outras bases					
Proporcionalidade						
Linguagem e simbologia da Aritmética						
Pensamento geométrico						
Espaço e forma	Localização e deslocamento					
	Figuras espaciais e planas e suas características					
	Decomposição e composição de figuras planas e espaciais					
	Ângulo, perpendicularismo e paralelismo					
Transformações no plano	Simetrias e homotetias					
	Congruências e semelhanças					
Grandezas e medidas	Perímetro, área e volume					
	Unidades e conversões de: comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo e tempo					
	Uso de instrumentos de medida					
	Relações métricas e trigonométricas					
Linguagem e simbologia geométrica						
Pensamento algébrico						
Padrões	Sequências e regularidades					
Estruturas	Propriedades das operações					
Relações e funções	Generalização de padrões e construção de modelos					
Diferentes funções das letras	Nos modelos aritméticos					
	Letras como variáveis					
	Letras como incógnitas					
	Letras como símbolos abstratos					
Linguagem e simbologia algébrica						
Pensamento combinatório/ estatístico/probabilístico						
Análise de dados	Coleta, organização e análise de dados					
	Construção e interpretação de diagramas, tabelas e gráficos					
Raciocínio combinatório	Princípio fundamental da contagem					
	Agrupamentos diferenciados pela ordem ou natureza dos elementos					
Probabilidade	Possibilidades e cálculo de probabilidades					
Estatística	Tabelas de frequência					
	Medidas de centralidade e dispersão					
Linguagem da contagem, da probabilidade e da estatística						

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 197 24/8/2009 15:53:34

Habilidades/competências, conteúdos/conceitos estruturantes e situações de aprendizagem do 1º ano

O 1° ano do ensino médio caracteriza-se em termos de desenvolvimento de habilidades e de construção de conceitos, como uma etapa em que devem ser retomados os temas propostos dos blocos de conteúdos do ensino fundamental, por um lado, sondando o que os alunos já trabalharam, por outro aprofundando-os, o que também possibilita ao professor o conhecimento dos saberes já construídos pelos alunos, bem como aqueles a reconstruir.

Com isso, o trabalho do 1° ano do ensino médio inicia com o estudo dos Conjuntos Numéricos, com o objetivo de revisá-los, bem como as operações neles definidas, enfatizando os Números Irracionais e Reais, sua localização na reta e sua evolução ao longo da história. A localização da $\sqrt{2}$ na reta numérica proporciona uma relação do estudo dos números e da Geometria, trabalha com a ideia de aproximações sucessivas e promove a compreensão dos números decimais e o uso de instrumentos de desenho e da calculadora. O estudo dos intervalos é introduzido com situações-problema e possibilita o uso da linguagem de conjuntos.

O estudo do plano cartesiano, associado a aspectos históricos, dá especial atenção à construção, interpretação e análise de gráficos, bem como à localização de pontos a partir dos eixos ortogonais.

O conceito intuitivo de função é amplamente abordado a partir do estudo de tabelas, quadros e gráficos, de sequências figurais e numéricas, identificando regularidades e padrões, bem como de conceitos geométricos. As funções são definidas e algebrizadas, utilizando-se da representação em diagramas e da linguagem de conjuntos. A partir da formulação do conceito de função, das condições de existência e unicidade de uma relação, são trabalhadas as funções de 1° e 2° graus, as funções exponenciais e logarítmicas, definidas no Conjunto dos Números Reais. Para cada uma delas, foram exploradas suas representações gráficas, analisando-se o crescimento e o decrescimento e, ainda, os pontos notáveis, as condições de existência, o domínio e a imagem. Sempre que possível, o estudo das funções está associado ao estudo de gráficos, a exemplo das funções logarítmicas cujo gráfico, por simetria, é explorado a partir do gráfico das funções exponenciais.

Ainda, no estudo das funções, a história da Matemática auxilia a compreendê-las como modelos de fenômenos das ciências, reforçando que também é fundamental na compreensão da Matemática como uma construção histórica, num contexto social e cultural.

As Progressões Aritméticas e Geométricas, introduzidas de forma detalhada no Caderno do Aluno do 1° ano do ensino médio, são trabalhadas a partir de sequências figurais e numéricas. Relacionando a Matemática com a Arte, os alunos têm a oportunidade de generalizar seus termos gerais, trabalhando com a regra de recorrência, o que é aprofundado no estudo da Geometria Fractal, proposta no Caderno de 2° e 3° anos do ensino médio.

O trabalho com as homotetias, que explora a proporcionalidade e embasa o entendimento da semelhança de figuras planas, é fundamental para o cálculo de distâncias inacessíveis, estudo que, associado ao conceito de ângulo (que deve ser retomado e aprofundado), proporciona a exploração das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Ao longo das situações de aprendizagem, são propostas construções de materiais manipulativos que auxiliam na construção e significação dos conceitos.

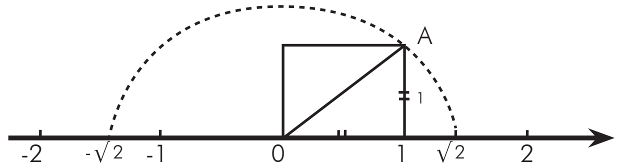
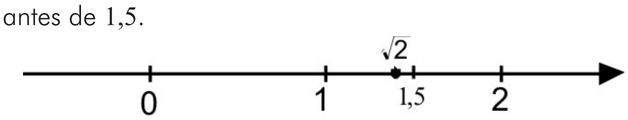
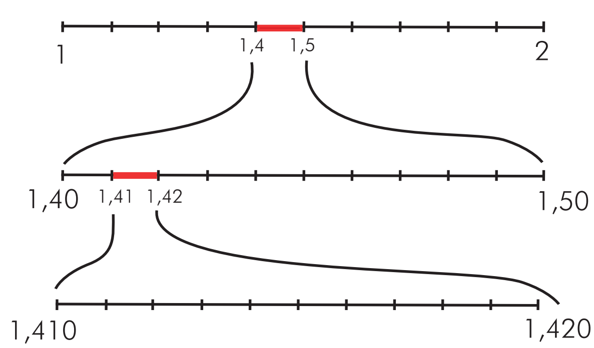
Deduções simples em que se aplicam conceitos já trabalhados como o Teorema de Pitágoras são, sempre que possível, proporcionadas aos alunos, como no "Cálculo do seno, do cosseno e da tangente de ângulos especiais". No caso da definição da secante, da cossecante e da cotangente, é introduzida a partir dos conhecimentos do triângulo retângulo, a partir do entendimento de que cada fração tem um inverso multiplicativo. Nestes estudos, especialmente, são trabalhados os registros em quadros que observados, comparados e analisados possibilitam aos alunos a construção de conceitos matemáticos e de fórmulas de cálculo.

A sistematização do princípio fundamental da contagem, realizada a partir da resolução de problemas e do uso de diferentes representações (árvores de possibilidades, quadros de dupla entrada e outros esquemas), proporciona o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, em especial, promove habilidades relacionadas à resolução de problemas.

Jogos e situações-problema do cotidiano também são fortemente sugeridos com o objetivo de proporcionar vivências para o entendimento do significado do aleatório, a ideia do provável e da chance.

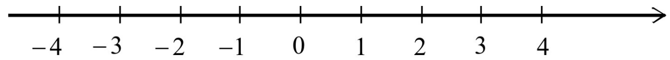
A resolução de problemas do cotidiano, o uso de quadros, tabelas e diferentes representações, frações, decimais e porcentagem, foram sugeridas e exemplificadas, a fim de oportunizar a quantificação do conceito de probabilidade.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Conjuntos Numéricos: N, Z, Q, R	**Conjuntos Numéricos** Ao iniciar o 1° ano do ensino médio, é necessário que se revisem os Conjuntos Numéricos. Os números e as operações como um bloco de conteúdos, são conceitos estruturantes da Matemática que devem ser aprofundados nesta etapa da escolaridade. Sugere-se que o professor, ao iniciar o ano, possa certificar-se dos conceitos já construídos por seus alunos a esse respeito, com o objetivo de retomar a construção dos diferentes Conjuntos Numéricos na medida do necessário. Solicitar que os alunos leiam o texto a seguir ou outro qualquer que possa desencadear a retomada dos Conjuntos Numéricos.
Identificar os diferentes Conjuntos Numéricos e suas propriedades. Diferenciar decimais exatas e periódicas. Compreender o conceito de dízima periódica simples e encontrar sua geratriz. Reconhecer números irracionais a partir de construções geométricas.	Representação dos Conjuntos Numéricos na reta A reta como representação gráfica dos números reais Decimais exatas e periódicas Geratriz da dízima periódica simples O π e a $\sqrt{2}$	**Os Conjuntos Numéricos** Ao longo dos anos de vida, na escola, como na história da humanidade, toma-se contato com diferentes Conjuntos Numéricos: os que servem para contar, os que servem para medir, os que servem para relacionar, os que servem para ordenar e, ainda, aqueles que relacionam grandezas incomensuráveis. Ao estudar a cultura dos povos, desde a mais remota Antiguidade, percebe-se a evolução da ideia de Número Natural que surge associada à ideia de contagem, para quantificar os elementos de conjuntos e da necessidade de fazer cálculos. Os Conjuntos Numéricos foram se ampliando, sendo representados geometricamente em uma reta. Os Números Naturais (N), representados em uma semirreta, ampliaram-se com os números negativos no Conjunto dos Números Inteiros (Z) e passaram a ser representados em uma reta. O Conjunto dos Números Inteiros ampliaram-se com os números fracionários, preenchendo alguns espaços da reta entre os Números Inteiros, constituindo o Conjunto dos Números Racionais (Q), os números da forma fracionária com numerador inteiro e denominador inteiro e diferente de zero. Os números racionais representados na forma de fração, entendida como uma razão ou uma divisão indicada assumem a representação de decimal exata ou periódica. Ao encontrar números como o π , as raízes não exatas, os números decimais infinitos, não periódicos, verifica-se que eles têm um ponto que lhes é correspondente na reta e que a completam. Assim, tem-se os Números Reais (R), estabelecendo-se a correspondência de um número real para cada ponto da reta e um ponto da reta para cada número real, sendo a Reta a representação dos Números Reais. Discutir o texto com os alunos, representando no quadro de giz a reta numerada, localizando elementos dos diferentes Conjuntos Numéricos. Dar ênfase aos números decimais exatos e periódicos, retomando a geratriz das dízimas periódicas simples (cuja sugestão de construção está descrita no Referencial Curricular de 7ª série) **Localizando a $\sqrt{2}$ na reta** Solicitar aos alunos que, com esquadro, régua e compasso, façam o desenho a seguir, cuja construção vai sendo orientada pelo professor.

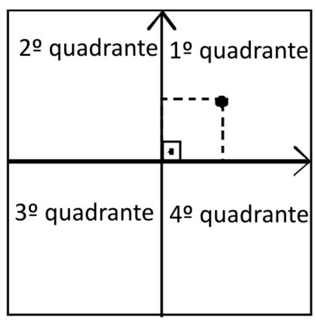
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Utilizar a relação de Pitágoras para construir novos conceitos.		
Representar números simétricos na reta numerada.	Números simétricos	Sobre a reta numerada, desenhar o quadrado de lado 1 e traçar a diagonal OA. Usando a relação de Pitágoras, calcular a medida dessa diagonal ($\sqrt{2}$). Com a ponta seca do compasso, rebater a diagonal para a direita e para a esquerda do zero, localizando-se a $\sqrt{2}$ entre 1 e 2 e $-\sqrt{2}$, entre -1 e -2. Os alunos podem verificar que a $\sqrt{2}$, geometricamente, localiza-se entre 1 e 1,5, que é um segmento de reta que corresponde ao conjunto dos números reais maiores que 1 e menores do que 1,5, isto é, o intervalo entre 1 e 1,5. Neste momento, o professor pode explorar os intervalos, com suas linguagens e representações, comparando-os a Subconjuntos de Números Naturais e Números Inteiros em que são conjuntos discretos que podem ser representados por compreensão e extensão (entendendo por discretos aqueles Conjuntos Numéricos como os Naturais e os Inteiros em que, entre dois números consecutivos, não há outro número do mesmo conjunto).
Desenvolver habilidades relacionadas ao uso de instrumentos de desenho.	Intervalos: representação de intervalos nas linguagens gráfica, de conjuntos e de intervalos.	Solicitar que os alunos relatem os passos desta construção, indicando onde se localiza a $\sqrt{2}$ e seu simétrico, $-\sqrt{2}$. **Aproximando a $\sqrt{2}$** Nesta atividade, deve-se solicitar aos alunos que trabalhem com máquinas de calcular. Como foi possível perceber, a $\sqrt{2}$ localiza-se entre 1 e 2 e antes de 1,5.
Representar intervalos em diferentes linguagens e na reta real.	Números Irracionais	
Aproximar os valores da $\sqrt{2}$. Desenvolver habilidades referentes ao uso de instrumentos geométricos: compasso, régua...	Aproximação da $\sqrt{2}$	Solicitar que os alunos aumentem o espaço entre 1 e 2, como se fossem observá-lo com uma lupa, e o subdividam em 10 partes. Para concluir que a $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5, os alunos devem ampliar sucessivamente os intervalos como foi descrito a seguir: $(1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25$
Reconstruir a ideia de décimos, centésimos, milésimos ao subdividir a reta.	Aproximações sucessivas	
Utilizar a calculadora como ferramenta para cálculos envolvendo números decimais.		

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 201 24/8/2009 15:53:35

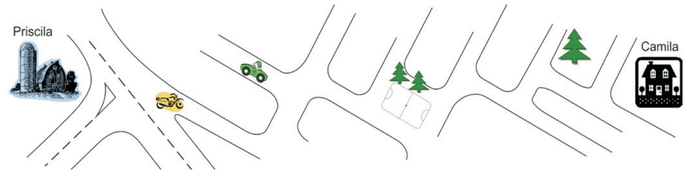
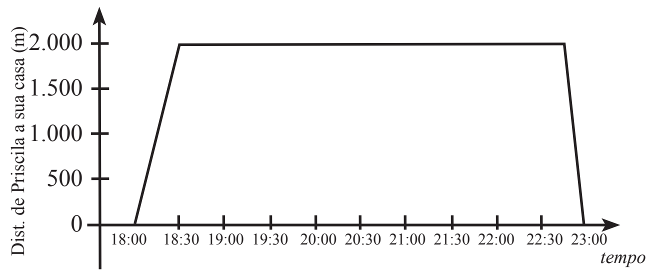
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Expressar conclusões em textos.	Registros escritos	Calculando os quadrados de 1,4 e 1,5, os alunos vão perceber que a $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5, pois $(1{,}4)^2 < 2$ e $(1{,}5)^2 > 2$. Solicitar, a seguir, que aumentem o espaço entre 1,4 e 1,5, como se fossem observá-lo com uma lupa, e o subdividam em 10 partes. Calculando $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ e $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$, os alunos vão perceber que a $\sqrt{2}$ localiza-se entre 1,41 e 1,42, subdividindo este intervalo em 10 partes e, calculando os quadrados a partir de 1,411, os alunos percebem que $(1{,}414)^2 = 1{,}999369$ e que $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$ e que, portanto, a $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Este processo pode continuar, estabelecendo uma aproximação da $\sqrt{2}$, com quantas casas decimais os alunos e o professor acharem por bem fazê-lo. Esta construção geométrica que permite aproximar a $\sqrt{2}$ deve ser discutida com os alunos, de tal forma que eles percebam que, quanto mais a raiz for aproximada por falta, mais aumentam os noves depois da vírgula, e por excesso mais aumentam os zeros depois da vírgula. Pode-se solicitar que os alunos registrem em seus cadernos as etapas desta construção e expressem suas conclusões no grupo. Ao discutir as aproximações da $\sqrt{2}$, o professor pode retomar com os alunos os Conjuntos Numéricos e sua localização na reta até estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$) e o conjunto de pontos de uma reta e, com isso, trabalhar os intervalos como subconjuntos dos Números Reais, representados por segmentos de reta.
Reconhecer os Conjuntos Numéricos e sua representação na reta.	Conjuntos Numéricos e sua representação na reta	**Os intervalos de Números Reais** Ao longo da escolaridade, os números foram sendo representados na reta. Ao representar os Números Naturais ($\mathbb{N}$) e os Números Inteiros ($\mathbb{Z}$), percebe-se que entre dois números consecutivos, não há outros números naturais ou inteiros. Ao representar os Números Racionais ($\mathbb{Q}$) na forma de fração ou na forma decimal, percebe-se que entre dois números racionais, há sempre um Número Racional. Quando se estudam os Números Irracionais ($\mathbb{I}$) que unidos com os Racionais formam os Reais, completa-se a reta de tal forma que cada Número Real corresponde a um ponto da reta, e cada ponto da reta corresponde a um Número Real. Com isso, pode-se dizer que, entre dois Números Reais quaisquer, há sempre um Número Real, Racional ou Irracional. Relacionando os Números Reais com a reta, tem-se que, para um segmento de reta qualquer, existe sempre um Número Real que representa a medida do seu comprimento.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Localizar Números Reais na reta numerada.	Intervalos A reta real	Solicitar que os alunos, na reta abaixo, localizem alguns números, como por exemplo: $-\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ $-2{,}25, +0{,}5, \sqrt{2}, \sqrt{10}, -\sqrt{2}, \pi$. 
Reconhecer a reta numérica relacionada ao Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$).		Propor problemas cujas soluções devam ser expressas por intervalos: Ex.: 1: Numa classe de ensino médio, foi feita uma pesquisa sobre a idade e a altura dos alunos. As alturas variavam entre 1,68m e 1,87m e as idades, entre 14 e 18 anos. a) É possível indicar todas as alturas dos alunos da classe? Represente-as da forma que você achar mais conveniente. b) Indique todas as idades possíveis. *(Smole, 2003 p. 32).* Ex.: 2: Quais são as dimensões possíveis do lado de um quadrado, para que sua área varie entre 4 cm^2 e 144 cm^2? Represente o resultado na forma de intervalo. *(Smole, 2003 p. 32).*
Reconhecer um intervalo como um subconjunto de Números Reais. Resolver situações-problema, determinando intervalos de Números Reais.		Ao corrigir coletivamente a localização dos pontos na reta, ou os problemas propostos, surge a necessidade de se dizer, por exemplo, que a $\sqrt{10}$ está entre 3 e 4, pois $\sqrt{9}$ é 3 e $\sqrt{16}$ é 4, que, obviamente, está mais perto do 3 do que do 4. Os alunos podem concluir que não é possível indicar todas as possíveis alturas dos alunos da classe, mas que elas estão entre 1,68 m e 1,87 m e que as idades dos alunos estão entre 14 e 18 anos. Surge, então, a ideia de intervalos e pode-se, trabalhar, também, as diferentes linguagens para representar intervalos:
Representar intervalos na linguagem geométrica, de conjuntos e de intervalos.	Representação de Intervalos	**- a gráfica:**  **- a de conjuntos:** $A = \{x \in R / 1{,}68 \leq x \leq 1{,}87\}$ $B = \{x \in R / 14 \leq x \leq 18\}$ **- a de intervalos:** [1,68; 1,87] [14, 18] A partir da compreensão dos intervalos, podem-se explorar os intervalos abertos, fechados, questionando como representá-los.
	Plano cartesiano	**O plano cartesiano** O trabalho que envolve a construção e interpretação de gráficos pressupõe o conhecimento do plano cartesiano e da ideia de corresponder pontos de um plano *a* um par de

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 203 24/8/2009 15:53:36

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Localizar pontos no plano cartesiano.	Localização de pontos no plano cartesiano História da Matemática	números (o par ordenado). É recomendável criar situações que levem os alunos a explorarem o papel de cada eixo no gráfico cartesiano, a ideia de que cada ponto, para ser localizado, precisa de duas informações: o valor da abscissa e o da ordenada. Solicitar aos alunos que leiam o texto a seguir e explorar com eles a ideia de plano cortesiano, quadrante e como estes são, convencionalmente, númerados. Uma sugestão de leitura:
Reconhecer a Matemática como uma construção humana ao longo da história. Localizar no tempo e no espaço o surgimento e a construção de conceitos matemáticos.		**O plano cartesiano** O primeiro passo em direção à construção de gráficos que expressam relações matemáticas foi dada pelos hindus na época de Bhaskara, no século XII. Eles representavam os números positivos e negativos por segmentos opostos em uma linha reta. Nicholas Horem, um professor de matemática francês, em Paris, no século XIV, utilizou um quadrante (o primeiro) para a construção gráfica dos números positivos. René Descartes, que viveu na França de 1596 a 1650, estudou duas grandezas relacionadas entre si, demonstrando graficamente nos quatro quadrantes do plano cartesiano a associação dos pontos com as grandezas. (Isso possibilitou a representação de todas as variações ocorridas em uma função (y) em relação a qualquer valor real atribuído a x).
Reconhecer e identificar os diferentes quadrantes do plano cartesiano. Compreender os conceitos de eixo e medida algébrica de um segmento orientado. Localizar pares ordenados em sistemas cartesianos ortogonais.	Quadrantes Sistema cartesiano ortogonal Eixos coordenados ou retas orientadas Par ordenado Coordenadas do ponto – abscissa e ordenada do ponto	Para determinar o plano cartesiano, escolhem-se duas retas perpendiculares, indicando com uma flecha o seu sentido positivo. O ponto de intersecção das duas retas designa a origem do sistema cartesiano, representado pelo par ordenado (0,0). Os eixos dividem o plano cartesiano em quatro partes, chamadas quadrantes, que são numeradas no sentido anti-horário. É necessária a utilização de uma escala conveniente para numerar ambos os eixos, como a que foi utilizada em séries anteriores para representar os diferentes Conjuntos Numéricos. Cada ponto é localizado no plano, por um par ordenado de números, chamados coordenadas do ponto, em que o primeiro elemento refere-se à localização no eixo horizontal (abscissa do ponto) e o segundo elemento refere-se à localização no eixo vertical (ordenada da ponto).  Solicitar aos alunos que, com duas retas reais, construam um plano cartesiano e localizem pontos nos quatro quadrantes e sobre os eixos, representando-os por pares ordenados. Os pontos marcados, ligados dois a dois por segmentos consecutivos, podem descrever uma figura. Os alunos podem montar desafios deste tipo e dar para outro colega descobrir uma figura cujos vértices tenham sido indicados por pares ordenados. Podem, também, nesta etapa do trabalho, jogar Batalha Naval.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 204 24/8/2009 15:53:36

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Desenvolver o vocabulário algébrico/ geométrico.	Representação gráfica de figuras geométricas	A construção, a interpretação e a análise de gráficos pode ser solicitada a partir de situações-problema como a que segue.
Interpretar gráficos em suas diferentes representações.	Interpretação de gráficos	**O caminho para a festa** *Problema extraído de Tinoco, p. 30.* Priscila sai de casa para ir à festa de Camila. Camila dá um mapa do caminho, para que Priscila possa chegar a sua casa. Priscila vai a pé e volta de ônibus.  Observe o gráfico e responda:  a) A que horas Priscila saiu de casa? b) A que horas Priscila chegou a casa? c) A que horas Priscila chegou à festa? d) A que distância fica a casa da Camila da casa da Priscila? e) Quanto tempo Priscila demorou para chegar à festa? f) Quanto tempo ela ficou na festa? g) Quanto tempo Priscila demorou para chegar em casa?
Ler, relacionar e interpretar diferentes representações.		h) O mapa mostra que o caminho da casa da Priscila até a casa da Camila é cheio de curvas; como pode o gráfico ser composto de segmentos de reta? i) Por que no trecho entre 18h e 18h30min, o gráfico sobe? j) Que grandeza é representada no eixo horizontal? k) Qual a variação de tempo entre dois pontos consecutivos assinalados? l) Que grandeza é representada no eixo vertical?
Construir e interpretar gráficos a partir de uma situação-problema.	Construção de gráficos	**Um desafio:** Suponha que Priscila já tenha andado 15 minutos em direção à festa, quando descobriu que tinha esquecido o presente da Camila. Teve, portanto, de voltar em casa e depois ir para a festa. Represente em um gráfico sua viagem desde que saiu de casa até chegar à casa de Camila. Fazer coletivamente a correção da atividade: O caminho para a festa. Outras atividades semelhantes a esta devem ser propostas.

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Selecionar diferentes tipos de gráficos.

Ler e interpretar gráficos e tabelas.

Ler e interpretar dados e informação apresentados em diferentes linguagens.

Desenvolver o conceito de função

Desenvolver a linguagem matemática (algébrica e geométrica).</td>
<td>Noção intuitiva de função

Tabelas e gráficos de barra, de setor, de pontos e de linhas

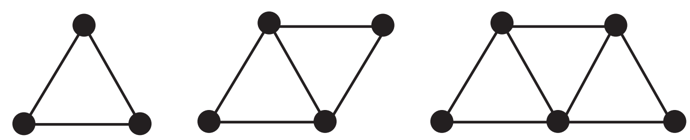
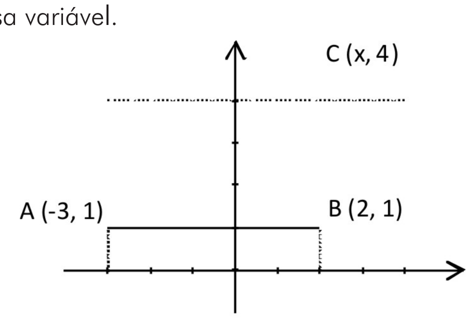
Variação de duas grandezas, uma como função da outra

Dependência de variáveis

Variáveis dependente e independente

Linguagem algébrica</td>
<td>Construindo intuitivamente o conceito de função
Entende-se que o estudo das funções no 1° ano do ensino médio deve iniciar de forma intuitiva, a partir de diferentes linguagens e contextos matemáticos do dia a dia.
Inicialmente, sugere-se familiarizar os alunos com diferentes tipos de gráficos, pesquisando-os em jornais e revistas, construindo-os, relacionando-os com tabelas e quadros, interpretando-os, oralmente e por escrito.
Orientar os alunos a observar a partir dos gráficos analisados: as grandezas envolvidas, a funcionalidade que as relaciona, as variáveis dependente e independente, os conjuntos envolvidos. Encorajá-los a empregar corretamente termos matemáticos, a trabalhar com outros processos matemáticos como regra de três e transformações nas unidades de medida.
Incentivá-los a resolverem problemas que envolvam várias representações, cujas questões possibilitem a construção e interpretação de gráficos, quadros e tabelas, como os que seguem.
O quadro a seguir indica o deslocamento de um móvel num dado intervalo de tempo:
<table>
<tr><th>Intervalo de tempo
(em segundos)</th><th>Deslocamento
(em centímetros)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td></tr>
<tr><td>7</td><td>21</td></tr>
<tr><td>8</td><td>24</td></tr>
<tr><td>9</td><td>27</td></tr>
<tr><td>10</td><td>30</td></tr>
</table>
Observando o quadro, responda:
a) Qual é o deslocamento do móvel num intervalo de 4 segundos?
b) Qual é o intervalo de tempo correspondente a um deslocamento de 21 cm?
c) O deslocamento é uma função do intervalo de tempo? Justificar a resposta.
d) Qual é o deslocamento d num intervalo de tempo t? (Suponha a velocidade do móvel constante).
e) A partir dos dados da tabela, construir um gráfico cartesiano.
Adaptado de Iezzi, G. Matemática: Ciência e aplicação – v.1
São Paulo: Atual, 2001. p.30</td>
</tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 206 24/8/2009 15:53:37

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Construir gráficos cartesianos a partir de dados contidos em tabelas.	Sequências, regularidades e padrões A lei de formação de uma sequência	Na correção coletiva do problema, solicitar que os alunos comentem e justifiquem seus gráficos e detalhem suas características (de linha, de pontos). Explorar as respostas da questão *d*, avaliando as respostas dos alunos, a fim de perceber o seu desenvolvimento no domínio da linguagem algébrica.
Identificar regularidades em sequências figurais ou numéricas e expressá-las por meio de linguagem algébrica.	Lei, Domínio e Imagem de uma função Plano cartesiano	**Sequências e padrões e a noção intuitiva de função** Oferecer aos alunos sequências de figuras ou de números, solicitar que as completem e, através de perguntas, levá-los a descobrirem o seu padrão e generalizar a sua lei de formação, com palavras e em linguagem algébrica. Exemplo: Com palitos de fósforos, construir os triângulos desenhados abaixo e responder as questões:  Na 3ª figura, para formar 3 triângulos, quantos palitos de fósforo foram usados? Na 5ª, na 10ª, e na 20ª figura, quantos palitos de fósforo serão utilizados? Sendo n o número de triângulos formados e p o número de palitos, encorajar os alunos a escreverem uma expressão que dê o número (p) de palitos que formam o número (n) de triângulos (adaptado de Tinoco, 2001, p. 33). Na correção coletiva da questão, as noções de variável, dependência de variáveis, expressão algébrica (lei da função), Domínio e Imagem devem ser exploradas. Mais sujestões de atividades constam no Caderno do Aluno 1° ano do ensino médio.
Localizar pontos no plano cartesiano. Relacionar conceitos geométricos e algébricos, na construção do conceito de função.	Elementos de triângulos Classificação de triângulos	**A Geometria e a noção intuitiva de função** Propor situações-problema, conforme exemplos a seguir: Explorando o plano cartesiano (extraído de Tinoco, 2001, p.43) Observar a figura abaixo. Nela, A e B são pontos fixos e C tem abscissa variável.  a) Escolher 3 valores para a abscissa x e desenhar o triângulo formado em cada caso. b) Calcular a área de cada um deles. c) Quais os valores inteiros que x pode assumir? d) x só pode assumir valores inteiros?

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 207 24/8/2009 15:53:37

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>
Desenvolver a ideia de dependência de variáveis, variável dependente e independente e lei da função.

Ler, construir e interpretar tabelas.

Utilizar regularidades expostas em tabelas para generalizar conceitos e fórmulas.

Identificar grandezas.

Reconhecer variações em diferentes grandezas.

Comparar e relacionar informações, expressar conclusões oralmente e por escrito.

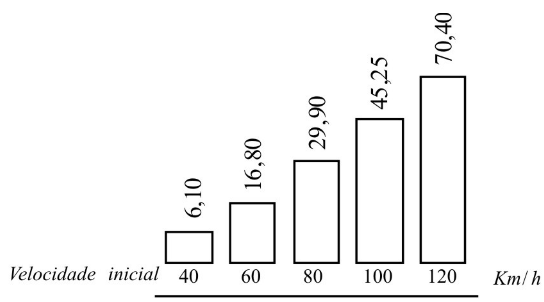
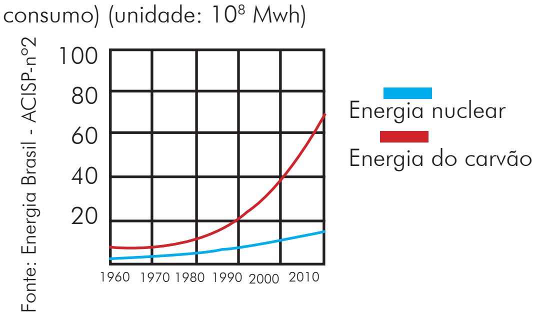
Argumentar criticamente e respeitar diferentes opiniões.
</td>
<td>
Perímetros e áreas de retângulos e quadrados

Grandezas

Variação de grandezas
</td>
<td>
e) Dê o conjunto de valores que x pode assumir.
f) A área dos triângulos depende dos valores de x? Justificar a resposta.
g) Comparar as alturas e as bases desses triângulos.
h) Determinar o valor de x para que o triângulo ABC seja:
- um triângulo isósceles de base AB;
- um triângulo retângulo.
i) O tipo de triângulo depende dos valores de x? Justificar a resposta.

Relacionando áreas e perímetros (adaptado de Tinoco, 2001, p. 44)
Solicitar que os alunos desenhem em papel quadriculado quatro quadrados de tamanhos diferentes, numerando-os. Considerando como unidade de comprimento o lado do quadrado do quadriculado, e como unidade de área a área do quadrado do quadriculado, solicitar que registrem a medida de seus lados, de seus perímetros e de suas áreas em um quadro, como o que está a seguir:
<table>
<tr><th>Quadrados</th><th>Lado</th><th>Área</th><th>Perímetro</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Incentivar uma discussão a partir da observação da tabela, utilizando para isso as seguintes questões:
a) Que grandezas variam na atividade proposta?
b) Sabendo o perímetro de um quadrado, você pode saber a sua área sem desenhá-lo?
c) Pode-se dizer que a área do quadrado depende do seu perímetro?
d) Pode-se dizer que a área e o perímetro do quadrado dependem do seu lado?
Se possível, encontrar expressões para as relações da questão d.
Desenhar no papel quadriculado todos os possíveis retângulos com 16 unidades de perímetro. Calcular suas áreas e registrar na tabela.
<table>
<tr><th>Retângulos</th><th>Base</th><th>Altura</th><th>Perímetro</th><th>Área</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>7</td><td>16</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td>16</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>16</td><td>15</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>16</td><td>16</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 208 24/8/2009 15:53:38

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Ler, relacionar e interpretar diferentes linguagens e representações.		Incentivar uma discussão a partir da tabela e das seguintes questões: Que grandezas variam? Pode-se dizer que a área dos retângulos é determinada pelo seu perímetro? Justificar oralmente as respostas e argumentar em favor de suas conclusões. Relacionar as duas tabelas e as conclusões a seu respeito, identificando o que acontece com os perímetros e as áreas dos quadrados e dos retângulos.
Reconhecer relações entre grandezas variáveis dadas por gráficos, tabelas e fórmulas.	Gráficos de barra	Solicitar que os alunos leiam o texto a seguir que contém exemplos de gráficos de funções, a partir dos quais podem-se retirar informações. Após a leitura, comentar com os alunos as informações e relacioná-las com os gráficos apresentados. Se possível, ter os gráficos desenhados no quadro, em folhas grandes ou em lâminas de retroprojetor.
Reconhecer relações funcionais em gráficos de barra.	Interpretação de gráficos de barra	**A noção intuitiva de função e os gráficos** Observam-se a seguir alguns gráficos encontrados frequentemente em livros, jornais ou revistas. Eles representam funções. A partir deles, podemos obter muitas informações sobre a função apresentada. Exemplo 1: Espaço de frenagem para o Automóvel A (em metros)  De acordo com este gráfico, podemos dizer que: • O espaço necessário para o Automóvel A parar é uma função da velocidade que ele tem, quando começa a frenagem; • A 40 km/h são necessários 6,10 m; já a 80 km/h necessita-se de 29,90 m; • Em geral, o espaço necessário para frear aumenta rapidamente com a velocidade inicial, sendo que a 120 km/h ele é quase doze vezes maior que a 40 km/h.
Reconhecer relações funcionais em gráficos de linha.	Gráficos de linha	Exemplo 2: Consumo anual de energia no Brasil (persistindo os padrões atuais de consumo) (unidade: 10^8 Mwh) 

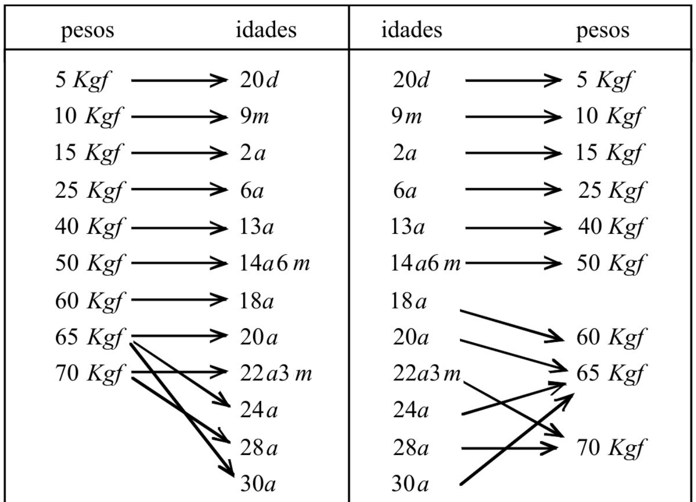
<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Interpretar gráficos de linha.</td><td>Interpretação de gráficos de linha</td><td>
Temos, aqui, dois gráficos: o do consumo anual de energia nuclear e o do consumo anual da energia do carvão, com estimações feitas até o ano de 2010.
Podemos dizer, de acordo com eles, que:
• O consumo de energia nuclear estimado para 1990 foi de cerca de 20 unidades;
• O consumo de energia do carvão no ano de 2010 não chegará a 20 unidades;
• Somente após o ano 2000, o consumo de energia nuclear ultrapassará 40 unidades;
• O consumo de energia nuclear no ano 2010 será maior que 60 unidades;
• O consumo de energia cresce com o passar dos anos; o da energia nuclear cresce mais rapidamente que o da energia do carvão.
De um modo geral, podemos obter muitas informações a respeito de uma determinada função a partir de seu gráfico. Estas informações também podem ser obtidas a partir de uma expressão $y = f(x)$, quando é possível obtê-la. Entretanto, mesmo quando temos a lei da função $y = f(x)$, é a sua representação gráfica que fornece uma visualização das suas propriedades, sobretudo as relativas ao crescimento e de decrescimento, valores mínimos e máximos atingidos.
</td></tr>
<tr><td>Reconhecer uma função.

Identificar a lei de uma função.</td><td>O conceito de função

Lei de uma função</td><td>
O conceito de função
Depois de trabalhar o conceito de função de uma forma intuitiva de tal forma que os alunos estejam familiarizados com vários termos próprios deste conceito estruturante da Matemática, é o momento de defini-lo.
Solicitar que os alunos leiam o texto a seguir, completando algumas lacunas.
Quando buscamos algum conhecimento, no estudo de um fenômeno de qualquer natureza, tentamos estabelecer relações entre as grandezas envolvidas. Se duas grandezas x e y estão relacionadas de tal forma que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor associado a y, então dizemos que y é uma função de x.
Assim, por exemplo, dizemos que:
• A área de um círculo é uma função do seu raio;
• O preço total pago pela gasolina que pomos no tanque de combustível do automóvel é uma função do número de litros comprados;
• A população de um determinado país é uma função do tempo;
No exemplo da gasolina, supondo ____ reais o preço de um litro, temos a seguinte tabela:
<table>
<tr><td>Nº de litros</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3,5</td><td>7</td><td>13</td><td>23</td></tr>
<tr><td>Preço a pagar (reais)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Fixando o número de litros a ser comprado, x, o valor correspondente do preço a pagar, y, estará determinado, sendo válida a igualdade
y = ... x
y ↓ preço a pagar; .... ↓ preço por litro; x ↓ número de litros
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Identificar relações que não são funções.

Utilizar dados contidos em um quadro ou tabela para identificar pares de grandezas que sejam ou não funções.</td><td>Relações que não são funcionais</td><td>Neste caso, a relação de interdependência entre x e y, que nos levou a dizer que y é uma função de x, pode ser representada, de forma sintética, através da fórmula y = ... x .
Algumas relações entre determinados pares de grandezas não são funções.
Observando o quadro abaixo, verificamos que a idade de uma pessoa não é uma função de seu peso, pois, fixando o peso, 65 Kgf, temos várias idades associadas em correspondência: 20 anos, 24 anos, 30 anos... Note-se, no entanto, que o peso de uma pessoa é uma função da sua idade; fixada a idade da pessoa, tem-se, em correspondência, um e somente um valor para o seu peso.



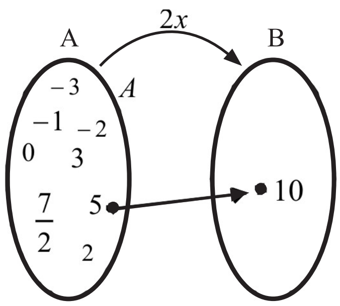
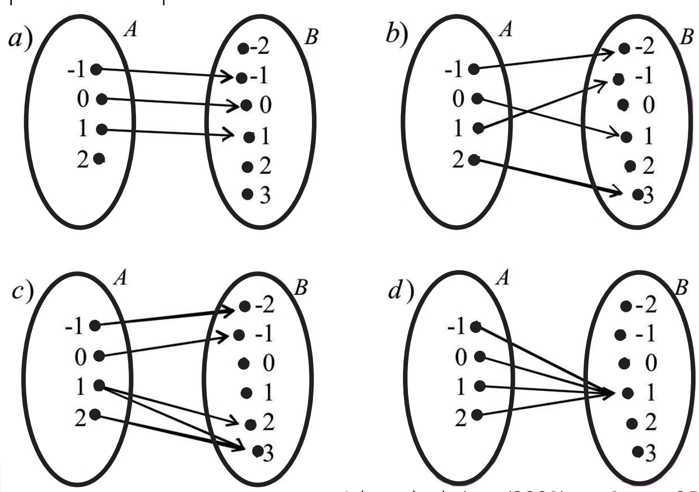
A idade não é uma função do peso | O peso é uma função da idade</td></tr>
<tr><td>Definir função.

Reconhecer as condições de existência e unicidade na definição de função.

Identificar e notar o domínio, o conjunto imagem de uma função, bem como as variáveis dependentes e independentes.</td><td>Definição de função

Condição de existência e unicidade na definição de função

Domínio, Imagem, Contradomínio, variáveis dependente e independente</td><td>Ao discutir com os alunos o texto lido, ficando evidente que a cada elemento do conjunto das variáveis independentes corresponde um e somente um elemento do conjunto das variáveis dependentes pode-se, então, definir formalmente o que é uma função, tendo em vista que a função é um modo de relacionar grandezas, ressaltando as condições de existência e unicidade.
Sugere-se que sejam retomados exemplos trabalhados e sejam revisados em cada exemplo o Domínio, o Contradomínio, o conjunto Imagem, as variáveis dependente e independente, bem como as notações corretas e usuais.
O uso da linguagem de conjuntos deve ser desenvolvido nesta etapa de trabalho, na medida em que essa linguagem facilite a compreensão do conceito de função e seja entendida como uma linguagem unificadora da Matemática.
O uso de diagrama de flechas facilita a identificação das funções.</td></tr>
</table>

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Desenvolver a linguagem de conjuntos. Utilizar diagramas de flechas para representar relações entre conjuntos finitos, especificando as que são funções. Determinar o Domínio e a Imagem das funções.	Linguagem de conjuntos Diagramas de flechas Determinação do Domínio e da Imagem de uma função	Propor aos alunos que resolvam situações semelhantes aos exemplos abaixo: Exemplo 1: Associar cada elemento do conjunto A(x) um elemento do conjunto B(y) tal que a cada x é associado um único y que é o dobro de x. Propor aos alunos que completem com flechas o diagrama a seguir, relacionando a cada x um valor de y. Exemplo: *Para* $x = 5$ $y = 2x$ $y = 2 \cdot 5$ $y = 10$  Solicitar que analisem o diagrama, reconhecendo se ele expressa uma função, justificando a resposta, determinando a imagem da relação ou da função. Exemplo 2: Propor aos alunos que resolvam a questão: Verificar se cada um dos esquemas abaixo define ou não uma função de A = {-1, 0, 1, 2} em B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3} e justificar a resposta.  Adaptado de Iezzi (2001) – v. 1 – p. 35 Ao corrigir as questões propostas e comentar as respostas dos alunos, sugere-se que sejam sistematizados os conceitos relacionados às funções. **Domínio de funções** Ao analisar possíveis funções de R em R, é conveniente verificar que há leis para as quais o conjunto R deve ser modificado para ser o domínio dessa função. Exemplo:

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Cálcular o Domínio de funções reais.	Cálcular o Domínio de funções reias.	Para a lei $y=\dfrac{x-1}{x-2}$, o domínio é $R-\{2\}$, pois o número 2 anula o denominador $(x-2=0)$ e essa lei associa cada x real e diferente de dois tal que $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Para a lei $y=\sqrt{x+1}$, o domínio é $\{x \in R \,/\, x \geq 1\}$, $x+1 \geq 0$ pois as raízes quadradas de números negativos não pertencem ao conjunto dos Números Reais.
Resolver problemas que envolvam conceito de função polinomial de 1° grau. Reconhecer a expressão analítica referente a um polinômio de 1° grau. Reconhecer as funções de 1° grau como modelos que correspondem a fenômenos das ciências. Reconhecer a reta como a representação gráfica de uma função de 1° grau.	Função polinomial de 1° grau A reta: representação gráfica da função de 1° grau Expressão analítica da função Domínio, imagem e sinal da função Coeficiente angular "a" Coeficiente linear "b" Função crescente e decrescente	**Funções de 1° grau** As funções de 1° grau têm como domínio o conjunto dos Números Reais (R) ou um subconjunto de R. Correspondem às relações entre a variável dependente e a independente expressas por polinômios de 1° grau, portanto da forma $y = a\,x + b$ com $a \neq 0$. Como as demais funções reais, estas são muito importantes, pois servem para descrever vários fenômenos das ciências. Para iniciar o estudo das funções de 1° grau, sugere-se selecionar vários problemas cuja solução demande a elaboração de um quadro ou tabela e de um gráfico e escrevendo-os em fichas. Dar um problema para cada dupla ou trio de alunos. Cada dupla ou trio deve apresentar uma solução ao grande grupo, numa lâmina de retroprojetor, num cartaz ou no quadro de giz. O professor deve problematizar o grupo, lançando questões como: - O que há de comum na representação gráfica dos problemas? - Por que, a partir de dois, três ou quatro pontos, pode-se traçar uma reta? - Em que ponto o gráfico da função intercepta o eixo y? - Como é a reta, quando o ângulo que ela forma com o eixo das abscissas é agudo. E quando é obtuso? - Como é a equação que relaciona as variáveis, quando a reta passa pela origem, quando forma com o eixo da abscissa um ângulo agudo, e quando forma um ângulo obtuso? - O que caracteriza as equações se duas retas são paralelas, concorrentes ou coincidentes? - O que caracteriza a equação de uma reta que passa pela origem? À medida que os alunos forem respondendo as perguntas, o professor deverá ir sistematizando os conceitos relacionados à função de 1° grau, familiarizando-os com as palavras domínio, imagem, função constante, crescente, decrescente, o significado do "a" e do "b" na igualdade $y = ax + b$. Pode-se, também, nomear o "a" de coeficiente angular e o "b" de coeficiente linear. A partir do coeficiente angular, pode-se definir a função crescente e a decrescente. É interessante explorar a função constante e a reta que representa a função

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Construir, ler e interpretar gráficos de funções de 1° grau.

Analisar gráficos, reconhecendo os sinais, o crescimento, o decrescimento, o domínio, o contradomínio e a imagem da função.

Resolver problemas que envolvam o conceito de função de 1° grau.

Construir a linguagem, o vocabulário e as simbologias relacionadas às funções.

Reconhecer o x como incógnita na equação e como variável na função.

Identificar os valores de x que tornam y igual a zero como raízes da função.

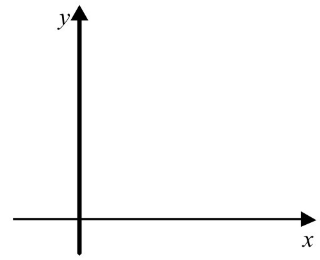
Identificar as raízes da função como os pontos em que a curva que a representa corta o eixo das abscissas.</td>
<td>Retas paralelas, coincidentes e concorrentes

Construção de gráficos de funções

Letras como incógnitas e como variáveis

Raiz da função polinomial de 1° grau</td>
<td>real $y = x$ que será utilizada a seguir.
Ao solicitar que os alunos tracem gráficos de funções polinomiais de 1° grau, quando calcularem os valores de y a partir dos valores de x, é importante relacionar a lei da função com a equação de 1° grau que já deve ter sido trabalhada nas séries anteriores.

Solicitar que os alunos completem a tabela relativa aos valores de x e de y da função $f: R \to R$, definida pela lei $y = x + 2$ e tracem o seu gráfico.

<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>

Ao discutir os resultados, é preciso que os alunos compreendam que na equação $x + 2 = 0$, o valor da incógnita x é -2 e na função, a letra x, como variável, pode assumir qualquer valor real.
Na função real $y = x + 2$, quando $x = -2$, $y = 0$. Significa que no ponto $(-2, 0)$, a reta que representa a função corta o eixo das abscissas, logo-2 é a raiz da função.
Neste momento, a linguagem e as simbologias relacionadas ao conceito de função devem ser trabalhadas, bem como o sinal da função e a função constante.
Ao final desta etapa de trabalho, solicitar aos alunos que escrevam, em duplas ou trios, um texto sobre o que aprenderam a respeito de funções de 1° grau, compondo um texto coletivo, sistematizando os conceitos a respeito de funções de 1° grau.
Propor exercícios e problemas que envolvam funções de 1° grau e o reconhecimento da função constante.</td>
</tr>
<tr>
<td>Construir, analisar e interpretar gráficos de funções de 1° grau.</td>
<td></td>
<td>Resolução gráfica de um problema
Explorar a situação-problema.
Em uma reunião de motoristas de táxi, discutia-se o que seria melhor: aumentar o preço da bandeirada ou aumentar o preço de cada 100 m percorridos?
As opiniões variavam.
Um grupo (f1) achava que deveriam fixar a bandeirada em R$ 3,00 e que cada 100 m percorridos valesse 10 centavos. O</td>
</tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 214 24/8/2009 15:53:40

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem

Habilidades/ Competências

Resolver problemas a partir da interpretação de gráficos.

Resolver situações-problema, encontrando a lei que expressa uma função.

Construir, analisar tabelas para resolver situações-problema.

Construir gráfico de linha a partir de dados contidos em uma tabela.

Interpretar dados contidos em gráficos de linha, envolvendo mais de uma função.

Relacionar expressões analíticas e representações gráficas para interpretar, comparar e analisar situações-problema, a fim de decidir o melhor resultado.

Conteúdos/Conceitos Estruturantes

Representação gráfica de função de 1° grau

Situações de Aprendizagem

segundo (f2) grupo era de opinião que a bandeirada deveria ser de R$ 2,00, mas que cada 100 m percorridos valesse 20 centavos.

Traduzindo, matematicamente, a opinião dos dois grupos:

1° grupo: $y = 0{,}10x + 3{,}00$ f1

Onde y é o valor a pagar, x é o número de 100 m percorridos, R$ 3,00 é o valor da bandeirada e R$ 0,10 é o valor de cada 100 m.

2° grupo: $y = 0{,}20x + 2{,}00$ f2

Onde y é o valor a pagar, x é o número de 100 m percorridos, R$ 2,00 é o valor da bandeirada e R$ 0,20 é o valor de cada 100 m.

Construindo as tabelas de f1 e f2,obtem-se:

Opção do 1° grupo f1

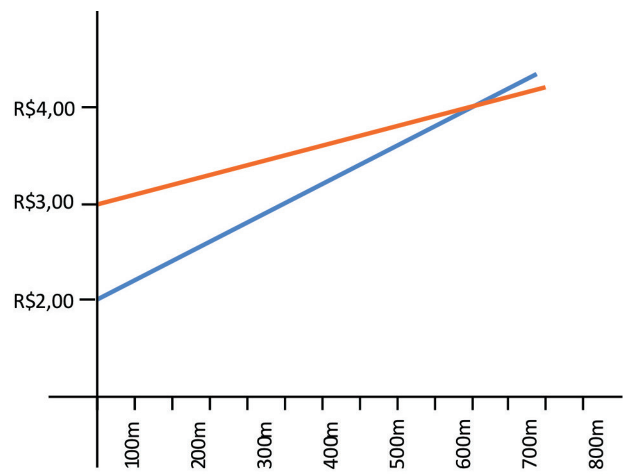
X	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
Y	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50	3,60	3,70	3,80	3,90	4,00	4,10	4,20

Opção do 2° grupo f2

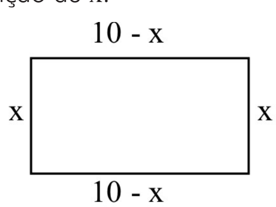
x	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
y	2,00	2,20	2,40	2,60	2,80	3,00	3,20	3,40	3,60	3,80	4,00	4,20

Traçar em um mesmo gráfico, em cores diferentes. as informações contidas nas tabelas. Observando e comparando os gráficos, os alunos devem, em um pequeno texto, descrever qual a situação melhor para os motoristas, justificando a sua conclusão.

Concluindo a atividade, o professor deverá promover uma discussão, encontrando um consenso sobre a melhor resposta, ressaltando a importância do estudo das funções e suas representações gráficas para interpretar fenômenos e nas tomadas de decisão.



MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 215
24/8/2009 15:53:40

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver inequações de 1° grau.	Inequações de 1° grau Conjunto solução Intervalos	**Inequações de 1° grau** Este é um bom momento para trabalhar as inequações de 1° grau, que envolvem as desigualdades, e cujo conjunto solução se expressa através de intervalos, à medida que as inequações de 1° grau envolvem expressões do tipo: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ e o processo de resolução de uma inequação de 1° grau envolve o estudo do sinal da função que trata de descobrir os valores reais de x para $ax + b < 0$ ou $ax + b = 0$ ou $ax + b > 0$. O estudo das inequações de 1° grau pode partir de um problema do tipo: Um taxista recebe R$ 2,80 pela bandeirada e R$ 1,20 pelo quilômetro rodado. Quantos quilômetros deve percorrer em uma única corrida para ganhar pelo menos R$ 40,00? Após achar a lei que expressa esta função, $f(x) = 1{,}20x + 2{,}80$, os alunos devem traçar o seu gráfico a partir da elaboração de um quadro ou de uma tabela. O que os alunos devem observar é que, na prática, se o percurso da corrida (x) for maior ou igual a 31 km rodados, o taxista ganhará mais de R$ 40,00. Assim, neste caso, se $x \geq 31$, $f(x) \geq 40$ e o conjunto solução da inequação é o conjunto dos valores reais que a transformam numa desigualdade verdadeira.
Resolver problemas que envolvam o conceito de função polinomial de 2° grau. Reconhecer a expressão analítica referente a um polinômio de 2° grau. Reconhecer as funções de 2° grau como modelos que correspondem a fenômenos da ciência. Reconhecer a parábola como representação gráfica da função de 2° grau.	Função polinomial de 2° grau Uso da linguagem algébrica Parábola – a representação gráfica da função polinomial de 2° grau Concavidade da parábola Pontos do gráfico de uma função: raízes, ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas, vértice da parábola (ponto de máximo e de mínimo)	**Função de 2° grau** O estudo da função de 2° grau pode iniciar com um problema como o seguinte: O dono de um sítio quer cercar uma área para fazer uma horta de forma retangular. Ele tem 20 m de tela para cercar a horta. Ele quer ter a maior área para o plantio. Quais serão as dimensões do retângulo, para que o dono do sítio consiga cercá-lo com os 20 m de tela e consiga ter a maior área para o plantio? Encorajar os alunos para que, inicialmente, expressem analiticamente as dimensões do retângulo e da sua área em função de x.  Sabendo que 20 m de tela deverão cercar a horta, 20 m será o perímetro. Convencionando por x um dos lados do retângulo, qual será a expressão do outro lado? O perímetro é 20; um lado é x; o outro é? $\frac{20-2x}{2} = \frac{\cancel{2}(10-x)}{\cancel{2}} = 10 - x$ A expressão da área será: $A(x) = x(10-x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x, \; com \; 0 < x < 10$

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Reconhecer os pontos de máximo e mínimo do gráfico da parábola e suas expressões analíticas.

Reconhecer o domínio e a imagem de uma função de 2º grau.

Reconhecer os intervalos em que a função de 2º grau é crescente ou decrescente.

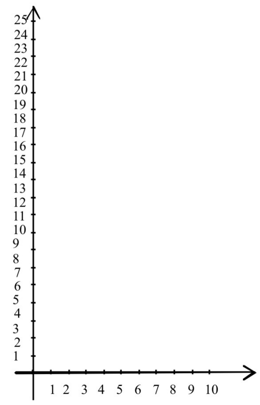
Determinar os sinais da função de 2º grau.

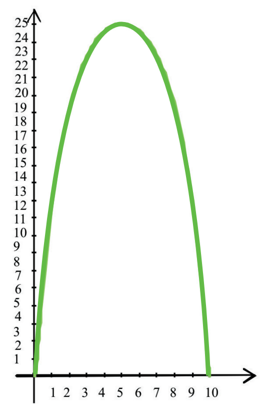
Reconhecer o x como incógnita na equação e como variável na função.</td>
<td>Domínio e Imagem de função

Intervalos em que a função é crescente ou decrescente

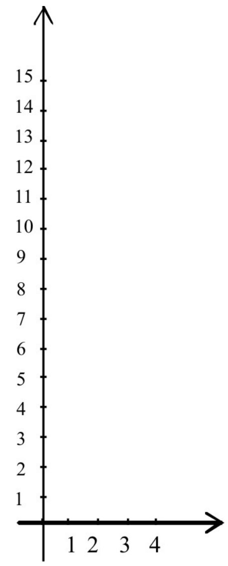
Sinal da função

Vértice da parábola

Letras como incógnitas e como variáveis</td>
<td>Dada a expressão analítica de A(x), solicitar aos alunos que completem a tabela abaixo e construam o gráfico correspondente aos dados nela contidos.
<table>
<tr><th>x</th><th>$10 - x$</th><th>$A(x)=-x^2+10x$</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td></td></tr>
</table>


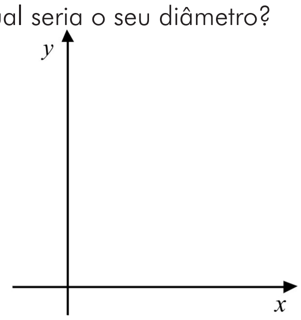
Os alunos deverão chegar a uma tabela e a um gráfico como os que estão a seguir:
<table>
<tr><th>x</th><th>$10 - x$</th><th>$A(x)=-x^2+10x$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td><td>21</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>24</td></tr>
<tr><td>7</td><td>3</td><td>21</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td>9</td></tr>
</table>


Solicitar que os alunos relacionem a tabela, o gráfico, a expressão analítica de A(x) e seus coeficientes. Num texto, expressem suas conclusões e respondam a pergunta do problema.
O professor pode selecionar problemas cuja solução necessite trabalhar com um polinômio de 2º grau, da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a $a \neq 0$, $b=0$ ou $b \neq 0$, $c=0$ ou $c \neq 0$, de tal forma que os alunos percebam o significado dos coeficientes, relacionando-os com a concavidade da parábola, o gráfico da função de 2º grau, o ponto que ela corta o eixo das ordenadas (c) e das abscissas (raízes), o vértice e suas coordenadas (ponto em que a parábola adquire valor mínimo ou máximo), o eixo de simetria do gráfico da função (a reta vertical em relação ao eixo das abscissas que passa pelo vértice), o domínio e o conjunto imagem da função.
Neste momento, a linguagem e as simbologias relacionadas às funções polinomiais de 2º grau devem ser trabalhadas.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td>Função crescente e decrescente</td><td>
Os diferentes significados das letras, que aparecem ora na equação e ora na função de 2° grau, devem ser explorados com os alunos, como já deve ter acontecido no estudo da função polinomial de 1° grau.
Solicitar que os alunos completem a tabela a seguir e tracem o gráfico da função de 2° grau f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida pela lei $y = x^2 + 3x + 2$
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>$-\frac{3}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>-2</td><td></td></tr>
<tr><td>-3</td><td></td></tr>
<tr><td>-4</td><td></td></tr>
<tr><td>-5</td><td></td></tr>
</table>


Ao discutir os resultados, o professor deve explorar o fato de que o x na lei da função é uma variável que pode assumir qualquer valor real.
Ao calcular o valor de y, verifica-se que para $x = -1$ e $x = -2$, $y = 0$
Assim, nos pontos $(-1, 0)$ e $(-2, 0)$, a parábola (representação gráfica da função) corta o eixo das abscissas e -1 e -2 são raízes da função.
Por outro lado, na equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ o x é a incógnita cujos valores são -2 e -1.
Observar os intervalos em que a função é crescente ou decrescente, analisando o sinal da $f(x)$.
Na medida do tempo e do perfil de sua turma, o professor poderá explorar inequações de 2° grau, a partir de situações-problema. Ao trabalhar inequações de 2° grau, estabelecendo seu conjunto solução, os alunos terão a oportunidade de trabalhar com intervalos e operações, aprofundando e significando este tema.
</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas relacionados a outras áreas do conhecimento, envolvendo função exponencial.</td><td>Função exponencial</td><td>
Função exponencial
As funções exponenciais têm aplicações em algumas situações do dia a dia e nas pesquisas associadas a fenômenos da natureza que estão sujeitas ao crescimento ou decrescimento exponencial como, por exemplo, os rendimentos das cadernetas de poupança, as taxas de inflação, a multiplicação das bactérias, o crescimento populacional dos seres vivos.
</td></tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 218 24/8/2009 15:53:41

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
Solicitar aos alunos que leiam com atenção o problema abaixo e, a partir dele, elaborem um quadro que mostre o aumento do diâmetro da folha de uma planta, observada por um biólogo durante quatro meses. Depois, transponham as informações do quadro para um gráfico que expresse o aumento do diâmetro da folha em função do tempo.
Problema:
Acompanhando o crescimento da folha de uma planta aquática de forma circular, um biólogo percebeu que o diâmetro da folha triplicava a cada mês. Se, na observação inicial, o diâmetro media 1 cm, após quatro meses, que é o prazo de sobrevivência da folha, qual seria o seu diâmetro?
</td></tr>
<tr><td>A partir de um quadro ou de uma tabela, traçar o gráfico de uma função e analisar o seu crescimento e o seu decrescimento.</td><td>Gráfico da função exponencial</td><td>
<table>
<tr><td>Medida inicial</td><td>1 cm</td></tr>
<tr><td>Após 1 mês</td><td></td></tr>
<tr><td>Após 2 meses</td><td></td></tr>
<tr><td>Após 3 meses</td><td></td></tr>
<tr><td>Após 4 meses</td><td></td></tr>
</table>


Lançar várias questões:
Ao transpor as informações do quadro para o gráfico, vocês poderiam unir os pontos do gráfico por uma reta? No caso positivo, justificar a resposta.
Qual seria o diâmetro da folha após 5 meses?
Completar o quadro abaixo e, observando a sequência de potências de 3, generalizar uma expressão analítica para o aumento do diâmetro da folha em função do tempo.
</td></tr>
<tr><td>Generalizar a expressão analítica de uma função.</td><td></td><td>
<table>
<tr><th>Tempo em meses</th><th>Diâmetro em cm</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1° = 3°</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3 =</td></tr>
<tr><td>2</td><td>9 =</td></tr>
<tr><td>3</td><td>27 =</td></tr>
<tr><td>4</td><td>81 =</td></tr>
<tr><td>5</td><td>243 =</td></tr>
<tr><td>6</td><td>729 =</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>x</td><td></td></tr>
</table>
Adaptado de Smole (2003).
</td></tr>
<tr><td>Revisar as propriedades das potências e das operações com potências.</td><td></td><td>
A função do crescimento do diâmetro da folha, se ela crescesse durante x meses, seria dado pela função: f(x) =.
Ao promover uma discussão sobre a atividade realizada, o professor deve encorajar seus alunos a identificarem esta função
</td></tr>
</table>

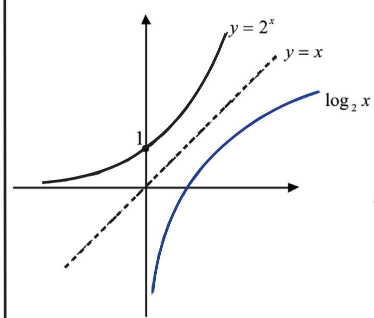
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 219 24/8/2009 15:53:41

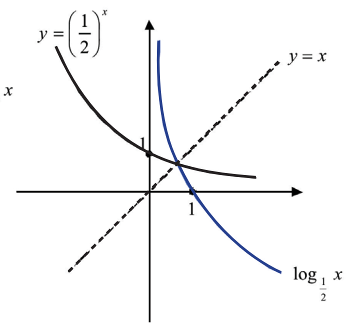
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Encontrar a lei que expressa uma função exponencial a partir da observação de uma tabela. Compreender as restrições da base de uma função exponencial. Analisar os gráficos da funções exponenciais e reconhecer as crescentes e as decrescentes. Resolver equações exponenciais. Relacionar as leis e os gráficos das funções exponenciais e identificar as crescentes e as decrescentes. Resolver equações exponenciais em que o 1° e o 2° termos possam ser reduzidos a potências de mesma base.	Propriedades das potências Restrições da base de uma função exponencial. Gráficos das funções exponenciais. Funções exponenciais crescentes e decrescentes. Equações exponenciais	como uma função exponencial de base 3, generalizando que, toda a função f de R em R, que a cada x associa o número a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a, que, em símbolos, escreve-se: $f: R \rightarrow R$ $f(x) = a^x,\ com\ \ a > 0\ \ e\ \ a \neq 1\ \ ou\ \ y = a^x$ O professor deve questionar seus alunos sobre o porquê das restrições à base a ($a > 0$ e $a \neq 1$). Os alunos devem compreender e, se possível, eles mesmos devem concluir que: Se $a = 1$, 1^x é sempre 1, para qualquer $x \in R$ e esta é uma função constante e, portanto, não é exponencial. Se $a = 0$, $0^x = 0$ para qualquer $x \in R$ e $x \neq -1$. Se $a < 0$, não se pode garantir que $a^x \in R$, pois, por exemplo, $(-2)^{0,5} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ que não pertence aos números reais. Para generalizar o gráfico de uma função exponencial e reconhecê-lo com suas características, e, ainda, identificar a função exponencial crescente ou decrescente, a partir da base *a*, sugere-se que o professor proponha que seus alunos, em duplas, tracem em malhas quadriculadas ou milimetradas, alguns gráficos de funções exponenciais com diferentes bases $\left(2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ isto é $a > 1$ ou $0 < a < 1$ e, após compará-los, expressem em um texto suas conclusões. O professor, então, pode compor coletivamente um texto que sistematize as funções exponenciais, definindo-as, bem como o domínio, a imagem, o seu crescimento ou o seu decrescimento. Ao trabalhar a função exponencial, recomenda-se que o professor certifique-se dos conhecimentos dos alunos sobre as propriedades das potências e das operações com potências, uma vez que para a função exponencial $y = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, valem todas as propriedades das potências. A familiaridade com tais propriedades é fundamental para a resolução das equações exponenciais. Como conteúdo mínimo a ser trabalhado com os alunos de 1° série do ensino médio, entende-se ser importante estudar as equações exponenciais que podem ser resolvidas, reduzindo-se o 1° e o 2° membros a potências de mesma base.
Reconhecer as funções logarítmicas como inversas das exponenciais.	Função logarítmica A função logarítmica como inversa da função exponencial	**Função logarítmica** Ao estudar as funções de 1° grau, os alunos deparam-se com uma reta cuja equação é y = x. Tal reta caracteriza-se como a bissetriz que atravessa o 1° e o 3° quadrantes, passa pela origem do sistema, o ponto (0,0), e forma com o sentido positivo do eixo das abscissas um ângulo de 45°.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Utilizar a simetria para, a partir de gráficos, reconhecer que a função logarítmica é a inversa da exponencial. Resolver problemas relacionados a outras áreas do conhecimento, envolvendo funções logarítmicas.	Gráfico da função exponencial	(ver abaixo)

Solicitar que, num gráfico cartesiano, os alunos tracem as funções exponenciais $y = 2^x ; y = 3^x ;\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Ao corrigi-las, explorar os gráficos, identificando com eles, as funções exponenciais crescentes e decrescentes, relaconando-os às suas bases.

A seguir, solicitar que, nos gráficos das funções exponenciais crescentes $(y = 2^x ; y = 3^x)$ e das funções exponenciais decrescentes $\left(y = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; y = \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$, tracem a reta bissetriz (y=x), e, a partir dela, dobrem os gráficos, tomando-a como um eixo de simetria, e, com uma caneta colorida, tracem os gráficos simétricos em relação à reta bissetriz, conforme desenho abaixo.





Encorajar os alunos a concluírem que, se a > 0, as funções exponenciais são crescentes e as simétricas em relação a elas também o são, se $0 <$ a < 1, as funções exponenciais são decrescentes e as simétricas a elas também o são.

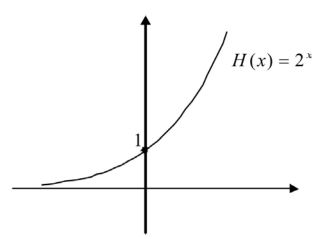
Que funções estão aqui representadas?

Solicitar que os alunos elaborem um quadro, tracem o gráfico referente à questão abaixo e respondam as questões propostas.

Se a altura de uma planta dobra a cada mês durante um certo tempo, qual é a altura esperada ao final do 5° mês, sabendo que sua altura inicial medida pelos pesquisadores é de 1cm.

A partir de completarem um quadro e traçarem um gráfico como os que estão a seguir, solicitar que os alunos respondam as questões que estão abaixo:

Media é	1 cm	2^0
1° mês	2	2^1
2° mês	4	4^2
3° mês	8	2^8
4° mês	16	2^4
5° mês	32	2^5



<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Resolver problemas a partir de tabelas e gráficos e analisar o domínio, a imagem, o crescimento e o decrescimento de funções logarítmicas.

Resolver equações logarítmicas.

Definir logaritmo.

Compreender as condições de existência de um logaritmo.</td>
<td>Condições da base de uma função logarítmica

Condições de existência de um logaritmo</td>
<td>1. Qual é a expressão analítica da altura da planta? $H(x) = 2^x$
2. Supondo que essa planta cresça num tempo x, definir o domínio dessa função e justificar a resposta. $D(f)=(0,+\infty)$
3. Qual será a altura da planta após três meses e meio de observação?
$$H(3{,}5) = 2^{3{,}5} = 2^3 \cdot 2^{0{,}5} = 8\sqrt{2} \cong 11{,}3$$
4. Após quanto tempo a planta terá 9 cm de altura? $2^x = 9$
Os alunos poderão encontrar dificuldade para resolver esta equação, pois, até agora, foram propostas equações exponenciais em que o 1° e o 2° membros podem ser transformados em potências de mesma base. No entanto, observando a tabela, os alunos poderão dizer que a planta terá 9 cm de altura entre o terceiro e o quarto mês. O que interessa saber é a que expoente o 2 foi elevado para obter o 9, e isso, pela observação feita, é um número maior que três e menor que quatro.
Quando os alunos sabem que $2^x = 32$, é fácil achar o valor de x, pois 32 é uma potência de 2, logo, $2^x = 2^5$, então $x = 5$ e diz-se que 5 é o logaritmo de 32 na base 2.
Achar o logaritmo de 32 na base 2, é encontrar o expoente a que o 2 foi elevado para obter o número 32. Assim, definindo logaritmo de um número b numa base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$ como o expoente da potência, a qual se deve elevar a base a para obter o número b.
Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$ então: $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$.
5. No plano cartesiano em que foi traçada a função $H(x) = 2^x$, traçar o gráfico $\log_2 x$, a partir da tabela abaixo.
<table>
<tr><th>x</th><th>y = log2x</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>-2</td></tr>
</table>
O que pode ser concluído quanto às duas funções simétricas as exponenciais $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?
Discutir no grande grupo as conclusões dos alunos, sistematizando as funções logarítmicas, os seus gráficos, bem como o seu domínio e a sua imagem.
Um pouco de história.
A história da Matemática vai ser útil no entendimento dos logaritmos decimais que permitem achar a que expoente o 2 foi elevado para se obter o 9 e que se concluiu que é um</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Compreender o conhecimento matemático como o resultado de uma construção humana e de um processo mental.

Valorizar os matemáticos e suas criações.

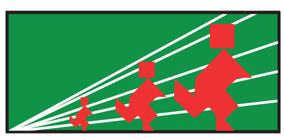
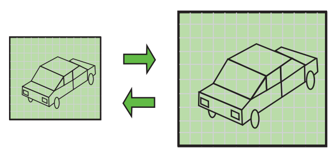
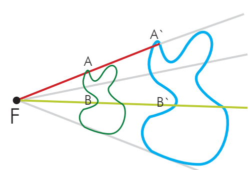
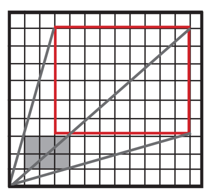
Significar os termos matemáticos a partir da etimologia das palavras.</td><td>História da Matemática

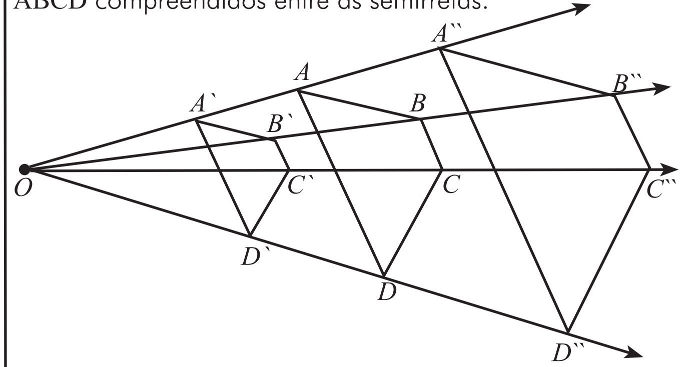
Etimologia dos termos matemáticos</td><td>número decimal entre 3 e 4.
A partir das atividades realizadas, sugere-se que o professor solicite a leitura do seguinte texto:

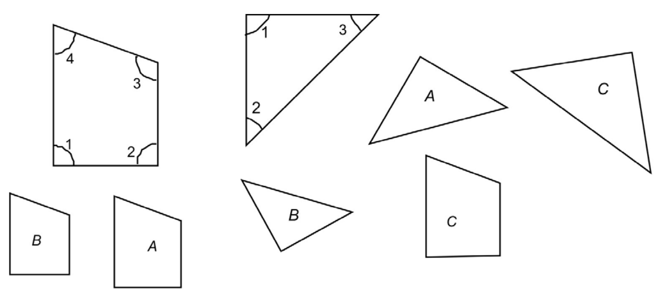
A história da Matemática e os logaritmos
Os conceitos exponenciais e logarítmicos estão matematicamente relacionados entre si, pois as funções logarítmicas são definidas como inversas das exponenciais. O entendimento desses conceitos é essencial para a compreensão e análise de inúmeras ideias científicas, na medida em que várias leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos estão estreitamente ligados à ideia de logaritmo.
Quem inventou os logaritmos? Para que eles servem? Onde são aplicados? Por que surgiram?
É na história da Matemática, uma das ferramentas para trazer luz à natureza própria dessa ciência, que se buscam as respostas para essas três perguntas.
No final do século XVI, o avanço nos campos da astronomia, das navegações, do comércio, da economia, da engenharia e da guerra trouxe consigo a necessidade de um método eficiente e rápido para efetuar multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes.
John Napier, barão escocês, teólogo e matemático e Jobst Bürgi, matemático suíço e fabricante de instrumentos para a astronomia, desenvolveram os logaritmos que permitiram simplificar as longas operações principalmente de multiplicar e dividir grandes números, o que era exigido na época.
Acredita-se que eles se inspiraram nos trabalhos do matemático alemão Michael Atefel (1544). Em seu livro Arithmetica Integra, comparando as sequências:
<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>...</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td><td>128</td><td>256</td><td>512</td><td>1024</td><td>...</td></tr>
</table>
Ele mostrou que, para calcular 16 x 64, bastava somar os números correspondentes a 16 e a 64 na linha de cima (4 + 6 = 10), e o resultado da multiplicação era o número correspondente a 10 na linha de baixo, 1.024. Logo 16 x 64 = 1.024.
De maneira análoga, foram propostas divisões, potenciações e radiciações.
Para multiplicar ou dividir os números que estivessem na sequência de baixo, os problemas estavam resolvidos.
Para os números que não estivessem na sequência de baixo, Napier e Bürgi perceberam que, se trocassem as potências de base 2 por potências de um número muito próximo de 1, os valores da lista de baixo estariam bem próximos de qualquer número procurado. Assim, nasceram os logaritmos e as conhecidas tábuas de logaritmos. Dessa forma, para calcular o produto de dois números, bastava procurar seus logaritmos nas tábuas, somá-los e voltar a consultar a tábua</td></tr>
</table>

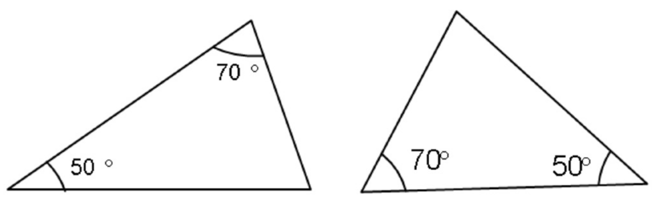
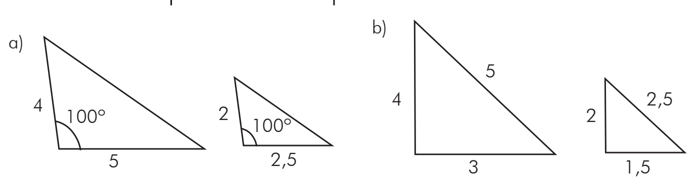
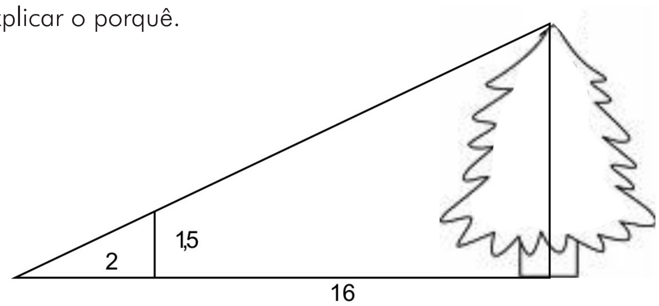
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 223 24/8/2009 15:53:43

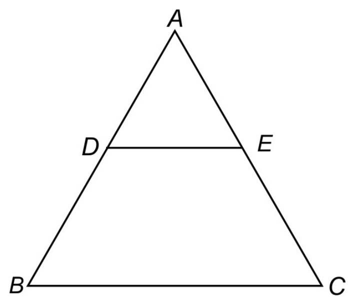
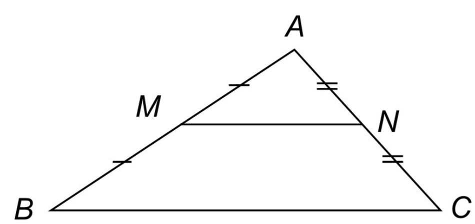
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		para encontrar o resultado da multiplicação. Napier usou como base de suas potências $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ e Bürgi, $1 + 10^{4} = 1{,}0001$. A palavra logaritmo tem sua origem nas formas gregas *logos*, que significa razão ou relação, e *arithmos*, que quer dizer número. Tudo indica que foi introduzida por Napier, quando, em 1614, publicou suas tábuas de logaritmos. O conceito de função logarítma estava presente em toda a sua obra. O uso das calculadoras como facilitadoras de cálculos permitiu o abandono das tábuas de logaritmos, tornando-os ainda mais úteis pela facilidade de cálculos apresentada por esses instrumentos. A discussão do texto, além de ter como objetivo a compreensão da importância do estudo dos logaritmos, proporciona o entendimento da Matemática como um produto cultural da humanidade e valoriza os matemáticos e suas criações.
Reconhecer padrões em sequências figurais e numéricas. Identificar regularidades, estabelecer relações e fazer generalizações. Reconhecer uma sequência numérica como uma Progressão Aritmética. Reconhecer a razão de uma Progressão Aritmética e generalizar seu Termo Geral. Identificar uma Progressão Aritmética como uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, reconhecendo o Domínio como um conjunto discreto e a sua Imagem no Conjunto dos Números Reais.	Progressão Aritmética Sequências figurais e numéricas Regularidades e padrões Razão de uma Progressão Aritmética Termo geral de uma Progressão Aritmética Estudo da Progressão Aritmética como uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$	**Progressões Aritméticas** O estudo das Progressões Aritméticas está proposto de forma bastante detalhada na Atividade 2 do Caderno do Aluno de 1° ano, sendo precedido por um trabalho de sequências e padrões proposto na Atividade 1 do mesmo Caderno. A partir de tais atividades, os alunos tiveram a oportunidade de, relacionando questões da arte, do dia a dia, das ciências, da história da Matemática, desenvolver e, por regra de recorrência, generalizar os conceitos que estruturam o pensamento matemático, chegando às fórmulas que facilitam os cálculos e modelam os fenômenos das Ciências. Também, no Caderno do Aluno de 1° ano, na Atividade 3, os alunos a partir de diferentes representações (analítica e gráfica) têm a oportunidade de conhecer a Progressão Aritmética como uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer uma sequência numérica como Progressão Geométrica. Reconhecer a razão de uma Progressão Geométrica e generalizar o seu Termo Geral. Identificar uma Progressão Geométrica como uma função de N em R, reconhecendo o seu Domínio como um conjunto discreto e a sua Imagem no Conjunto dos Números Reais.	Progressões geométricas Sequências com padrão multiplicativo Razão da Progressão Geométrica Termo geral da Progressão Geométrica Progressões Geométricas como função de N em R. Progressões Geométricas crescentes e decrescentes	**Progressões Geométricas** O estudo das Progressões Geométricas, proposto de forma análoga ao das Progressões Aritméticas, também deve estar relacionado ao estudo das sequências e padrões e entendido como uma função de N em R. Sugere-se que, entre várias sequências numéricas, os alunos sejam orientados a selecionar as que têm padrão multiplicativo, aquelas em que o 2º termo é conseguido multiplicando o 1º pela razão e, assim, sucessivamente, com o 3º a partir do 2º. Nomear tais sequências de progressões geométricas, bem como seus termos, compreendendo o significado da razão: (q) o quociente de cada termo pelo seu precedente. Explorar a regularidade de tais sequências e, com o auxílio de quadros e tabelas e de processos recursivos, construir a fórmula do termo geral. Reconhecer a progressão geométrica como uma função de Naturais em Reais e a fórmula do termo geral, a expressão analítica da lei da função, representando tais funções em diferentes tipos de gráficos. Explorar progressões geométricas traçando gráficos de funções em que a razão é maior que 1 ($q > 1$) ou maior que zero e menor que 1 ($0 < q < 1$) de modo que os alunos, observando e analisando os gráficos, possam entender que a Progressão Geométrica é uma função de N em R, e que, se a razão for maior que 1, a progressão é crescente e, se a razão for maior que zero e menor que 1, a progressão é decrescente.
Reconhecer ampliações e reduções de figuras quaisquer. Organizar informações coletadas de variadas fontes de consulta.	Ampliação e redução de figuras Razões e proporções	**Homotetia** Selecionar de revistas, livros didáticos ou paradidáticos, gravuras, mapas ou fotos em que fiquem evidentes ampliações ou reduções. Recordar as questões de semelhança de figuras. Solicitar que os alunos que tiverem fotos ampliadas ou reduzidas as tragam. Neste momento, é importante verificar os conhecimentos prévios dos alunos para dar continuidade ao trabalho.     Os alunos poderão ser incentivados a fazer um cartaz ou um álbum com diferentes homotetias, desenhadas a partir

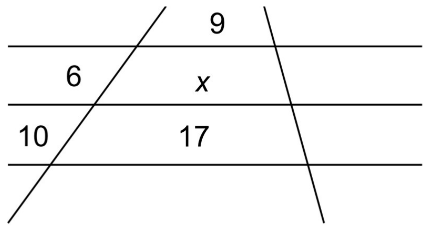
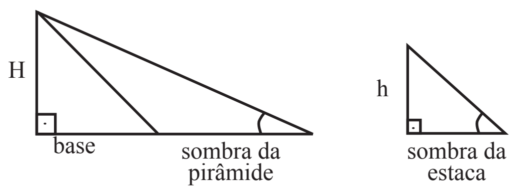
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		de pontos externos ou internos, ou elaboradas a partir de quadriculados. Devem observá-las e comentá-las, fazendo observações. Após expor e discutir o trabalho dos alunos, solicitar que, numa folha de ofício, com o auxílio de uma régua, eles desenhem o quadrilátero (irregular) ABCD. Aproveitar para comentar as características e propriedades dos quadriláteros. Para ampliar (ou reduzir) o polígono ABCD, fixamos um ponto O qualquer exterior a figura e, a partir dele, traçam-se semirretas que passam pelos vértices do polígono. A redução do polígono A'B'C'D' ou ampliação A"B"C"D" é obtida traçando-se segmentos paralelos aos lados do polígono ABCD compreendidos entre as semirretas.
Relacionar conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos na ampliação ou redução de polígonos.	Construções geométricas	 Medir os segmentos abaixo relacionados e completar as proporções.
	Retas, segmento de reta e semirreta	$\frac{OA'}{OA} = \underline{\quad}$ $\frac{OB'}{OB} = \underline{\quad}$ $\frac{OC'}{OC} = \underline{\quad}$ $\frac{OD'}{OD} = \underline{\quad}$ $\frac{OA''}{OA} = \underline{\quad}$ $\frac{OB''}{OB} = \underline{\quad}$ $\frac{OC''}{OC} = \underline{\quad}$ $\frac{OD''}{OD} = \underline{\quad}$
Definir homotetia e os termos matemáticos relacionadas a esse conceito.	Homotetia, razão da homotetia e razão de proporcionalidade	Propor aos alunos que verbalizem suas conclusões a partir da pergunta: O que você observa em relação às distâncias em cada ampliação ou redução? Informar aos alunos que a transformação que associa os polígonos A'B'C'D' e A"B"C"D" ao polígono ABCD é chamada homotetia. A correspondência que associa os pontos:
Ampliar ou reduzir figuras geométricas, utilizando um ponto O exterior à figura.		$A \rightarrow A`$ $B \rightarrow B`$ $C \rightarrow C`$ $D \rightarrow D`$
	Ampliação ou redução de figuras	de tal modo que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots k$ e os pontos O, A e A' estejam alinhados; O, B e B', etc., estejam alinhados, chama-se homotetia de razão k e centro O. Associar com razão de proporcionalidade na ampliação ou redução de figuras que

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		contam no currículo de 7ª série. Se $0 < k < 1$, obtém-se uma redução, e se $k > 1$, uma ampliação. Observação: Se um polígono é obtido de outro, através de uma homotetia de razão k, os lados correspondentes são paralelos e, portanto, os ângulos correspondentes têm a mesma medida. As medidas dos lados correspondentes são proporcionais, de razão k. Isto é, as homotetias preservam a forma da figura, mas as medidas dos lados são ampliados ou reduzidos, na razão k. Trabalhar com as situações-problema que envolvem o conceito de homotetia é trabalhar com semelhança e razão de semelhança, o que fundamenta vários conceitos matemáticos e possibilita o estabelecimento de conexões entre eles. Exemplos de situações-problema que exploram homotetia e o conceito de semelhança de figuras planas:
	Semelhança de figuras planas – razão de semelhança	Exemplo 1: Desenhar numa folha dois retângulos homotéticos de dimensões 2 cm e 3,5 cm, 4 cm e 7 cm, de modo que: a) O centro de homotetia fique fora dos retângulos. b) O centro de homotetia fique no centro dos retângulos. - Trace as diagonais dos dois retângulos. O que você observa? - Isso vale para qualquer par de retângulos? Explique por que. c) Um dos vértices coincida com o seu correspondente. - Neste caso, qual é o centro de homotetia? Exemplo 2: Os alunos recebem uma folha de papel com os seguintes desenhos:
Identificar homotetias e reconhecer a sua razão.	Razão de semelhança	
Reconhecer figuras semelhantes e identificar a razão de semelhança.	Semelhança de figuras planas	
Reconhecer quadriláteros semelhantes.	Construções geométricas Semelhança de quadriláteros	Recortar os quadriláteros da folha e compará-los. a) verificar quais dos quadriláteros A, B ou C são semelhantes ao quadrilátero maior.
Reconhecer triângulos semelhantes.	Semelhança de triângulos	b) estabelecer a relação entre os lados de cada quadrilátero A, B e C com os do quadrilátero maior. c) Fazer o mesmo para os ângulos. d) Definir quadriláteros semelhantes.
	Semelhança de polígonos	Exemplo 3: Recortar os triângulos da folha e compará-los. a) verificar quais dos triângulos A, B ou C são semelhantes ao triângulo maior.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer, definir polígonos semelhantes. Observar, relacionar, concluir e construir argumentos. Resolver situações-problema, envolvendo conceitos relacionados à semelhança de triângulos. Expressar relações a partir de construções geométricas.	Vocabulário e linguagem matemática	b) estabelecer a relação entre os lados de cada triângulo A, B e C com os do triângulo maior. c) fazer o mesmo para os ângulos. d) podem haver dois triângulos não semelhantes cujos lados sejam proporcionais? e) e com ângulos iguais? f) defina triângulos semelhantes. Analisando e discutindo as situações-problema apresentadas nos exemplos 1, 2 e 3, os alunos poderão expressar que dois triângulos são semelhantes quando têm: os ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais, e que basta uma das duas exigências para que dois triângulos sejam semelhantes. Outros exemplos podem ser explorados e, então, pode-se definir pollígonos semelhantes Exemplo 4: Os dois triângulos abaixo são semelhantes. Explicar o porquê.  Exemplo 5: Verificar se os pares de triângulos são semelhantes e justificar as respostas.  Exemplo 6: Para medir a altura de um pinheiro, Pedro comparou sua sombra com a de um bastão de 1,5 m de altura. No momento em que a sombra do bastão media 2 m, ele verificou que o pinheiro projetava uma sombra de 16 m. Pedro concluiu, então, que a altura do pinheiro era de 12 m. Explicar o porquê.  Exemplo 7: Na figura abaixo, verificamos que se BC// DE, os triângulos ABC e ADE são semelhantes, pois estão relacionados por uma homotetia de centro A. Sendo BC//DE, determine:

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer e utilizar adequadamente termos e simbologias matemáticas.		a) a razão de semelhança entre os triângulos; b) a medida de x;  Explore com os alunos a relação desta situação-problema, encoraje-os a relacionar as situações-problema propostas nos exemplos 4, 5, 6 e 7. Incentive os alunos a sobreporem os triângulos, fazendo-os coincidir em seus ângulos, verificando o que acontece quando se sobrepõem triângulos, fazendo coincidir os ângulos iguais. A partir dessa sequência de situações-problema, seguida de uma discussão sobre o tema, os alunos poderão concluir que: toda paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro. É interessante pedir aos alunos que escrevam o que estudaram a partir do estudo das homotetias. Depois, propor aos alunos que resolvam problemas como os que seguem. Exemplo 8: Na figura abaixo, M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC. ΔAMN é semelhante ΔABC Além disso, MN//BC e MN = BC Justifique estas afirmações.  Se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então: 1. Ele é paralelo ao terceiro lado; 2. Ele mede a metade do terceiro lado.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 229 24/8/2009 15:53:44

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		Desafio: No feixe de paralelas abaixo, determine o valor de x:  Esta é uma aplicação do famoso Teorema de Tales. Aqui pode-se trabalhar um pouco de história da Matemática explorando quem foi Tales.
Calcular distâncias inacessíveis, usando as razões trigonométricas. Compreender a Matemática como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social. Estabelecer conexão entre diferentes linguagens e conceitos geométricos e algébrico.	Distâncias inacessíveis	Ler o texto com seus alunos e discutir com eles como Tales calculou distâncias inacessíveis e como isso evoluiu. **Determinando distâncias inacessíveis** Em algumas profissões, as pessoas precisam, frequentemente, determinar distâncias inacessíveis. O capitão de um navio, situado nas proximidades do litoral, precisa saber a que distância se encontra da costa. Um topógrafo, situado na praia, precisa saber a distância entre duas ilhas ou precisa fornecer ao cartógrafo a altura de um morro. Um engenheiro precisa construir uma ponte e precisa saber a largura do rio. Os astrônomos precisavam, no passado, determinar a distância da Terra à Lua. Estas questões começaram a ser resolvidas por Tales, que se ofereceu para determinar a altura de uma pirâmide sem escalar o monumento. Observando a posição do Sol, ele cravou sua bengala no chão, alinhada com a pirâmide e mediu as sombras das duas. Valendo-se da semelhança de triângulos que, no caso são triângulos retângulos, Tales obteve a altura desejada. Assim, a partir de triângulos semelhantes, relacionando as medidas dos lados e dos ângulos, tornou-se possível calcular distâncias inacessíveis e desenvolver a Trigonometria.  Com aparelhos de medir ângulos como os teodolitos, consegue-se medir ângulos com muita precisão, o que possibilita o cálculo de distâncias inacessíveis. Antes de iniciar o estudo das razões trigonométricas, é preciso que o professor explore os conhecimentos prévios dos alunos a respeito de ângulos e triângulos, em especial o triângulo retângulo, certificando-se de que os alunos dominam

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 230 24/8/2009 15:53:44

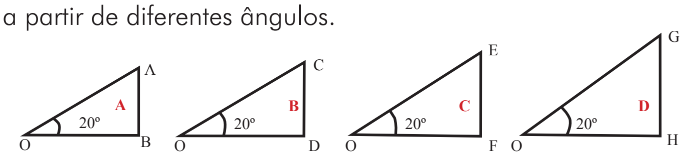
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		nomenclaturas e conceitos referentes a catetos, hipotenusa, cateto oposto e adjacente, ângulos reto e agudos, soma dos ângulos internos de um triângulo. É importante que, a partir da relação de Pitágoras, eles verifiquem se um triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo. Nos cadernos do aluno de 5ªe 6ª séries e 7ª e 8ª séries, há sugestões de atividades com o Tangran que são importantes para a construção de tais conceitos e do vocabulário geométrico. Tais atividades, além de trazerem para a sala de aula aspectos lúdicos que tornam o trabalho leve e agradável, proporcionam o desenvolvimento de habilidades motoras e do pensamento espacial, bem como o gosto pela Matemática.
Desenvolver o conceito de razões trigonométricas. Aplicar as razões trigonométricas na resolução de situações-problema.	Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Semelhança de triângulos	(see below)

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Trabalho em duplas

Propor aos alunos que, com o auxílio do transferidor, desenhem 4 triângulos retângulos semelhantes construídos a partir de ângulos de 20°, 30° ou 45°, nomeando-os de A, B, C e D.

Observação: Incentivar que as duplas realizem a atividade a partir de diferentes ângulos.



Solicitar que, com uma régua, os alunos meçam os lados dos triângulos com a maior precisão e completem o quadro abaixo, utilizando a calculadora para efetuar as divisões indicadas.

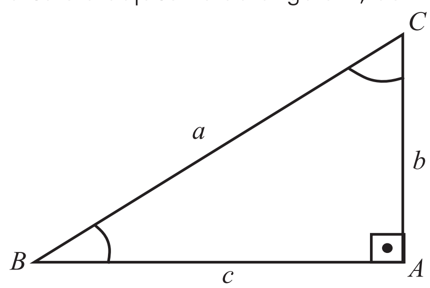
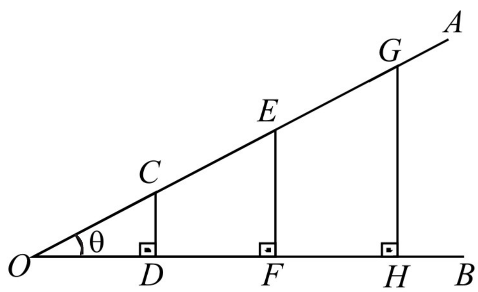
Triângulos	Triângulos σ	Medida do cateto oposto (CO)	Medida do cateto adjacente (CO)	Medida de hipotenusa (h)	$\frac{CO}{h}$	$\frac{CA}{h}$	$\frac{CO}{CA}$
Δ *AOB*							
Δ *COD*							
Δ EOF							
Δ GOH							

Observação: Para determinar as medidas com maior precisão, seria interessante que, para cada uma, os alunos fizessem três medições e calculassem a média aritmética das três medidas.

Solicitar a cada dupla de alunos que observem o quadro elaborado e escrevam suas conclusões.

Concluindo a tarefa acima, sugere-se que o professor faça, no quadro de giz, um grande quadro que relacione as três razões para diferentes ângulos.

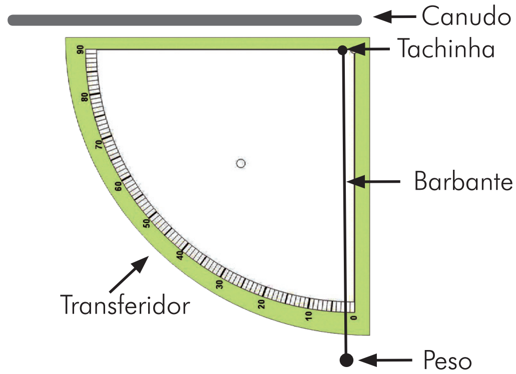
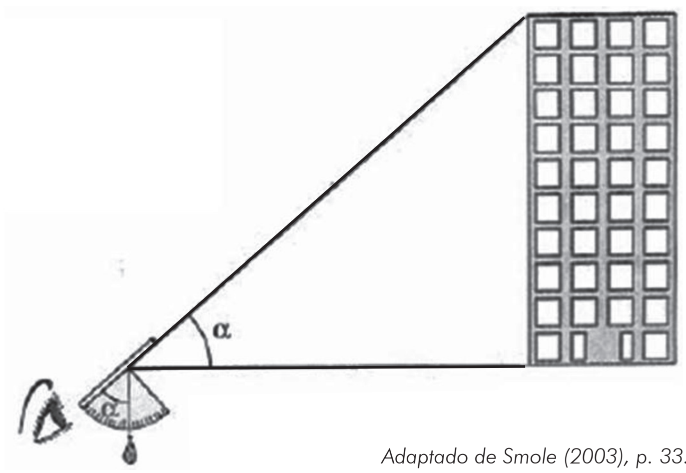
Esse é o momento de nomear as razões (relações trigonométricas entre os lados do triângulo retângulo), enfatizar que são constantes que se referem a medidas específicas de ângulos, mostrar o quadro das razões calculadas, e relacionar este estudo com o significado da palavra trigonometria (uma palavra de origem grega – *trigono* quer dizer triângulo – *metrûm* quer dizer medida).

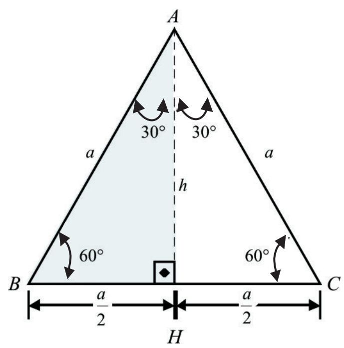
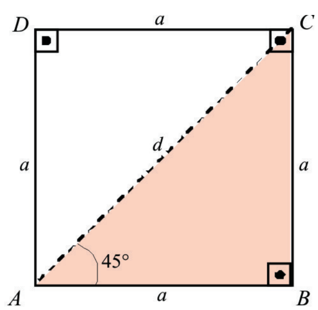
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Construir figura geométrica para retirar relações envolvendo proporcionalidade entre triângulos semelhantes. Identificar figuras semelhantes. Reconhecer as razões trigonométricas como constantes que se relacionam com a medida de um ângulo agudo do triângulo retângulo.	As razões trigonométricas no triângulo retângulo.	**Sistematizando as razões trigonométricas** Tomando um ângulo com uma determinada medida, a partir de pontos marcados em um de seus lados, traçando retas perpendiculares em relação ao outro lado, construindo triângulos retângulos semelhantes (que têm ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais), determinam-se relações (razões) entre os lados, definindo as razões (constantes) que permitem calcular as distâncias inacessíveis. Tais razões são definidas como seno, cosseno e tangente do referido ângulo. Inicialmente, retomar com os alunos, a partir do triângulo ABC, retângulo em A, que: - ***a*** é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto); - ***b*** e ***c*** são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto); - $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ são ângulos agudos; - $\overline{\mathbf{AB}}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{\mathbf{C}}$, de medida c; - $\overline{\mathbf{AC}}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{\mathbf{C}}$ de medida b; - $\overline{\mathbf{AC}}$ é o cateto oposto ao ângulo de medida b; - $\overline{\mathbf{AB}}$ é o cateto adjacente ao ângulo , de medida c.  A seguir, propor a seguinte atividade: Traçar a partir do ponto O, duas semirretas, formando um ângulo de medida θ, com $0, < \theta < 90°$, isto é, um ângulo agudo. Na semirreta $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ (lado do ângulo), marcar os pontos **CEG** e, a partir deles, em direção a $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$, traçar as suas projeções ortogonais determinando os triângulos **COD**, **EOF**, **GOH** que são retângulos, respectivamente em $\hat{D}$, $\hat{F}$ e $\hat{H}$, obtendo o seguinte desenho:  Então, questionar os alunos: O que se pode afirmar a respeito dos triângulos **OCD, OEF, OGH**? Solicitar que justifiquem as respostas. Considerando com os alunos, a partir de suas respostas,

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 232 24/8/2009 15:53:45

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Relacionar constante de proporcionalidade nos triângulos retângulos semelhantes com a medida dos ângulos agudos desses triângulos.		que os triângulos construídos são semelhantes, solicitar que eles escrevam as seguintes proporções: a) entre os catetos opostos e as hipotenusas: $\frac{CD}{OC}=\frac{EF}{OE}=\frac{GH}{OG}=\ldots$(constante) b) entre os catetos adjacentes a as hipotenusas: $\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OE}=\frac{OH}{OG}=\ldots$(constante) c) entre os catetos opostos e os adjacentes: $\frac{CD}{OD}=\frac{EF}{OF}=\frac{GH}{OH}=\ldots$(constante)
Utilizar razões trigonométricas para resolver situações-problema.	Razões trigonométricas	Ao analisar as proporções definidas pelos alunos, observar que são constantes, que se referem ao ângulo de medida θ e que dependem da sua medida. Ao final, concluir para os alunos que: Essa relação depende apenas da $\hat{B}$ medida θ do ângulo AOB (e não do tamanho do triângulo $\hat{B}$ retângulo do qual θ é um dos ângulos agudos) e é chamada de seno de θ, cosseno de θ ou tangente de θ, conforme os lados que forem relacionados. Assim, escreve-se: $\text{sen}\ \theta=\frac{CD}{OC}=\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo }\theta}{\text{medida da hipotenusa}}\quad (0^\circ<\theta<90^\circ)$ $\cos\ \theta=\frac{OD}{OC}=\frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo }\theta}{\text{medida da hipotenusa}}\quad (0^\circ<\theta<90^\circ)$ $tg\ \theta=\frac{CD}{OD}=\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo }\theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo }\theta}\quad (0^\circ<\theta<90^\circ)$ $sen\,\theta=\frac{CD}{OC},\ \cos\theta=\frac{OD}{OC}\ e\ tg\,\theta=\frac{C}{O}$ As razões são chamadas razões trigonométricas. Esclarecer para os alunos que esta atividade teve o objetivo de generalizar os conceitos de seno, cosseno e tangente para qualquer ângulo agudo. Que os matemáticos, a partir de ângulos agudos de triângulos retângulos, relacionaram as medidas de seus lados e elaboraram uma tabela de razões trigonométricas para ângulos agudos. Fornecer uma tabela para os alunos e propor que encontrem senos, cossenos e tangentes de diferentes ângulos agudos. Para enriquecer este estudo, o professor pode com seus alunos construir um teodolito e solicitar que meçam ângulos sob os quais eles avistam antenas de TV, chaminés de fábricas, prédios, etc.
	Construção de material	**Construção do teodolito** Material: Xerox de $\frac{1}{4}$ de um transferidor, um canudo ou uma caneta esferográfica sem a carga, uma tachinha, um

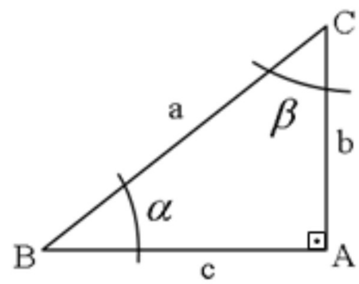
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 233 24/8/2009 15:53:45

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Construir instrumento para medir ângulo e determinar alturas ou distâncias desconhecidas.		pedaço de barbante, um peso, um pedaço de papelão, cola e fita durex. Recortar o xerox do transferidor e colar no papelão. Com a fita durex, fixar o canudo em uma das extremidades do transferidor e, com a tachinha, no vértice do ângulo reto, fixar o cordão com o peso colocado em uma de suas pontas.  Teodolito **Medindo distâncias inacessíveis** Para medir o ângulo (α), usando o teodolito construído, mirar o objeto a ser medido de tal forma que, ao inclinar o teodolito, o barbante com o peso indique o ângulo formado entre a horizontal (direção em que se encontra o observador) e a direção do observador ao ponto de mira, conforme a figura abaixo.  *Adaptado de Smole (2003), p. 33.* Sabendo o valor desse ângulo, os alunos devem, também, medir a distância do observador ao objeto a ser medido e fazer um esquema da situação. A partir da definição de seno, cosseno e tangente e de uma tabela das razões trigonométricas, calculadas para ângulos agudos, encontrar a medida dos objetos que se quer medir. É importante, para finalizar, propor diferentes exercícios de aplicação das razões trigonométricas.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Aplicar conhecimentos já costruídos para expressar fórmulas e fazer deduções e generalizações. Deduzir a fórmula da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero. Identificar a diagonal do quadrado e o lado do triângulo equilátero como números irracionais, localizando-os na reta real.	Seno, cosseno e tangente de ângulos de 30°, 60° e 45°	**Cálculo de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos especiais (30°, 60° e 45°)** No estudo da Trigonometria, há alguns ângulos agudos que são frequentemente utilizados: como os de 30°, 45° e 60°. Conhecidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo, as características e as propriedades dos quadrados e dos triângulos e sua classificações e a relação de Pitágoras, é possível calcular o seno, o cosseno e a tangente de tais ângulos. Comentar com os alunos as propriedades e características de um triângulo equilátero e de um quadrado, retomando esses conceitos. Propor aos alunos a atividade a seguir a partir das figuras abaixo. Solicitar que, a cada etapa do trabalho, observem as figuras desenhadas, utilizando seus elementos. Tarefa 1: Considerar o triângulo equilátero ABC, com o lados congruentes de medida a:  a) Usando a relação de Pitágoras, determinar no triângulo AHB, retângulo em H, a altura (h) em função do lado BC. b) Ainda considerando o triângulo AHB, e as relações trigonométricas no triângulo retângulo, calcular o sen30°, cos30°, tg30°, sen60°, cos60° e tg60°. Tarefa 2: Considerar o quadrado ABCD, cujo lado tem medida a. Considerar o triângulo ABC retângulo em B, cuja hipotenusa AC é a diagonal do quadrado e tem medida d.  a) Usando a relação de Pitágoras, determinar no quadrado ABCD, a diagonal (***d***) em função do lado ***a***. b) Ainda, considerando o quadrado ABCD e as relações

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Aplicar os teoremas de Tales e de Pitágoras para generalizar fórmulas.		trigonométricas no triângulo retângulo, calcular o sen45°, cos45° e a tg45°. Terminada a atividade, o professor deverá fazer a correção das duas tarefas propostas, discutindo-as passo a passo com os alunos. É recomendável que, à medida que os alunos forem demonstrando e justificando suas soluções, o professor os auxilie, relacionando os conceitos e procedimentos aritméticos, algébricos e geométricos envolvidos, bem como a sequência lógica de raciocínio dedutivo. Na tarefa 1, para o cálculo de h, partindo da relação de Pitágoras $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Considerando o triângulo ΔAHB, retângulo em H. Assim temos, $sen\,30° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ $\quad sen\,60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ $tg\,30° = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tg\,60° = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$ Cálculo de d: considerando o triângulo ACB, retângulo em B, partindo da Relação de Pitágoras, tem-se que $d = a\sqrt{2}$. Considerando que a diagonal do quadrado ABCD divide o ângulo A em dois ângulos de 45° e considerando, ainda, o triângulo ABC, tem-se: $sen\,45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg\,45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$ *Adaptado de Smole (2003), p. 276.*
Reconhecer a secante, a cossecante e a cotangente como funções inversas do cosseno, do		**Cossecante, secante e cotangente** Definir as seis razões trigonométricas a partir da observação e análise do triângulo retângulo pode ser fator de desenvolvimento da competência matemática e da mobilidade de pensamento necessárias para se fazerem conexões entre os diferentes conceitos matemáticos. Considerando que toda razão tem uma inversa e, observando um triângulo retângulo, o professor pode discutir

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 236 24/8/2009 15:53:47

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>seno e da tangente, respectivamente.</td><td></td><td>com seus alunos e determinar as razões inversas como na situação proposta a seguir:
Desenhar um triângulo retângulo, nomeando seus vértices de ABC, seus ângulos agudos de α e β , as medidas de seus lados de a, b e c, e completar as questões a seguir:
</td></tr>
<tr><td></td><td>Secante, cossecante e cotangente</td><td>a) Considerar o ângulo α e determinar as razões seno, cosseno e tangente a ele relacionadas;
b) As razões solicitadas são definidas pelas frações;
c) Determinar as inversas das frações acima explicitadas.</td></tr>
<tr><td>Utilizar o conceito de fração inversa para definir a secante, a cossecante e a cotangente de um ângulo agudo.</td><td></td><td>Na correção coletiva da tarefa, observar com os alunos as frações inversas e nomeá-las corretamente:
$sen\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$; sua inversa $\frac{a}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$
nomeada cossecante de α (cossec α)
$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$; sua inversa $\frac{a}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$
nomeada secante de α (sec α)
$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$; sua inversa $\frac{a}{b} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$
nomeada cotangente de α (cotg α)</td></tr>
<tr><td>Comparar dados dispostos em tabelas, a fim de enunciar propriedades.</td><td>Cossecante, secante e cotangente de um ângulo agudo.</td><td>A seguir, solicitar aos alunos que, considerando as medidas a, b, c da hipotenusa e dos catetos do triângulo retângulo ABC, completem o quadro abaixo:
<table><tr><td>Sem α =</td><td>Sem β =</td></tr><tr><td>Cos α =</td><td>Cos β =</td></tr><tr><td>Tg α =</td><td>tg β =</td></tr><tr><td>Sec α =</td><td>Sec β =</td></tr><tr><td>Cossec α =</td><td>Cossec β =</td></tr><tr><td>Cotg α =</td><td>Cotg β =</td></tr></table></td></tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 237 24/8/2009 15:53:48

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer e determinar as funções trigonométricas de ângulos complementares.	Ângulos complementares Funções trigonométricas de ângulos complementares	Observando o quadro anterior, relacionando as razões trigonométricas dos ângulos agudos de medida α e β , o que se pode afirmar? Sabendo que α e β são as medidas dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, os alunos poderão afirmar que α e β são ângulos complementares pois $\alpha + \beta = 90°$. Logo, $\alpha =$____ - β e que $\beta =$ ____ -α . Assim, $sen(90° - \alpha) =$ $\quad$ $\sec(90° - \alpha) =$ $\cos(90° - \alpha) =$ $\quad$ $cossec(90° - \alpha) =$ $tg(90° - \alpha) =$ $\quad$ $\cot g(90° - \alpha) =$ Ao corrigir coletivamente a tarefa, entendendo que α e β são complementares, que $\alpha = 90° - \beta$ e que $\beta = 90° - \alpha$, tem-se que: $\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = sen\,\alpha$ $sen\,\beta = sen(90° - \alpha) = \cos\alpha$ $tg\,\beta = tg(90° - \alpha) = cotg\,\alpha$ $\sec\beta = \sec(90° - \alpha) = cossec\,\alpha$ $cossec\,\beta = cossec(90° - \alpha) = \sec\alpha$ $cotg\,\beta = cotg(90° - \alpha) = tg\,\alpha$ Assim, definir que: O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar, e vice-versa, definindo as demais razões de arcos complementares.
Reconhecer a utilização do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas. Resolver problemas de contagem, utilizando diagramas, esquemas de árvore ou outras representações.	Princípio Fundamental da Contagem ou princípio multiplicativo Representação dos problemas de contagem: diagramas de árvore, quadros de dupla entrada, representação por desenhos.	Selecionar problemas relacionados com a realidade do aluno, cuja resolução implique o uso do Princípio Fundamental da Contagem (princípio multiplicativo). São problemas que referem ações constituídas pelo menos de duas etapas sucessivas e independentes: a 1ª etapa pode ser realizada de m maneiras diferentes e a segunda de n maneiras diferentes. Desta forma, a ação tem um número $m \times n$ de possibilidades de se completar. O princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais duas etapas sucessivas. Organizar os problemas em fichas, duas ou três fichas de cada problema, e solicitar que os alunos, em duplas, escolham problemas para resolvê-los. Haverá duplas que ganharão o mesmo problema. Comentar que eles podem usar diagramas de árvore ou desenhos para ajudá-los na resolução dos problemas. Organizar uma discussão no grande grupo, verificar, por exemplo, as diferentes soluções que as duplas que resolveram o mesmo problema acharam. Realizar várias discussões sobre os diferentes tipos de problemas, de tal forma que os alunos generalizem o Princípio Fundamental da Contagem. Um exemplo: Há quatro entradas ligando as cidades A e B e três ligando B e C. De quantas maneiras se pode ir da cidade A até a cidade C, passando por B?

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 238 24/8/2009 15:53:48

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>
Reconhecer e quantificar as ações independentes que permitem a utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

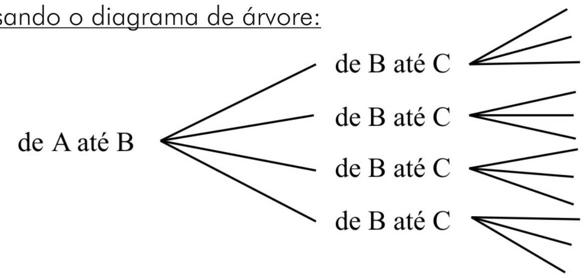
Generalizar a expressão matemática que permite calcular o número de possibilidade das ações finalizadas para dois ou mais eventos.

Identificar e utilizar a melhor representação para resolver os problemas propostos.

Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem coloquial e a linguagem matemática.

Identificar em situações-problema as informações adequadas e as estratégias de resolução.

Identificar regularidades e formular generalizações.

Argumentar, trocar ideias.
</td>
<td>
- Árvore de possibilidades
- Quadros de dupla entrada
</td>
<td>
<u>Usando o diagrama de árvore:</u>


São 12 os caminhos possíveis, isto é, para cada uma das 4 estradas de A até B têm 3 estradas possíveis de B até C, o que determina os 12 (4x3) caminhos.

<u>Usando uma forma simplificada:</u>
$\underbrace{4}$ quantidade de formas de ir de A até B $\underbrace{3}$ quantidade de formas de ir de B até C

Logo, 4x3=12 formas de ir de A até C, passando por B.

Os esquemas de árvore ou a forma simplificada prestam-se para representar ações com duas ou mais etapas. Nesse problema, há duas etapas: a 1ª, formas de ir de A até B que pode ser realizada de 4 maneiras diferentes e a 2ª, formas de ir de B até C, que pode ser realizada de 3 maneiras diferentes.

<u>Usando quadros de dupla entrada:</u>
Para resolver o mesmo problema, pode-se usar os quadros de dupla entrada.
<table>
<tr><th>De B até C / De A até B</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>2</td><td>1,1</td><td>1,2</td><td>1,3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2,1</td><td>2,2</td><td>2,3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3,1</td><td>3,2</td><td>3,3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4,1</td><td>4,2</td><td>4,3</td></tr>
</table>
O quadro deve mostrar que, utilizando o caminho 1 de A até B, haverá três possibilidades seguir de B até C pelo 1 (1,1), pelo 2 (1,2) ou pelo 3 (1,3) e, assim, sucessivamente, até o (3,3), percebendo que são 4x3, 12 caminhos diferentes.
Os quadros de dupla entrada prestam-se para representar problemas que têm somente duas etapas.

<u>Outra representação:</u>
Um aluno poderá representar com o desenho a seguir, contando os caminhos percorridos, acompanhando com o lápis, de tal forma que para cada um dos quatro caminhos possíveis de A até B, há três caminhos possíveis de B até C,
</td>
</tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 239 24/8/2009 15:53:48

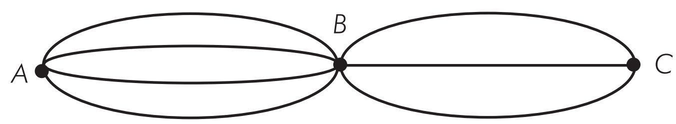
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Identificar e utilizar diferentes representações na resolução de problemas envolvendo o Princípo Fundamental da Contagem.		perfazendo 4 x 3 = 12 caminhos.  Solicitar aos alunos que inventem ou pesquisem em livros didáticos problemas que sejam resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem ou que tenham que ser resolvidos por uma determinada representação. Se os alunos já trabalharam com problemas que são resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem, o professor pode revisá-lo com alguns problemas e discussões no grande grupo. Caso contrário, deve trabalhar os problemas de contagem de forma mais detalhada.
Vivenciar experiências com situações que envolvem o significado do aleatório e de probabilidades. Ler, interpretar e comparar dados dispostos em tabelas.	Probabilidade	Um dos objetivos da probabilidade é estudar as incertezas dos acontecimentos. A probabilidade é uma medida do acaso. Antes de lidar com a teoria das probabilidades, os alunos precisam entender o significado do aleatório e vivenciar algumas experiências que tenham como objetivo quantificar o conceito de probabilidade. A seguir, são descritos dois jogos escolhidos entre vários que podem ser feitos e que poderão proporcionar tais experiências: **Jogo 1:** Propor que os alunos, em duplas, lancem dois dados de cores diferentes, por exemplo, um dado preto e um branco, dez vezes. Cada vez que a soma das faces dos dados for sete, a dupla ganha um ponto, cada vez que a soma for diferente de sete, a dupla perde um ponto. Repetir o jogo cinco vezes, registrar cada lançamento nas colunas da primeira cópia da tabela 1 abaixo e verificar o que acontece. Depois dos cinco jogos, propor que as duplas façam outros cinco com dez lançamentos cada um, registrando-os nas colunas da 2ª cópia da tabela 1, com as seguintes regras: cada vez que a soma das faces dos dados for sete, eles ganham três pontos, cada vez que a soma das faces dos dados for diferente de sete eles perdem um ponto. Solicitar que as duplas comparem os resultados dos cinco primeiros lançamentos com os resultados dos cinco últimos. Solicitar que eles se posicionem a respeito de qual a regra mais justa e justifiquem a resposta.

Tabela 1

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
TOTAL					
G/P					

	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
TOTAL					
G/P					

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem

Propor que os alunos completem a tabela 2, a seguir, com pares ordenados de tal forma que o 1° elemento do par refere-se ao dado preto e o 2° elemento refere-se ao dado branco.

Comparar diferentes representações de um mesmo conjunto de dados.

Tabela 2

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Completada a tabela 2, solicitar que os alunos verifiquem em quantos dos trinta e seis pares ordenados a soma é 7 e promova uma discussão, relacionando o número de pares com a soma 7 com o jogo anterior.

Compreender o conceito de probabilidade.

Ainda, observando a tabela 2, solicitar que os alunos respondam:

1) Quantos são todos os resultados possíveis no lançamentos dos dois dados?

2) Que os alunos determinem:

a) O conjunto A dos lançamentos em que saíram números iguais nos dois lados.

b) O conjunto B dos lançamentos em que saiu soma 7.

c) O conjunto C dos lançamentos em que saiu a soma 1.

d) O conjunto D dos lançamentos em que saiu a soma 12.

e) O conjunto E em que a soma é maior que 1 e menor que 13.

Após realizar atividades como essas, os alunos podem fazer uma pesquisa em livros didáticos selecionados pelo professor a respeito da linguagem das probabilidades, explicando com exemplos da tabela anterior termos como: experimento aleatório, espaço amostral, evento, evento certo, evento impossível.

Cálculo de probabilidade

<u>Calculando probabilidades</u>

Solicitar que os alunos determinem:

a) O conjunto S dos resultados possíveis dos lançamentos de um dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) A ocorrência de um número maior do que 4, $B = \{5, 6\}$

c) A ocorrência de um número par, $C =$

d) A ocorrência de um número ímpar, $D =$

e) A ocorrência de um número menor do que 4, $E =$

O professor pode discutir com seus alunos, provocando-os

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Compreender e aplicar a ideia de chance, utilizando frações, números decimais e porcentagens. Usar números decimais, frações e porcentagens para expressar probabilidades.	Números pares, múltiplos e divisores Fração, número decimal e porcentagem como forma de expressar chances.	com perguntas como: Se o dado for perfeito, há alguma razão para que um número saia mais facilmente que o outro? Se Pedro apostar que sai o 2 e Maria que sai o 5, qual dos dois estará em vantagem? Qual dos dois terá mais chance de ganhar? Encorajar que eles expressem o fato de que ambos terão a mesma chance de acertar, pois a probabilidade é 1 em 6 para cada um o que pode ser expresso por $\frac{1}{6}$ ou 0,167 ou 16,7%. Utilizar conhecimentos de probabilidade para analisar chances e possibilidades. É importante que os alunos percebam as três diferentes formas de representar a probabilidade. Considerando o conjunto S dos possíveis lançamentos de um dado, questionar os alunos: Qual seria a chance de sair um número maior do que quatro? Se Pedro apostar que sairá um número par e Maria que sairá um número ímpar, qual dos dois tem maior chance de ganhar? Se Pedro apostar que sairá um número maior que 4 e Maria um número menor do que 4, qual dos dois tem a maior chance de ganhar? No caso dos números pares e ímpares, eles têm a mesma chance pois a probabilidade de ganhar tanto para Pedro como para Maria é $\frac{3}{6}$ ou 0,5 ou 50%. Encorajar os alunos a expressarem a chance de Pedro e a chance de Maria, expressando-as por frações, por números decimais e por porcentagens, comparando os números. No caso dos números maiores ou menores que 4 a chance de Pedro é menor do que a de Maria, pois a probabilidade de Pedro ganhar é $\frac{2}{6} = 0{,}333$ ou aproximadamente 33%, e a de Maria ganhar é $\frac{3}{6}$ ou 0,5 ou 50%. A partir de atividades como estas, o professor, discutindo com os alunos, poderá fazer um texto coletivo que expresse o que é probabilidade e, ainda, propor problemas e exercícios. É fundamental que os alunos percebam que probabilidade é uma medida de tendência e não de certeza. Por exemplo, no evento C referente a sair um número par, como a probabilidade é $\frac{1}{2}$ ou 50%, espera-se que a cada duas jogadas saia um número par, mas não se pode garantir que isso ocorra. No entanto, se o dado for perfeito e jogarmos muitas vezes, a tendência de 1 para 2 ficará evidente e isso significa que há 50% de chance de sair a face par. A ideia de que é necessário fazer muitos lançamentos para que a tendência se evidencie é determinar experimentalmente a probabilidade, propondo aos alunos que, em duplas, lancem uma moeda e anotem o número de caras que sair. Durante cinco minutos, cada dupla pode lançar a moeda quantas vezes quiser.

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
No grande grupo, o professor anota os resultados de cada dupla, usando o quadro de giz e o seguinte quadro:
<table>
<tr><th>Dupla</th><th>Número de lançamentos</th><th>Número de ocorrência de caras</th><th>Probabilidade experimental</th></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>⋮</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Emitir conclusões e justificá-las</td><td></td><td>
A seguir, somar os lançamentos e obter o número total de lançamentos, o número total de ocorrências de sair cara e a probabilidade experimental.
Solicitar que os alunos observem os resultados obtidos e discuti-los com os alunos.
Solicitar que elaborem um texto com as suas conclusões, justificando-as.
</td></tr>
<tr><td>Consultar termos e simbologias e construir um glossário relacionado ao estudo da Probabilidade.</td><td>Linguagem e simbologia das probabilidades</td><td>
Atividades como as apresentadas proporcionam vivências e experiências de trabalho com o aleatório e permitem que o professor possa propor outras situações-problema que relacionem o cálculo de probabilidades com outras áreas.
Após explorarem diferentes situações-problema que envolvam o cálculo de probabilidades, quando os alunos demonstrarem familiaridade com alguns termos próprios da linguagem das probabilidades, sugere-se que é o momento de solicitar, fornecendo bibliografia adequada, que, em duplas, os alunos elaborem um glossário com termos como: experimento aleatório, espaço amostral, evento, evento simples, evento certo ou impossível e outros que o professor e os alunos acharem importante.
</td></tr>
</table>

Habilidades/competências, conteúdos/conceitos estruturantes e situações de aprendizagem do 2º ano

O 2º ano do ensino médio caracteriza-se como uma etapa de consolidação do desenvolvimento das habilidades da leitura e da escrita matemática, bem como da complexidade e dos conceitos já introduzidos.

No referencial do 2º ano do ensino médio, inicialmente, são abordados conteúdos de matrizes, apresentados a partir de situações-problema do dia a dia, principalmente relacionados ao mundo do trabalho, utilizando a linguagem de matrizes como uma forma simplificada de escrever informações e, por isso, tornam-se instrumentos de interpretação de dados da realidade. O estudo dos determinantes está relacionado à resolução de sistemas lineares.

A unidade que apresenta os arranjos e as combinações simples tem como objetivo desenvolver o raciocínio combinatório, envolvendo aplicações do Princípio Fundamental da Contagem e propondo o desenvolvimento de uma linguagem algébrica. Dá-se ênfase à compreensão dos agrupamentos que se diferenciam pela ordem ou pela natureza dos elementos, promovendo o entendimento das permutações simples como casos especiais de arranjos simples. A partir da resolução de situações-problemas, de uma forma natural, são estudados os fatoriais.

As funções trigonométricas circulares, apresentadas a partir de situações-problema que envolvem fenômenos periódicos, ampliam o estudo das funções e estendem para o círculo trigonométrico o estudo das razões trigonométricas, apresentadas no triângulo retângulo. Relacionado ao cotidiano, o trabalho com unidades de medida de arcos, a construção e o uso de recursos manipulativos, bem como de gráficos, quadros e tabelas, proporciona o desenvolvimento de habilidades motoras e da capacidade de abstrair e de representar.

O trabalho com senos e cossenos de ângulos complementares e suplementares estende para os triângulos quaisquer a resolução de triângulos retângulos, ampliando o tema e contextualizando as razões trigonométricas estudadas, enfatizando deduções e leis elaboradas a partir de situações-problema e de conceitos já abordados.

Ao trabalhar a soma dos termos de Progressões Aritméticas e Geométricas, inicialmente, retomando-as pelo estudo de gráficos e de padrões e regularidades, numa abordagem de funções, além de possibilitar o conhecimento de funções cujo gráfico é um conjunto discreto, proporciona o entendimento e a diferenciação do crescimento ou decrescimento de funções e possibilita o trabalho com questões de limite e de convergência, a dedução de fórmulas por regra de recorrência, bem como a compreensão do cálculo da geratriz de dízimas periódicas.

A Estatística e sua linguagem são apresentadas com o objetivo de proporcionar a oportunidade de que o aluno formule perguntas que possam ser respondidas a partir da organização em quadros, tabelas e gráficos, da interpretação e da análise de dados por ele coletados. Assim, o trabalho de Estatística é realizado com ênfase no processo de investigação, favorecendo o desenvolvimento do pensamento estatístico/probabilístico.

A familiaridade com a linguagem da Estatística proporciona a compreensão e a significação dos conceitos a ela relacionados e a possibilidade de interpretar e posicionar-se frente à realidade.

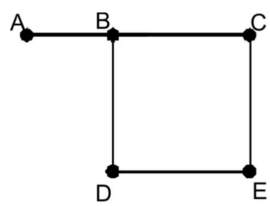
No referencial de 2º ano do ensino médio, é dada ênfase especial ao estudo da Geometria Plana e Espacial. São formalizados os conceitos de poliedros e corpos redondos, enfatizando o estudo da área da base, área lateral, área total e volume dos prismas, das pirâmides, dos cilindros e dos cones.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 244 24/8/2009 15:53:49

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>
Relacionar um quadro de dupla entrada a uma matriz retangular.
Representar uma matriz e interpretar informações nela contidas.
Identificar os elementos de uma matriz bem como seus usos.
Dominar a linguagem matricial e a sua simbologia, utilizando os novos termos na resolução de exercícios e de situações-problema.
</td>
<td>
Noção intuitiva de matriz, elementos, vocabulário, diferentes notações de uma matriz
Tipos de matrizes
</td>
<td>
Conversar, inicialmente, com os alunos sobre o novo conteúdo a ser trabalhado: matrizes.
No nosso dia a dia, lidam-se, frequentemente, com elementos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais), que formam uma tabela ou um quadro retangular. Em linguagem matemática, este quadro ou tabela é denominada de matriz.
Perguntar se os alunos teriam ideia de algum exemplo do uso de matrizes utilizado no estudo de alguma ciência ou no mundo do trabalho. Dar alguns exemplos como:
Exemplo 1: O número de carros vendidos em uma agência, durante uma semana, representado em um quadro e na forma de uma matriz:
<table>
<tr><th>Dia / Modelo</th><th>2ª feira</th><th>3ª feira</th><th>4ª feira</th><th>5ª feira</th><th>6ª feira</th><th>Sábado</th></tr>
<tr><td>A</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>C</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>
A matriz tem três linhas e seis colunas, é uma matriz 3x6 e pode ser escrita da seguinte forma:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Exemplo 2: As notas de um aluno em diferentes disciplinas nos quatro bimestres.
<table>
<tr><th>Bimestre / Disciplina</th><th>1° bimestre</th><th>2° bimestre</th><th>3° bimestre</th><th>4° bimestre</th></tr>
<tr><td>Português</td><td>5,8</td><td>8,5</td><td>7,0</td><td>8,5</td></tr>
<tr><td>Matemática</td><td>6,0</td><td>4,0</td><td>7,5</td><td>7,0</td></tr>
<tr><td>Ciências</td><td>8,4</td><td>9,2</td><td>7,0</td><td>6,8</td></tr>
</table>
A matriz tem três linhas e quatro colunas, é uma matriz de ordem 3x4 da seguinte forma:
$$B = \begin{pmatrix} 5{,}8 & 8{,}5 & 7{,}0 & 8{,}5 \\ 6{,}0 & 4{,}0 & 7{,}5 & 7{,}0 \\ 8{,}4 & 9{,}2 & 7{,}0 & 6{,}8 \end{pmatrix}$$
Exemplo 3:
Dois trens de números 1 e 2, respectivamente, transportam material de construção indo de duas localidades L_1 e L_2 até o local C, da construção. O primeiro trem faz 10 viagens de L_1 até C e 8 de L_2 até C. O segundo, faz 4 viagens de L_1 até C e 6 de L_2 até C.
</td>
</tr>
</table>

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Linguagem matricial	Podemos resumir o problema usando a seguinte disposição tabular: $\begin{array}{c c\|c} & 1 & 2 \\ \hline L_1 \rightarrow C & 10 & 4 \\ \hline L_2 \rightarrow C & 8 & 6 \\ \hline \end{array}$ Representa-se o quadro acima por $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. e também pode ser representado por $\begin{Vmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{Vmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$. Na 1ª linha, os elementos são 10 e...... Na 2ª, linha, os elementos são .... Na 1ª coluna, os elementos são............ Na 2ª coluna, os elementos são.......... Esta matriz têm 2 linhas e 2 colunas, sua ordem é 2x2. Como o número de linhas é igual ao número de colunas, esta matriz é denominada Matriz quadrada de ordem 2. O elemento da 1ª linha e 1ª coluna é 10. O elemento da 1ª linha e 2ª coluna é..... O elemento da 2ª linha e 1ª coluna é...... O elemento da 2ª linha e 2ª coluna é..... Dada a matriz $\begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, completar: Ordem.:........ Elemento da 2ª linha e 3ª coluna:.... Elemento da 2ª linha e 1ª coluna:....
Adicionar matrizes. Subtrair matrizes, encontrando a matriz oposta ou simétrica. Reconhecer, diferenciar e nomear vários tipos de matrizes. Significar termos matemáticos relacionados a matrizes	Adição e subtração de matrizes Definição de matriz Tipos de matrizes Vocabulário matemática	Solicitar que os alunos, em duplas, criem matrizes, que as denominem com letras maiúsculas do nosso alfabeto, que identifiquem a sua ordem, usando a notação correta. No grande grupo, cada dupla apresenta as suas matrizes. Deve-se incentivar que os alunos especifiquem a ordem da matriz, empregando corretamente as palavras fila, linha, coluna, matriz retangular, matriz quadrada de ordem 2, 3, 4... Este é um bom momento para introduzir a linguagem de matrizes e as notações corretas. O professor pode, também, se achar conveniente, com os alunos, generalizar por m as linhas e por n as colunas e elaborar, coletivamente, a definição formal de matriz. Desafiar os alunos a criarem, consultando livros didáticos, diferentes tipos de matrizes: matriz linha, coluna, diagonal, matriz quadrada, especificando as diagonais principal e secundária. Pode-se, ainda, solicitar que eles pesquisem, definam e deem exemplos de matrizes nulas, matrizes identidade, transposição de matrizes e igualdade de matrizes.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 246 24/8/2009 15:53:49

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Empregar corretamente termos e conceitos relacionados ao estudo das matrizes. Reconhecer e determinar matriz transposta. Revisar conhecimentos algébricos na resolução de exercícios e situações-problema, envolvendo igualdade de matrizes. Utilizar a linguagem matricial e as operações com matrizes como instrumento de análise e interpretação de dados da realidade.	Igualdade de matrizes Multiplicação de matrizes, condição de multiplicabilidade, ordem de matriz resultante Operações com matrizes	É interessante, selecionar alguns exercícios, para que os alunos apliquem os conceitos pesquisados, o que também é excelente oportunidade para se revisar alguns cálculos algébricos, como equações e sistemas de equações. Alguns exemplos desses exercícios: Calcular: a) os elementos da diagonal principal para que $A=\begin{bmatrix}2x-y & y+5\\ x+3 & x+y\end{bmatrix}$ seja uma matriz diagonal. b) os valores de *a*, *b* ,*c* e *d* para que a matriz $A=\begin{bmatrix}a-b & 3c-2d\\ 2a-3b & c+d-9\end{bmatrix}$ seja matriz identidade. c) os valores de *x*, *y*, *z* e *w* para que se verifique a igualdade: $\begin{bmatrix}x & x+y\\ 2x+z & y+2w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ -3 & 3\end{bmatrix}$ Selecionar alguns problemas para os alunos resolverem em que eles tenham que adicionar, subtrair matrizes e multiplicar um número real por uma matriz. Ao fazer a correção coletiva, o professor pode chamar a atenção, por exemplo, que só se adicionam matrizes de mesma ordem, que só há diagonais em matrizes quadradas, que, ao subtrair duas matrizes, A e B, temos $A - B = A + (-B)$, sendo -B a matriz simétrica de B. Propor aos alunos que leiam e interpretem a situação-problema proposta a seguir e, observando o esquema, montem os diferentes caminhos solicitados: O esquema a seguir representa o mapa rodoviário entre cinco municípios: A, B, C, D e E.  Montar diferentes caminhos que ligam os municípios dois a dois, destacando, em cada caso, quais os dois municípios considerados. Exemplo: AB $ABC \rightarrow AC$ $ABD \rightarrow AD$ $ABCD \rightarrow AE$ $ABDE \rightarrow AE$ Completar a tabela da próxima página e, a seguir, expressar a matriz correspondente (A), considerando as seguintes condições:

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 247 24/8/2009 15:53:49

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Compor matrizes genéricas.</td>
<td>Representação genérica de uma matriz

Matriz genérica

Construção de matrizes</td>
<td>

Se duas cidades têm ligação direta, o elemento que corresponde à linha e à coluna da matriz em que ele se localiza (elemento a_{ij}) será 1.

Se duas cidades têm ligação indireta, o elemento a_{ij} será zero.

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

$$A = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Observação: O elemento denominando a_{ij} é o elemento de uma determinada linha e uma determinada coluna.

Exemplo: $a_{ij} = a_{12}$ é o elemento da primeira linha, segunda coluna que se refere à ligação da cidade A com a cidade B.

Propor aos alunos a seguinte leitura:

Matrizes são formas simplificadas de escrever uma informação. Em que situação a forma matricial facilita a informação?

Por exemplo, se, no mapa, houvesse 1.000 cidades para consultar a comunicação direta 2 a 2, uma matriz 1.000 por 1.000 poderia estar armazenada em um computador e seria fácil consultá-la, encontrando as que se ligam diretamente, bem como as possíveis conexões entre elas.

(Adaptado de Smole, 2003).

Esta situação de aprendizagem é preparatória para representar matrizes com elementos genéricos (matriz genérica).

Muitas vezes, para resolver questões que envolvem matrizes, é conveniente compor matrizes com elementos genéricos, isto é, usando letras minúsculas seguidas de índices numéricos que indicam a linha e a coluna, respectivamente.

Propor aos alunos exercícios como os que seguem:

Completar os índices dos elementos das matrizes e responder as perguntas abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ a & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & c \\ c & c \\ c & c \end{pmatrix}$$

1) Qual o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz B?

2) Qual o elemento da 2ª linha e 1ª coluna da matriz C?

3) Qual a ordem da matriz A?..........................Da matriz B?...............Da matriz C?................

4) Quais os elementos da diagonal principal da matriz A?..........E da matriz B?............

As três matrizes indicadas acima são chamadas de matrizes genéricas de ordem 2 (A), de ordem 3 (B) e de ordem 3x2 (C).

Para cada exercício proposto a seguir, inicialmente, montar a matriz genérica para, observando os índices i, j de cada

</td>
</tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 248 24/8/2009 15:53:50

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver exercícios interpretando a simbologia realacionada ao estudo de matrizes	Multiplicação de matrizes	elemento, montar a matriz solicitada. Exercícios: Construir as matrizes indicadas a seguir: a) $A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que, se $i + j$ for par, o elemento da matriz é 1, se $i + j$ for ímpar o elemento da matriz é zero. b) $B = (b_{ij})_{3x3}$ tal que cada elemento $b_{ij} = 2i + j$ c) A_{3x3} em que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ d) B_{2x3} em que $b_{ij} = i + j + 3$ e) C_{4x2} em que $c_{ij} = \begin{cases} 3i - 2, & \text{se } i \geq j \\ 3j + 2, & \text{se } i < j \end{cases}$ f) D_{2x4} em que $d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i > j \\ 2i + 3j, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$ g) E_{2x2} em que $e_{ij} = i^2 - 3j$ h) F_{3x2} em que $f_{ij} = \begin{cases} i^2 - j^2 + 1, & \text{se } i \neq j \\ 3i, \text{ se} & i = j \end{cases}$
Reconhecer a condição de multiplicabilidade de duas matrizes e encontrar a ordem da matriz resultante.	Condição de multiplicabilidade de duas matrizes Ordem da matriz resultante	**Multiplicação de matrizes** Para que o aluno construa uma estratégia para multiplicar duas matrizes, o professor deve criar situações-problema, a partir das quais o aluno entenda que para resolvê-las, é necessário multiplicar duas matrizes. Só é possível multiplicar duas matrizes A e B, se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, isto é, sendo A de ordem mxn, B deverá ser de ordem nxp, ficando a matriz produto AxB com ordem mxp (p=m ou $p \neq m$ e $p > 0$). Assim, por exemplo, se: $A_{(2\,x\,2)}$ e $B_{(2\,x\,3)}$ igual → condição de multiplicidade 2 x 3 → ordem da matriz resultante A matriz produto $AxB_{(2x3)}$ é representada genericamente por $A \times B_{(2\times3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$. Nesta matriz, o elemento a_{11} é a soma dos produtos dos

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 249 24/8/2009 15:53:50

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Compreender e aplicar o algoritmo da multiplicação de matrizes.

Calcular as quantidades totais de areia e cascalho que serão trasportadas

Resolver situações-problema que envolvam multiplicação de matrizes.</td>
<td>Algoritmo da multiplicação de matrizes.</td>
<td>

elementos da 1ª linha da matriz A pelos elementos da 1ª coluna da matriz B, o elemento a_{12} é a soma dos produtos dos elementos da 1ª linha da matriz A, pelos elementos da 2ª coluna da matriz B, e assim, sucessivamente.

Observar a seguinte situação-problema: Considerando o exemplo dos trens 1 e 2, que transportam material de construção, a matriz obtida foi A= $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Suponhamos agora que os dois trens transportem toneladas de areia e cascalho, conforme a especificação na tabela abaixo:

<table>
<tr><th></th><th>areia</th><th>cascalho</th></tr>
<tr><td>trem 1</td><td>100</td><td>20</td></tr>
<tr><td>trem 2</td><td>60</td><td>40</td></tr>
</table>

Calcular as quantidades totais de areia e cascalho que serão trasportadas.

Temos a matriz B = $\begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}$

Queremos calcular as quantidades totais de areia e cascalho que são carregadas de L_1 para C e de L_2 para C. A resposta é obtida através da operação multiplicação de matrizes. Para efetuar a multiplicação, é interessante fazer um dispositivo prático, como o que segue:

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1000+240 & 200+160 \\ 800+360 & 160+240 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\text{Então} \quad A \times B = \begin{bmatrix} 1240 & 360 \\ 1160 & 400 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Verificar que:

1.240 (a_{11}) = 10 x 100 + 4 x 60 = 1.000 + 240

360 (a_{12}) = 10 x 20 + 4 x 40 = 200 + 160

1160 (a_{21}) = 8 x 100 + 6 x 60 = 800 + 360

400 (a_{22}) = 8 x 20 + 6 x 40 = 160 + 240

Assim, para multiplicar duas matrizes, a partir da ordem da matriz resultante, constrói-se a matriz genérica da matriz produto e, a partir dela, cada elemento é calculado, observando seus índices. Por exemplo, para calcular o elemento a_{11} da matriz A x B, multiplicam-se, um a um, os elementos da primeira linha da matriz da matriz A pelos elementos da primeira coluna da matiz B e somam-se os produtos.

A partir do exemplo dado, propor exercícios e situações-problema que sistematizem o algoritmo da multiplicação de duas matrizes.

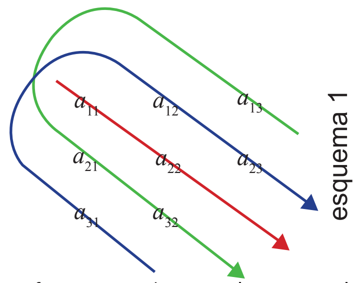
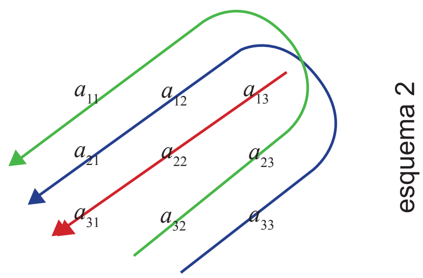
</td>
</tr>
</table>

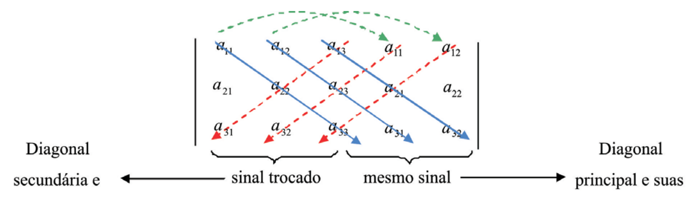
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 250 24/8/2009 15:53:50

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver situações-problemas, utilizando sistemas lineares. Calcular determinantes de matrizes quadradas de 2ª e 3ª ordens. Utilizar o cálculo de determinante para a resolução e discussão de sistemas lineares. Identificar sistemas homogêneos. Resolver genericamente um sistema linear definindo determinantes de 2ª ordem.	Sistemas lineares de 2 incógnitas Determinantes de 2ª e 3ª ordens Resolução de sistemas Determinantes Matrizes relacionadas a sistemas lineares: Matriz completa Matriz incompleta Determinantes de matrizes de ordem 2	**Sistemas lineares e determinantes** Solicitar que os alunos resolvam uma situação-problema cuja solução necessite que se trabalhe com um sistema linear de duas incógnitas. Por exemplo: Num estacionamento há 42 veículos: algumas bicicletas e alguns carros. Ao todo, são 148 rodas. Quantos carros e quantas bicicletas há no estacionamento? Equacionando o problema, tem-se: $\begin{cases} x+y=42 \\ 2x+4y=148 \end{cases}$ Solicitar que os alunos resolvam o sistema. Discutir as diferentes soluções dadas. Comentar sobre sistemas lineares com duas incógnitas e as diferentes formas de solucioná-los (adição, comparação, substituição). Em especial, relembrar o método da adição. Uma sugestão, para desencadear o estudo de determinantes que pode ser explorado em uma aula expositiva dialogada: Considerar um sistema linear genérico com duas variáveis: $\begin{cases} ax+by=c & (linha\ 1) \\ dx+ey=f & (linha\ 2) \end{cases}$ em que x e y são incógnitas, **a, b, d, e,** são os coeficientes das incógnitas e **c, f** são os termos independentes das equações. A esse sistema, podem-se associar duas matrizes: a matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ de ordem 2 cujos elementos são os coeficientes das incógnitas e é chamada matriz incompleta e a matriz $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ de ordem 2x3 que é chamada matriz completa, e contém os termos independentes das equações. Resolvendo genericamente o sistema, de uma certa forma, utilizando o método de adição e, como tal, escolhendo convenientemente os multiplicadores, tem-se para x, efetuando as multiplicações e somando membro a membro, as equações: $\begin{cases} ax+by=c & (\times\ e) \\ dx+ey=f & (\times -b) \end{cases}$ $\begin{array}{r} aex+\cancel{bey}=ec \\ -bdx-\cancel{bey}=-bf \\ \hline aex-bdx=ec-bf \end{array}$ $x(ae\text{-}bd)= ec\text{-}bf$; considerando $(ae\text{-}bd) \neq 0$, temos $x=\dfrac{ec-bf}{ae-bd}$ tem-se ainda para y: $\begin{cases} ax+by=c & (\times -d) \\ dx+ey=f & (\times -a) \end{cases}$ $\begin{array}{r} -\cancel{adx}-bdy=-dc \\ \cancel{adx}+aey=af \\ \hline aey-bdy=-dc+af \end{array}$

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Generalizar a fórmula de cálculo de determinante de 2ª ordem. Resolver sistemas lineares de duas variáveis.	Resolução de sistemas lineares de duas variáveis por determinantes: Regra de Cramer	*y(ae-bd)= af - cd; considerando (ae-bd) ≠ 0,* temos $y = \dfrac{af - cd}{ae - bd}$ Observando os denominadores das frações anteriores e a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$, verifica-se que eles são a soma do produto dos elementos da diagonal principal da matriz incompleta com o oposto do produto dos elementos da diagonal secundária dessa mesma matriz. A esse número dá-se o nome de determinante, nota-se e calcula-se da seguinte forma: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$ Observando os numeradores das mesmas frações, verifica-se que, para x, o numerador é o determinante da matriz Ax de ordem 2 em que os coeficientes de x na matriz incompleta foram substituídos pelos termos independentes $Ax = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$, $\det Ax = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ec - bf$ e que, para, y, o numerador é o determinante da matriz Ay ordem 2 em que os coeficientes de y da matriz incompleta foram substituídos pelos termos independentes $Ay = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$, $\det Ay = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - cd$ Assim pode-se calcular os valores das incógnitas através de determinantes. Solicitar aos alunos que resolvam por determinantes o sistema relacionado aos veículos. Matriz incompleta $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 4 - 2 = 2$ Matriz $Ax = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 148 & 4 \end{bmatrix}$ $\det Ax = \begin{vmatrix} 42 & 1 \\ 148 & 4 \end{vmatrix} = 42 \cdot 4 - 148 \cdot 1 = 168 - 148 = 20$ Matriz $Ay = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 148 \end{bmatrix}$ $\det Ay = \begin{vmatrix} 1 & 42 \\ 2 & 148 \end{vmatrix} = 1 \cdot 148 - 2 \cdot 42 = 148 - 84 = 64$ Calculando $x = \dfrac{\det Ax}{\det A} = \dfrac{20}{2} = 10$ e $y = \dfrac{\det Ay}{\det A} = \dfrac{64}{2} = 32$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 252 24/8/2009 15:53:51

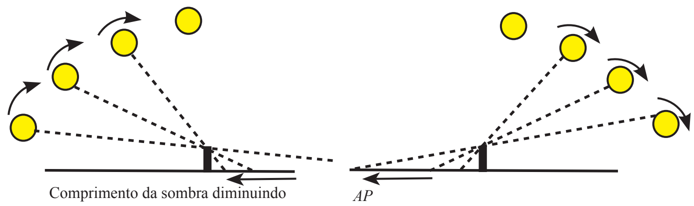
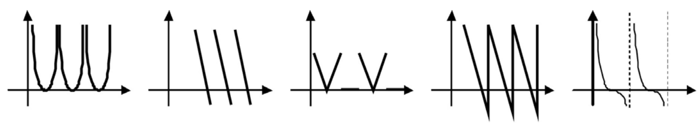
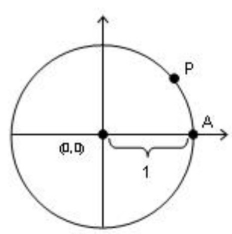
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Generalizar a forma de cálculo de determinante de 3ª ordem. Compreender e aplicar a Regra de Sarrus no cálculo de determinantes de 3ª ordem.	Determinantes de matrizes de ordem 3 Determinantes de matrizes de ordem 3 (Regra de Sarrus) Regra de Sarrus	Entende-se que esta forma de resolver sistemas só é válida para aqueles em que o determinante da matriz incompleta não é nulo. Para o determinante de 3ª ordem, a definição é um pouco diferente, pois tanto a diagonal principal como a diagonal secundária têm diagonais paralelas (as que têm a mesma direção) que devem ser consideradas no cálculo do determinante. Vejamos a matriz genérica A de ordem 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  Observando o esquema 1 referente à diagonal principal, tem-se que $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$; $a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$; $a_{31}\ a_{12}\ a_{23}$ são a diagonal principal e suas paralelas. Observando o esquema 2, referente à diagonal secundária, tem-se que $a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$; $a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$; $a_{33}\ a_{12}\ a_{21}$ são a diagonal secundária e suas paralelas.  Como é, então, o determinante de ordem 3? O determinante de ordem 3 é a soma dos produtos dos elementos da diagonal principal e suas paralelas somado ao oposto da soma dos produtos da diagonal secundária e suas paralelas. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$ Determinar, dessa forma, as diagonais com a mesma direção da principal e da secundária pode parecer um pouco mais complicado e dar margem a erros. Pode-se, então, mostrar para os alunos um dispositivo prático conhecido como "Regra de Sarrus", que é o seguinte: à direita da matriz A, copiam-se a 1ª e a 2ª colunas da referida matriz, o que torna fácil, conforme o esquema abaixo, achar as diagonais e suas paralelas.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver sistemas lineares de três variáveis.	Resolução de sistemas lineares de três variáveis por determinantes	 $\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) -$ $(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$ Solicitar que os alunos calculem alguns exemplos numéricos de determinantes de ordem 3 e resolvam sistemas lineares de três incógnitas, usando as orientações da resolução dos sistemas lineares de duas incógnitas. Na medida do tempo e do perfil da turma, o professor pode trabalhar com as propriedades dos determinantes (o que facilita os cálculos), discutir sistemas, trabalhar com sistemas lineares homogêneos. Um tema bastante interessante que pode, também, ser trabalhado, é a resolução e a discussão de sistemas lineares por escalonamento, o que fica o critério do professor, tendo em vista que a preferência é que se trabalhem inicialmente os conteúdos mínimos de cada unidade proposta.
Desenvolver o raciocínio combinatório, tendo em vista a familiarização do aluno com problemas que envolvam o Princípio Fundamental da Contagem. Compreender, aplicar e generalizar o Princípio Fundamental da Contagem. Diferenciar arranjos simples e permutações simples.	Arranjos simples e permutações simples Princípio Fundamental da Contagem Arranjos simples e permutações simples Ordem e natureza dos elementos em um agrupamento Noções de arranjo e permutação simples Linguagem de conjuntos	**Arranjos e permutações** Retomar com os alunos alguns problemas cuja resolução utilize o Princípio Fundamental da Contagem e suas representações (orientações e sugestões no Referencial de 1° ano). Selecionar problemas que tenham que ser resolvidos por arranjos ou permutações simples. São problemas que podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem, mas que pressupõem técnicas de contagem de determinados agrupamentos de elementos distintos de um conjunto tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, n a n, escolhidos entre os n existentes. Solicitar que os alunos resolvam os problemas (individualmente ou em duplas), discutam as características dos problemas, por exemplo, que agrupamentos foram utilizados, se foram tomados para cada agrupamento um número menor ou um número igual ao número de elementos do conjunto. Com provocações pertinentes, encaminhar as discussões de modo que, em um conjunto de agrupamentos 2 a 2 elementos, por exemplo, se forem comparados quaisquer dois, eles se diferenciam ora pela ordem, ora pela natureza dos elementos, e no conjunto de elementos tomados n a n eles só variam pela ordem dos elementos. Exemplo: Dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4}, se a questão for: quantos números de dois algarismos diferentes pode-se escrever, haverá agrupamentos de 2 em 2 (23, 13, 14, 32, 31, 41, ...), comparando 23 com 32, verifica-se que são números diferentes que se diferenciam pela ordem que os algarismos ocupam no número; comparando os números 23 e 13, são números de dois algarismos que se diferenciam pela

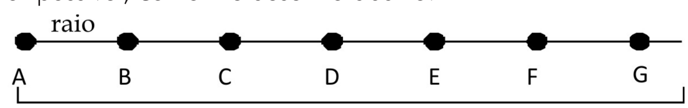
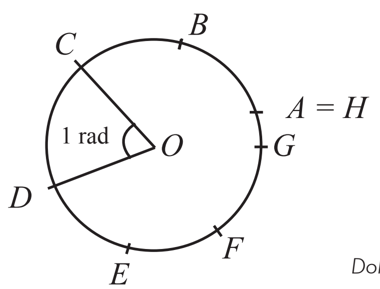
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 254 24/8/2009 15:53:52

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
A partir da resolução de problemas e do uso de diferentes representações, compreender e definir o conceito de arranjo simples e de permutação simples.	Arranjo – definição e forma de calcular	natureza dos elementos: o 2 é diferente do 1. Se a pergunta for quantos números de quatro algarismos diferentes pode-se escrever (1243, 2143, 3412, ...) quaisquer dois números que compararmos, 1243 e 2143, por exemplo, eles só se diferenciam pela ordem dos elementos. É importante que os alunos sejam orientados a chamar os agrupamentos de n elementos tomados n a n de permutações e os agrupamentos de n elementos tomado p a p com $p < n$ de arranjos, embora deva ficar claro que as permutações são casos especiais de arranjos.
A partir de sequências e padrões, generalizar fórmulas que permitem calcular o número de arranjos simples.	Permutação simples, um caso especial de arranjo – definição, notação e forma de calcular –, problemas de aplicação	A expressão matemática que permite calcular o número de agrupamentos dos n elementos tomados p a p é: $A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]$ Pode, pelos alunos ser entendida: $A_{n,p} = \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{p \ fatores}$
Compreender o que é um fatorial.	Vocabulário e simbologia matemática	Esta expressão que permite calcular quaisquer arranjos pode ser deduzida se os alunos analisarem a regularidade na sequência de arranjos de quatro elementos. $A_{4,1} = 4$ $A_{4,2} = 4 \cdot 3$ $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$ } Arranjos de 4 elementos tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3 $A_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ } Permutação de 4, arranjos de 4 elementos tomados 4 a 4 Generalizando: $A_{n,1} = n$ $A_{n,2} = n(n-1)$ $A_{n,3} = n(n-1)(n-2)$ $\vdots$ $A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots[n(p-1)]$ $P_n = A_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots1$
Resolver problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem, arranjos simples e permutações simples.	Fatorial – definição, notação, propriedades e problemas de aplicação Problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem, arranjos, permutações e fatorial	Ao resolver problemas que envolvem permutações, surgem expressões como: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este é o momento de discutir com os alunos que $3 \cdot 2 \cdot 1$ indica o número de agrupamentos das permutações de três elementos (P_3), que $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4$ (permutações de 4 elementos) e que esses números são indicados por 3!, 4! ou $n!$ e são lidos: "fatorial de 3 ou 3 fatorial", "fatorial de 4 ou 4 fatorial", "fatorial de n ou n fatorial", cuja notação é 3!, 4! n! $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ $\quad P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Convém discutir com os alunos que $1! = 1$ e que $0! = 1$

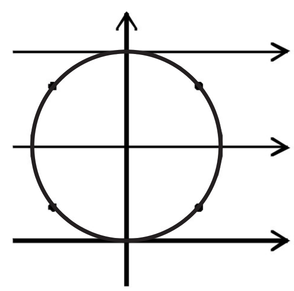
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 255 24/8/2009 15:53:52

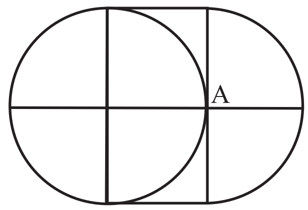
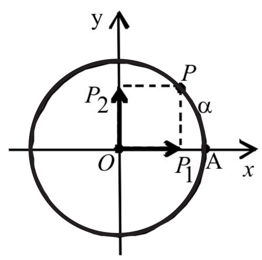
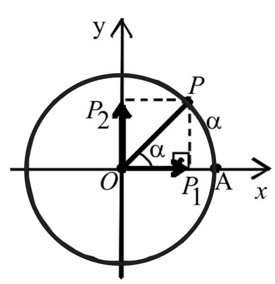
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Identificar fenômenos periódicos. Representar em gráficos cartesianos periodicidade de fenômenos. Reconhecer a periodicidade de fenômenos naturais. Representar fenômenos periódicos em quadros, tabelas e gráficos, observando a continuidade e o crescimento. Construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Interpretar gráficos relacionados a fenômenos periódicos. Identificar fenômenos periódicos no cotidiano.	Fenômenos periódicos Representação gráfica de fenômenos periódicos Periodicidade de fenômenos Gráficos de fenômenos periódicos	**As funções trigonométricas circulares** O estudo das funções trigonométricas deve iniciar com a análise da periodicidade de determinados fenômenos, uma vez que a maior motivação para o estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos. Uma atividade a ser proposta, inicialmente, pela qual pode-se representar graficamente a periodicidade de um fenômeno, é solicitar que os alunos observem, no desenho abaixo, no eixo horizontal, as sombras de uma estaca projetada pelo nascer ao pôr do Sol. Depois de analisar o desenho, solicitar que os alunos representem em um gráfico cartesiano a evolução do comprimento da sombra da estaca, durante a passagem de, por exemplo, três dias. (Desenhos e atividade adaptado de: Referencial Curricular São Paulo – 2ª série – p. 12-13).  Alguns gráficos apresentados pelos alunos em uma experiência semelhante foram os seguintes:  Cabe ao professor comentar cada um deles, tendo em vista o reconhecimento da possibilidade da representação cartesiana de fenômenos periódicos. Há vários aspectos a serem comentados, entre eles: - os gráficos não podem ser retilíneos, pois as sombras variam em intervalos crescentes ou decrescentes. - alguns gráficos apresentam descontinuidade, o que acontece com alguns fenômenos periódicos. Solicitar que os alunos pesquisem em livros, revistas ou entrevistem profissionais, como médicos, economistas ou professores, sobre alguns fenômenos periódicos, e, a partir dessas atividades, socializem ideias associadas a esses fenômenos, em sua aula.
Reconhecer um arco de circunferência e sua relação com o ângulo central. Reconhecer a origem dos arcos de circunferência, o	O círculo trigonométrico e suas características, sentido negativo e positivo, quadrantes, origem dos arcos	**O círculo trigonométrico e as funções seno, cosseno e tangente** Explorar com os alunos o círculo trigonométrico, a fim de possibilitar o entendimento das razões trigonométricas como funções (figura 1). Sugere-se uma atividade para significar o conceito de radiano: Considerar, no plano cartesiano,  figura 1

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 256 24/8/2009 15:53:52

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
sentido positivo e o negativo e os arcos côngruos. Utilizar instrumentos de desenho, de medição e de cálculo. Expressar a medida de um ângulo ou de um arco em graus e radianos. Identificar e diferenciar os elementos de um círculo. Compreender quantas vezes o raio cabe na circunferência.	As medidas de arcos: graus e radianos Circunferência, diâmetro e raio Radiano	um círculo cujo centro coincida com o ponto **(0, 0)**, que o raio seja a unidade e o ponto A, a origem dos arcos. Considerar o ponto P, localizado na circunferência e identificar o arco AP. Considerando que o círculo é orientado, definir que o sentido anti-horário é positivo e o sentido horário é negativo e que o arco assume valores positivos e negativos. Assim, associados ao ponto P, temos dois arcos AP, um positivo e outro negativo cujos módulos somam 360°. Explorar com os alunos que um arco tem a mesma medida do ângulo central α, portanto ele pode ser medido em graus que é uma medida já conhecida dos alunos que, no entanto, deve ser retomada. Se o professor considerar pertinente, pode construir o transferidor de papel (descrito no referencial de 5ª e 6ª séries). Recomenda-se o uso de compasso, régua, esquadro e transferidor para construir o círculo e localizar seus elementos. É necessário definir outra medida para os arcos da circunferência: o radiano. Com o auxílio de um cordão e um objeto circular (um cartão circular ou uma tampa) que tenha o centro marcado, pode-se construir a ideia de radiano (rad). Contornar o objeto circular com um barbante, cortar o pedaço que corresponde à circunferência e retificá-lo. Com outro barbante, medir o diâmetro, dobrá-lo ao meio e cortar o pedaço que corresponde ao raio. Marcar o raio no cordão correspondente à circunferência retificada tantas vezes quantas for possível, conforme desenho abaixo.  Circunferência retificada Solicitar que os alunos escrevam suas conclusões. Ao socializar as conclusões, os alunos podem verificar que o raio "cabe", aproximadamente, seis vezes e mais um pedacinho na circunferência. Contornando o objeto circular com o barbante, os alunos terão marcado nele os arcos da circunferência como medida igual a 1 radiano que cabe seis vezes mais "um pedacinho" na circunferência e que corresponde à medida do ângulo central, como mostra a figura.  *Adaptado de Iezzi, Dolce, Degenszajn, Perigo, Almeida (2001), p.9.*

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 257 24/8/2009 15:53:52

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Relacionar graus e radianos como medidas da circunferência. Converter graus em radianos e vice-versa, utilizando regra de três.	Relação entre graus e radianos Valor de 1 radiano Comprimento da circunferência	O "pedacinho" correspondente a 0,281... do raio, sabendo que π é 3,1416.., pode-se concluir que 1 radiano como 1 raio cabe 6,2831 vezes na circunferência. Assim pode-se retomar que o comprimento da circunferência é $2\pi r$ e que uma volta completa no círculo trigonométrico é $2\pi\ rad$. Comparar a medida em graus e radianos e estabelecer uma relação entre elas, usando uma regra de três. 360° ——— $2\pi\ rad$ medida do arco em graus ——— medida do arco em radianos Se $\overset{\frown}{AP}$ medir 30°, quanto medirá em radianos? Considerando x a medida em radianos: 360° ——— $2\pi\ rad$ 30° ——— x $x = \dfrac{30^{\circ} \times 2\pi rad}{2} = \dfrac{1}{6}\pi rad$
Identificar o eixo dos senos, dos cossenos e das tangentes. Compreender que as razões trigonométricas podem ser trabalhadas como funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico. Traçar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente, identificando os sinais, a periodicidade.	Construções geométricas Arcos côngruos Funções seno, cosseno e tangente: eixos ortogonais, sinais das funções nos quadrantes, crescimento e decrescimento das funções e gráficos das funções O círculo trigonométrico e as funções seno, cosseno e tangente	**Construção do dispositivo prático também chamado de relógio trigonométrico** Solicitar que os alunos tragam uma folha de papel milimetrado e um pedaço de papelão canelado, ambos de tamanho ofício, uma lâmina de retroprojetor, lápis, compasso, esquadro. O professor deve providenciar uma ou duas canetas para trabalhar na lâmina de retroprojetor. Na folha milimetrada, desenhar um círculo de 10 cm de raio, um eixo cartesiano com a origem centrada no círculo. Dividir os eixos cartesianos, adotando a escala 1:10 cm, isto é, de 0,1 em 0,1. Com o transferidor, marcar a circunferência com pontos assinalando arcos de 10 em 10 graus, deixando marcada a origem dos arcos (A). Marcar, também, com tracinhos os arcos de 45°, 135°, 225° e 315° que, no círculo trigonométrico, são simétricos.  Na lâmina para retroprojetor, desenhar e recortar um círculo, aumentando-o de meio círculo, conforme modelo abaixo, com os eixos e a reta tangente no ponto A marcados com caneta de retroprojetor. A folha de papel milimetrado deve ser colada no papelão canelado e a lâmina para retroprojetor deve ser fixada na folha de papel milimetrado no centro do círculo de tal forma que fique móvel e possa girar, contornando a circunferência. Este dispositivo permite que se marquem os arcos na

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Representação gráfica de fenômenos periódicos	circunferência e que se façam projeções da extremidade dos arcos nos eixos do seno (das ordenadas), do cosseno (das abscissas), e da tangente, respectivamente, definindo as funções trigonométricas, seu crescimento e seu decrescimento, bem como os seus sinais nos quadrantes e nas extremidades dos quadrantes.  A partir do manejo do dispositivo prático, os alunos podem, com a orientação do professor, estudar os arcos côngruos. Manipulando o dispositivo prático (relógio trigonométrico), localizar, no círculo trigonométrico, o ponto P que tem uma abscissa e uma ordenada, considerando o sistema cartesiano centrado em O.
Reconhecer o eixo dos senos e definir a função seno.	Seno de um arco do círculo trigonométrico Eixo dos senos Função seno	 OP_1 → abscissa de P OP → ordenada de P $\widehat{AP}$ → arco de medida α No desenho abaixo, considerar o triângulo POP_1, retângulo em P_1 e o ângulo PÔA, também de medida α. Tem-se que $senP\hat{O}A = \frac{PP_1}{OP}$, OP = 1 (medida do raio do círculo trigonométrico). Assim, $senP\hat{O}A = \frac{PP_1}{1} = PP_1$ Projetando ortogonalmente o segmento PP_1 sobre o eixo das ordenadas, verifica-se que OP_2, ordenada de P, é a projeção ortogonal de PP_1 sobre o eixo das ordenadas.
Relacionar o seno de um arco $\widehat{AP}$ à ordenada do ponto P.		

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Reconhecer o eixo dos cossenos e definir a função cosseno.</td><td>Cosseno de um arco de 1° quadrante do círculo trigonométrico

Eixo dos cossenos</td><td rowspan="6">

Assim: sen PÔA = sen $\overset{\frown}{AP}$ = OP_2 = ordenada de P.

Portanto, a função seno de um arco de medida α é a função de R em R que, a cada medida α de um arco do círculo trigonométrico, associa a ordenada do ponto P, imagem de α pela função seno.

$$sen : R \to R$$
$$\alpha \to sen\alpha = OP_2$$

O eixo Oy passa a ser denominado eixo dos senos.

De forma análoga,

$$\cos P\hat{O}A = \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_1}{1} = OP_1$$

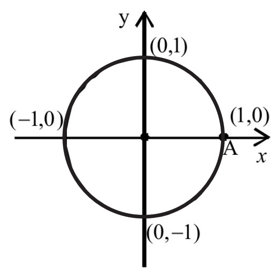
cos PÔA = cos $\overset{\frown}{AP}$ = OP_1 abscissa do ponto P.

Assim, a função cosseno de um arco de medida α é a função de R em R que, a ada medida α de um arco do círculo trigonométrico, associa a abcissa do ponto P, imagem de α pela função cosseno. Assim:

$$\cos : R \to R$$
$$\alpha \to \cos\alpha = OP_1$$

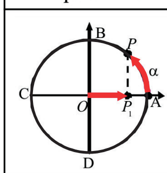
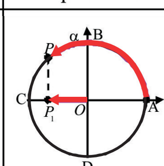
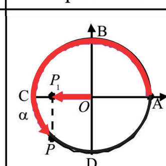
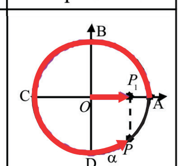
Considerando o ponto P, tem-se que P (cos α, sen α).

Quando a medida de α é 0 π, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}$ π, completar a tabela a seguir.



<table>
<tr><th></th><th>0π</th><th>$\frac{\pi}{2}$</th><th>π</th><th>$\frac{3}{2}\pi$</th></tr>
<tr><td>cos α</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sen α</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Considerando $\overset{\frown}{AP}$, arcos do 1°, 2°, 3° e 4° quadrantes, encontrar o sinal das funções seno e cosseno nos referidos quadrantes e completar o quadro a seguir:

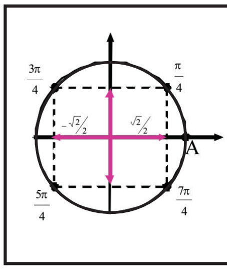
<table>
<tr><th>1° quadrante</th><th>2° quadrante</th><th>3° quadrante</th><th>4° quadrante</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>cos α</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sen α</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

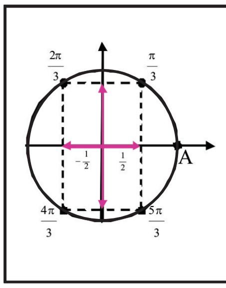
Adaptado de Smole (2003), p. 316.

</td></tr>
<tr><td>Relacionar o cosseno de um arco $\overset{\frown}{AP}$ à abscissa do ponto P.</td><td></td></tr>
<tr><td>Identificar o sinal das funções seno e cosseno nos pontos (1,0); (0,1); (-1,0); (0,-1).</td><td>Função cosseno</td></tr>
<tr><td>Identificar o sinal das funções seno e cosseno nas extremidades de arcos localizadas nos quatro quadrantes.</td><td>Sinal das funções seno e cosseno nos pontos (1,0); (0,1); (-1,0); (0,-1)</td></tr>
<tr><td>Reconhecer arcos simétricos em relação aos eixos coordenados.</td><td>Valor das funções seno e cosseno dos arcos de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ e seus simétricos</td></tr>
<tr><td>Calcular o valor dos arcos de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ e seus simétricos</td><td></td></tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 260 24/8/2009 15:53:54

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr>
<td>Observar desenhos e registrar dados em quadros ou tabelas.</td>
<td></td>
<td>
Com o auxílio do dispositivo prático e da tabela de senos e cossenos, completar os quadros abaixos, considerando a simetria dos arcos em relação aos eixos coordenados.

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>$\cos\frac{\pi}{4} =$</td><td>$sen\frac{\pi}{4} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{3\pi}{4} =$</td><td>$sen\frac{3\pi}{4} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{5\pi}{4} =$</td><td>$sen\frac{5\pi}{4} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{7\pi}{4} =$</td><td>$sen\frac{7\pi}{4} =$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>$\cos\frac{\pi}{3} =$</td><td>$sen\frac{\pi}{3} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{2\pi}{3} =$</td><td>$sen\frac{2\pi}{3} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{4\pi}{3} =$</td><td>$sen\frac{4\pi}{3} =$</td></tr>
<tr><td>$\cos\frac{7\pi}{3} =$</td><td>$sen\frac{7\pi}{3} =$</td></tr>
</table>

Adaptado de Smole (2003), p. 316.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Identificar, com o auxílio de um dispositivo prático, o crescimento e o decrescimento das funções seno e cosseno nos quatro quadrantes.

Relacionar informações contidas em quadros ou tabelas e, a partir delas, traçar os gráficos das funções seno e cosseno</td>
<td>Crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno na 1ª volta nos quatro quadrantes.

Valores das funções seno e cosseno</td>
<td>
Gráfico das funções seno e cosseno

Os alunos já estudaram os valores de seno e cosseno e seus sinais nos quatro quadrantes do círculo trigonométrico, já contribuíram uma medida linear para os arcos, os radianos, já tiveram experiências variadas com gráficos no sistema cartesiano e já se empenharam em esboçar gráficos que representam fenômenos periódicos. A seguir, manipulando o dispositivo prático, os alunos vão construir os gráficos das funções seno e cosseno.

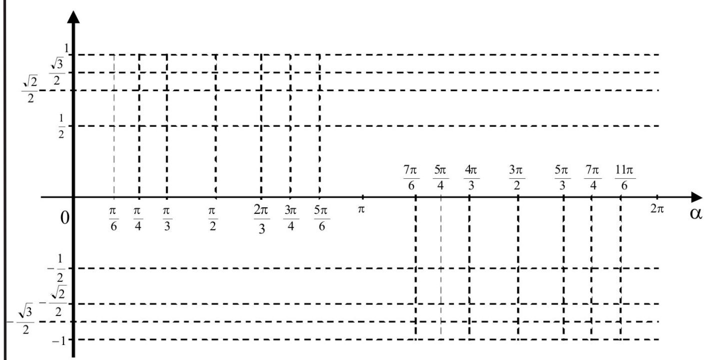
Solicitar aos alunos que completem a tabela abaixo que se refere ao crescimento e ao decrescimento das funções seno e cosseno nos quatro quadrantes.

<table>
<tr><th>1º quadrante</th><th>2º quadrante</th><th>3º quadrante</th><th>4º quadrante</th></tr>
<tr><td>A função seno cresce de zero até 1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A função cosseno decresce de 1 até zero</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Solicitar, a seguir, que completem a tabela de senos e cossenos, consultando os valores que eles já encontraram para arco de 1ª volta.

<table>
<tr><td>α</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{4}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>π</td><td>$\frac{7\pi}{6}$</td><td>$\frac{5\pi}{4}$</td><td>$\frac{4\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>$\frac{5\pi}{3}$</td><td>$\frac{7\pi}{4}$</td><td>$\frac{11\pi}{6}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$sen\,\alpha$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Discutidos e corrigidos os quadros, solicitar que os alunos tracem, em cores diferentes, os gráficos das funções seno e
</td>
</tr>
</table>

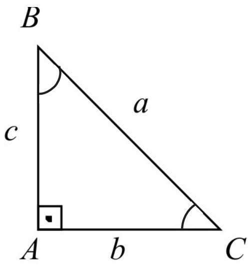
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer a funções seno e cosseno como funções periódicas. Identificar, na representação das funções seno e cosseno, o sinal e as raízes.	Gráfico das funções seno e cosseno Periodicidade, domínio e imagem das funções seno e cosseno	cosseno de um arco do círculo trigonométrico, considerando a medida dos arcos da medida na 1ª volta. Sabendo que, no eixo das abscissas, marcam-se os valores dos arcos, e, no eixo das ordenadas, os valores dos senos e cossenos dos arcos, considerando os arcos simétricos, traçar, em cores diferentes, os gráficos das funções seno e cosseno.  Analisando os gráficos das funções seno e cosseno, verificar com os alunos a periodicidade dessas funções, na medida em que estes gráficos, para cada função, se repetem a cada intervalo 2. Determinar o domínio e a imagem das funções seno e cosseno.
Ampliar o conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo. Reconhecer e diferenciar ângulos complementares e suplementares.	Razões trigonométricas de um ângulo agudo Ângulos complementares e suplementares	**Senos e cossenos de ângulos suplementares e complementares** Ao estudar a trigonometria no triângulo retângulo, as razões trigonométricas foram definidas para ângulos agudos e foram trabalhadas situações-problema referentes a triângulos retângulos. Nesta unidade de trabalho, pretende-se ampliar esse estudo, estendendo a resolução de triângulos para os acutângulos e os obtusângulos, uma vez que as propriedades a serem estudadas valem para triângulos quaisquer. Os alunos já trabalharam com as razões trigonométricas relacionadas a ângulos agudos e seus complementares. No entanto, é interessante que, inicialmente, através do triângulo retângulo, o professor retome os senos e cossenos de ângulos complementares (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar e o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complementar), o que também pode ser reforçado, explorando a tabela de razões trigonométricas. Dado o triângulo ABC, retângulo em A, lembrar que: $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})=180°$ $m(\hat{B})+m(\hat{C})=180°-m(\hat{A})$ $m(\hat{A})=90°$ $m(\hat{B})+m(\hat{C})=180°-90°$ $m(\hat{B})+m(\hat{C})=90°$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 262 24/8/2009 15:53:55

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Calcular senos e cossenos de ângulos complementares e suplementares.</td><td>Seno e cosseno de ângulos complementares e suplementares</td><td>

Logo $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares.
m($\hat{B}$) = 90º - m($\hat{C}$) e m($\hat{C}$) = 90º - m($\hat{B}$)

Considerando a, b, c, as medidas da hipotenusa e dos catetos, pode-se escrever.



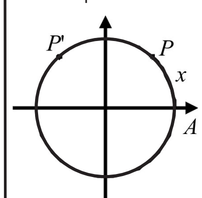
$$sen\hat{B} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$sen\hat{C} = \frac{c}{a} \quad ; \quad \cos\hat{C} = \frac{b}{a} \quad \text{logo:}$$

Observando e comparando as igualdades, tem-se que:

$$sen\,\hat{B} = \cos\,\hat{C} \qquad\qquad sen\,\hat{C} = \cos\,\hat{B}$$
$$sen(90 - \hat{C}) = \cos\,\hat{C} \quad \text{e} \quad \cos(90 - \hat{B}) = \cos\,\hat{B}$$
$$sen\,\hat{C} = \cos\,\hat{B} \qquad\qquad \cos\,\hat{C} = sen\hat{B}$$
$$sen(90 - \hat{B}) = \cos\,\hat{B} \qquad\qquad \cos(90 - \hat{B}) = \cos\,\hat{C}$$

A partir do estudo das funções trigonométricas no círculo trigonométrico, que foram trabalhadas com o dispositivo prático, na redução ao 1° quadrante, foi visto que dois ângulos são suplementares se sua soma é 180° ou um ângulo raso ou 2 ângulos retos e que se um ângulo Â for agudo, seu suplementar da forma 180° - Â é obtuso. Relacionando os ângulos centrais de um círculo trigonométrico aos seus arcos de circunferência, tem-se que os arcos de 2° quadrante têm senos positivos e cossenos negativos. Assim:



$$\overset{\frown}{AP} = x$$

$$\overset{\frown}{AP'} = 180° - x \quad ou \quad \pi - x$$

$$senx = sen(180° - x) \quad e \quad \cos x = -\cos(180° - x)$$

</td></tr>
<tr><td>Deduzir, interpretar e utilizar modelos para a resolução de problemas que envolvam medida e cálculo de distâncias inacessíveis.</td><td>Medição de distâncias inacessíveis</td><td>

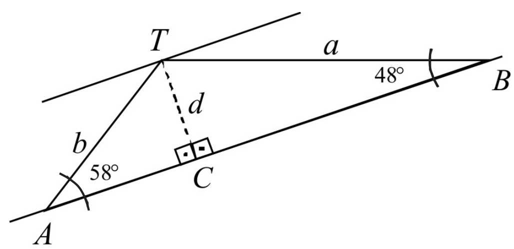
Resolução de triângulos quaisquer

Conhecendo as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, resolvem-se problemas a eles relacionados.

Tanto as relações métricas como as trigonométricas já foram trabalhadas em séries anteriores, quando se enfatizam tanto o Teorema de Pitágoras e suas várias aplicações, bem como o Teorema de Tales e suas aplicações nos triângulos e em diferentes situações do cotidiano ao longo da história.

Sugere-se que o professor inicie este trabalho, retomando as relações métricas e trigonométricas com situações-problema

</td></tr>
</table>

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver situações-problema que envolvam a resolução de triângulos retângulos. Resolver problemas relacionando e generalizando a lei dos senos e a lei dos cossenos.	Linguagem e simbologia Matemática	que, na medida do possível, refiram à realidade dos alunos ou a algum evento ou acontecimento da sua região, como a construção de um prédio, de uma estrada ou de uma ponte e tantos outros. Pode-se, nesta etapa, questionar os alunos como, por exemplo, os engenheiros conseguem calcular alturas e distâncias que possibilitam a construção de prédios, estradas, túneis, viadutos, sem medir diretamente as distâncias. Faz-se necessária a retomada de questões referentes a ângulos e a triângulos, como sua classificação e, ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, que a partir da relação de Pitágoras, conhecendo os três lados de um triângulo, tomando o maior lado, pode-se classificá-los em acutângulos ($a^2<b^2+c^2$); retângulos ($a^2=b^2+c^2$) ou obtusângulos ($a^2>b^2+c^2$); que, em um triângulo qualquer, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e que qualquer lado de um triângulo é maior que a soma dos outros dois, e outras a critério do professor. Quanto às simbologias matemáticas, retomar que os pontos (vértices de um polígono) são representados por letras maiúsculas, que cada lado de um triângulo é nomeado, em letra minúscula com a letra referente ao vértice, que também nomeia o ângulo. Então questionar: Como resolver problemas que envolvem triângulos que não são retângulos? Pode-se partir do seguinte problema:  Por uma estrada passa a rede de fios de luz de uma região. O senhor João, dono da Fazenda Tordilho Negro, quer levar luz elétrica para a sua casa que fica no ponto T, mas não quer cortar nenhuma árvore. Levou seu problema a um engenheiro que lhe apresentou o esquema anterior e esclareceu que os fios de luz deveriam ser conectados à rede no ponto A e teriam o comprimento do segmento AT. Disse, também, que, para calcular a quantidade necessária de fio, ele teria que medir a distância da rede elétrica de A até B, pontos a partir dos quais se avista a casa do senhor João sem a interferência de nenhuma árvore e que, com o teodolito, ele mediria os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Que conhecimentos matemáticos serão utilizados pelo engenheiro, para que ele possa resolver o problema do senhor João? Ele, no esquema anterior, traçou o segmento TC de medida

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Lei dos senos Resolução de triângulos quaisquer	

d, perpendicular a $\overline{AB}$, formando dois triângulos retângulos em C: ATC e BTC.

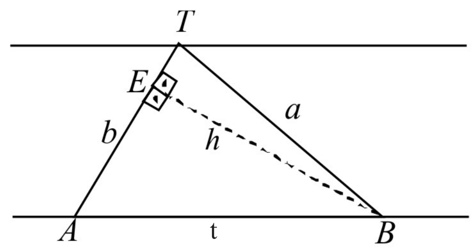
Considerando que o lado AT tem medida b, e o lado BT tem medida a, e conhecendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ele determinou que $sen\hat{B} = \frac{d}{a}$ e $sen\hat{A} = \frac{d}{b}$, verificando que $d = a \cdot (sen\hat{B})$ ou que $d = b \cdot (sen\hat{A})$.

Comparando as duas igualdades, ele pode afirmar que $a \cdot (sen\hat{B}) = b \cdot (sen\hat{A})$.

Dividindo ambos os termos da igualdade sucessivamente por $(sen\hat{A})$ e por $(sen\hat{B})$, fazendo os devidos cancelamentos, ele determinou a seguinte igualdade:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad (\text{I})$$

Não conseguindo medir as distâncias a e b, ele teve que repetir o raciocínio em função da distância AB que ele conhecia. Assim, ele fez o seguinte esquema:



Ele traçou a altura h de B em direção a AT, determinando os triângulos TBE e ABE, retângulos em E, de medidas a, b e t.

Determinou: $sen\hat{T} = \frac{h}{a}$ e $sen\hat{A} = \frac{h}{t}$

Assim: $a \cdot (sen\hat{T}) = h$ ou $t \cdot (sen\hat{A}) = h$,

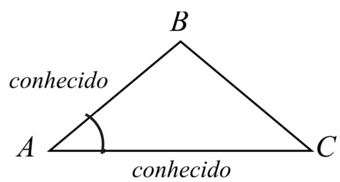
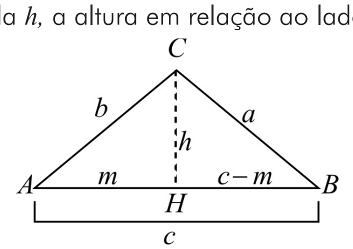
logo $a \cdot (sen\hat{T}) = t \cdot (sen\hat{A})$

Dividindo ambos os termos sucessivamente por $(sen\hat{T})$ e $(sen\hat{A})$, temos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{t}{sen\hat{T}} \quad (\text{II})$$

Considerando os resultados I e II, ele pôde escrever $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{t}{sen\hat{T}}$ e calculou a distância AT, sabendo que a medida de A até B é 300 m (t) e que a medida do ângulo T é 78º (180º - 44º - 58º = 78º)

$$\frac{a}{sen58°} = \frac{b}{sen44°} = \frac{300}{sen78°}$$

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer e aplicar a lei dos senos e dos cossenos na resolução de problemas que envolvam a resolução de triângulos quaisquer.	Lei dos cossenos	Buscando os senos dos ângulos nas tabelas trigonométricas e escolhendo a proporção conveniente, temos: $\frac{b}{sen44°}=\frac{300}{sen78°}$ $b=\frac{300\cdot sen44°}{sen78°}\cong\frac{300\cdot 0{,}6947}{0{,}9781}\rightarrow b\cong 213$ logo $AT\cong 213m$ Explorando a igualdade $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{t}{sen\hat{T}}$, os alunos poderão, com a orientação do professor, concluir que as medidas dos lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos de seus ângulos opostos. O professor pode, então, informá-los de que essa igualdade é conhecida como lei dos senos, enunciando-a: Em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Propor que os alunos resolvam alguns problemas em que se aplique a lei dos senos. Ao fazer a correção coletiva dos problemas, explorar com os alunos o fato de que, para aplicar a lei dos senos em um triângulo qualquer, é necessário que se conheça pelo menos dois ângulos e a medida de um lado do triângulo ou a medida de dois lados e o ângulo oposto a um deles. Perguntar aos alunos: Se, por outro lado, forem conhecidas as medidas de dois lados e o ângulo por eles formado?  Se o triângulo for acutângulo: Dado o triângulo acutângulo ABC. Traçar $\overline{CH}$ de medida *h*, a altura em relação ao lado AB.  O triângulo ficou dividido em dois triângulos retângulos em H. Aplicando a relação de Pitágoras nos lados dos triângulo BCH e ACH, de medidas *b, h, a, m* e *c-m*, tem-se o seguinte sistema de equações de 2° grau: $\begin{cases} a^2=h^2+(c-m)^2 \\ b^2=h^2+m^2 \end{cases}$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 266 24/8/2009 15:53:56

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem

Isolando o valor de h^2 na 2^a igualdade temos: $h^2 = b^2 - m^2$

Substituindo esse valor na 1^a igualdade e calculando o produto notável temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + 2cm + m^2$$

Reduzindo os termos semelhantes temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2 - 2cm + c^2$$

Observando o triângulo retângulo ACH, temos que $\cos \hat{A} = \dfrac{m}{b}$ logo $m = b \cdot \cos A$, substituindo o valor de m na igualdade acima, temos:

$$a^2 = b^2 - 2c(b\cos A) + c^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos A + c^2$$

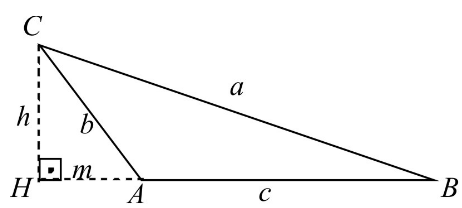
Conhecidos os lados b e c e o ângulo A, analogamente tem-se:

$$b^2 = a^2 - 2ac\cos \hat{B} + c^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ac\cos \hat{C} + b^2$$

Se o triângulo for obtusângulo:

Dado o triângulo obtusângulo ABC, traçar $\overline{CH} = h$ a altura em relação ao lado AB (lembrar que a altura neste caso é um segmento externo), determinando o triângulo CHA, retângulo em H e de medidas a, b, c, h, m.



Consideremos os triângulo BHC e AHC, ambos retângulos em H. Aplicando a relação de Pitágoras, temos que o sistema:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (m+c)^2 \\ b^2 = h^2 + m^2 \end{cases}$$

Isolando $h^2 = b^2 - m^2$ e substituindo na 1^a igualdade, tem-se:

$$a^2 = b^2 - m^2 + m^2 + 2cm + c^2$$

Reduzindo os termos semelhantes: $a^2 = b^2 + 2cm + c^2$

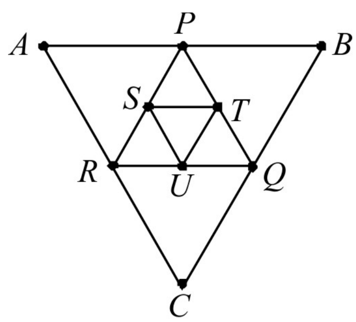
Observando o triângulo CHA, temos que $\cos(\pi - \hat{A}) = \dfrac{m}{b}$, logo

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 267 24/8/2009 15:53:56

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Resolver situações-problema envolvendo resolução de triângulos quaisquer.		$m = b \cos(\pi - \hat{A})$. Como $\hat{A}$ e $(\pi - \hat{A})$ são ângulos complementares, temos que: $\cos\pi - \hat{A} = -\cos\hat{A}$ log $m = b \cdot \cos\hat{A}$ ou $b\cos\hat{A}$ Substituindo m na igualdade acima, temos: $a^2 = b^2 + 2 \cdot c \cdot (-b\cos\hat{A}) + c^2$ $a^2 = b^2 - 2bc\cos\hat{A} + c^2$ Conhecidos os lados b e c e o ângulo A, analogamente, temos: $a^2 = b^2 - 2ac\cos\hat{B} + c^2$ $c^2 = a^2 - 2ab\cos\hat{C} + b^2$ Se o triângulo for retângulo em A, por exemplo, como $\cos 90° = 0$, $a^2 = b^2 - 2bc\cos\hat{A} + c^2$, reduz-se a $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, o que se pode concluir? Que para qualquer caso em que, de um triângulo se conheça um ângulo e os dois lados que o formam, aplica-se a lei dos cossenos: Em todo o triângulo, o quadrado da medida de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado. Ao enunciar a lei dos cossenos, os alunos podem resolver problemas envolvendo triângulos quaisquer em que se usem, além das leis dos senos e dos cossenos, a relação de Pitágoras e outras relações métricas e trigonométricas. Fica a cargo do professor decidir sobre o aprofundamento desse tema, explorando formas de calcular a área de triângulos quaisquer relacionadas a conceitos trigonométricos, chegando à fórmula de Herão.
Reconhecer e enunciar propriedades das Progressões Aritméticas e Geométricas.	Propriedades das Progressões Aritméticas	**A soma dos termos de Progressões Aritméticas e Geométricas** Mesmo que os alunos já tenham trabalhado com Progressões Aritméticas e Geométricas, sugere-se que a soma dos termos de Progressões Aritméticas, em especial, sejam abordadas no 2º ano do ensino médio, dando ênfase às questões de infinito e de limites. Para iniciar o trabalho, sugere-se que os alunos realizem a atividade 3 do Caderno do Aluno de 2º e 3º anos que explora sequências e retoma os conceitos de Progressões Aritméticas e Geométricas. Soma dos n termos de uma Progressão Aritmética. Observar com os alunos igualdade da soma dos termos equidistantes dos extremos de uma Progressão Aritmética. $\underbrace{1, \underbrace{2, \overbrace{3, 4, 5, 6, 7, 8}^{11}, 9}_{11}, 10}_{11}$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 268 24/8/2009 15:53:56

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Identificar regularidades em sequências e expressá-las em linguagem algébrica. Determinar a soma dos n termos de uma Progressão Aritmética.		Como se poderia calcular a soma desses termos sem somá-los 1 a 1? Após discussões, os alunos poderiam chegar à conclusão de que a soma dos 10 termos dessa Progressão Aritmética seria dez vezes o $\frac{a_1 + a_{10}}{2}$. Generalizando para n termos, teríamos $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$, pois, pela propriedade de $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a}{2} \cdot b = a \cdot \frac{b}{2}$, pode-se inferir que $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$. Neste processo, poderão surgir questionamentos dos alunos que devem ser incentivados, por exemplo, o que acontece se têm um número ímpar de termos? O do meio fica dobrado? Se o professor também levar os alunos a entenderem que a soma dos n termos é n vezes a média aritmética dos termos equidistantes dos extremos, facilmente, os alunos poderão entender que o termo central é a média aritmética da soma de quaisquer dois termos equidistantes.
Acompanhar passo a passo a demonstração da fórmula da soma dos n termos de uma Progressão Geométrica de um número finito de termos.	A soma dos termos de uma Progressão Aritmética	A soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica de razão maior que 1 (portanto, crescente) pode ser, passo a passo, discutida e demonstrada. Este é um momento de trabalho de grande grupo. Numa aula dialogada, a demonstração da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica, como a que segue, pode ser discutida com os alunos. Considere a P.G. $a_1, a_2, a_3, \ldots$, e seja, $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ (\mathrm{I})$ Multiplicando-se (I) por q, temos: $qS_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q$ E escrevemos: $qS_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n q \ (\mathrm{II})$ Subtraindo-se (II) de (I), obtemos: $S_n - qS_n = a_1 - a_n \cdot q$ $S_n(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q$ $S_n(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$ $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \rightarrow \quad S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$
Construir e analisar Progressões Geométricas de razão maior que 0 e menor que 1 e explorar e compreender questões de convergência e de limites.	A soma dos n termos de uma Progressão Geométrica finita de razão maior que 1 $(q>1)$ $S_n = \frac{a_1(1-q^n}{1-q}$	*Adaptado de* Referencial Curricular do Estado de São Paulo, *1ª série, 2008, p. 28.* "Explorar Progressões Geométrica infinitas de razão maior que zero e menor que 1 $(0<q<1)$ é uma oportunidade única de proporcionar que os alunos se defrontem com as questões de convergência, de limite e de infinito" (PCN+, 2001). Por exemplo, $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$, nessa sequência infinita de razão $\frac{1}{2}$, como se pode observar, os termos ficam

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Relacionar conhecimentos algébricos e geométricos. Determinar o limite e a soma dos n termos de uma Progressão Geométrica de razão maior que zero e menor que 1	Conexão com sequências e geometria O limite da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica de razão maior que 0 e menor que 1 $(0<q<1)$ $\lim\limits_{n\to 0} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ A soma dos termos de uma Progressão Aritmética	cada vez menores e se aproximam de zero. Com isso, é possível calcular a soma dos infinitos termos dessa Progressão Geométrica. Sugere-se o estudo da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita com razão situada no intervalo $0 < q < 1$. Propor aos alunos um problema como o do exemplo a seguir: O triângulo ABC da figura é equilátero de lado 1. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.  Para a resolução, o professor poderia propor aos alunos algumas questões como: a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ? b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU? c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e mais outros dois triângulos construídos segundo o mesmo critério. Para essas questões, é importante que o professor discuta, inicialmente, que, dado um triângulo ABC, se P e Q são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, então PQ é paralelo a AC e sua medida é igual à metade de AC. O mesmo vale para os demais lados do triângulo PQR, visto que o triângulo ABC é equilátero. Dessa forma, os perímetros dos triângulos da figura são $3\ \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Desse modo, a sequência de triângulos assim construídos terá perímetros respectivamente iguais a: $3\ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16} \ldots$ Após esse trabalho inicial, sugere-se que os alunos calculem as somas dos perímetros: dos dois primeiros triângulos, dos três primeiros e assim por diante.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 270 24/8/2009 15:53:57

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem

Assim, os alunos obteriam as somas:

$$S_1 = 3$$

$$S_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$S_3 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$$

$$S_4 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{45}{8} = 5{,}625$$

$$S_5 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{93}{16} = 5{,}8125$$

$$S_6 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{189}{32} = 5{,}90625$$

$$S_7 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} = \frac{381}{64} = 5{,}953125$$

Após esses cálculos, o professor poderia solicitar que os alunos fizessem suas conjeturas a respeito deles, procurando responder à questão: o que acontece à soma, se as parcelas forem aumentando?

É importante discutir com os alunos que as somas aumentariam com o acréscimo de novas parcelas, mas esse crescimento é cada vez menor.

O uso da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica pode ampliar essa discussão:

$$S_n = 3\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Convém destacar que, à medida que o valor de n cresce, o valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ vai diminuindo e tendendo a zero. Veja, por exemplo, que o valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ é igual a $0{,}000030517$. Para um n muito maior esse valor estará muito próximo de zero.

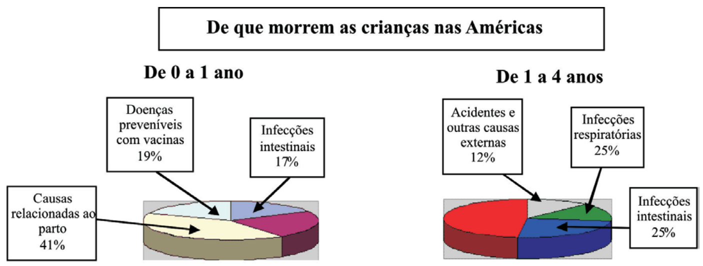
Logo, o valor de $6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ que é a soma de $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots = 6$, ou seja, o limite da soma quando n tende a infinito é 6.

Dessa forma, quando temos uma Progressão Geométrica infinita cuja razão é um número q tal $0<q<1$, podemos utilizar $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ visto que na fórmula $S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q}$ o valor de q^n tende a zero quando n tende a infinito.

Caderno do Professor – São Paulo – 1ª série – p. 29.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 271 24/8/2009 15:53:57

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Compreender o conceito de dízima periódica e encontrar sua geratriz. Expressar uma dízima periódica como a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica de razão maior que zero e menor que 1.	Geratriz de dízimas periódicas	Propor aos alunos que resolvam o problema a seguir, o qual envolve o cálculo da geratriz de uma dízima periódica e que é um problema de aplicação da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica de razão maior que zero e menor que 1. Exemplo: O desenvolvimento das situações de aprendizagem que levaram à resolução do problema anterior proporcionam que o professor explore com seus alunos a forma de encontrar a geratriz de uma dízima periódica (simples ou composta) que pode ser decomposta na soma dos termos de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{100}$. Determine a geratriz da dízima $1{,}777...$ O aluno deve ser convidado a decompor a dízima em uma soma: $1{,}777... = 1 + 0{,}777... = 1 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007....$ Depois, sugira que se escreva essa soma utilizando frações para representar os números envolvidos. Assim: $1{,}777... = 1 + 0{,}777... = 1 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + ... =$ $= 1 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1.000} + ...$. Desse modo, os alunos poderão concluir que as $\frac{7}{10}, \frac{7}{100}, \frac{7}{1.000}, ...$ formam uma Progressão Geométrica infinita de razão $q = \frac{1}{10}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{7}{10}$. Assim, aplicando a fórmula do limite da soma $S_n = \frac{a_1}{1-q}$, obtém-se: $\lim S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$ Desse modo, a geratriz de $1{,}777...$ será $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ *Caderno do professor São Paulo, 2008, p. 31.*
Ler, construir e interpretar gráficos de barras, linhas e setores. Buscar informações em jornais e revistas.	Gráficos e tabelas	**Estatística** Os gráficos, os quadros e as tabelas constituem instrumentos de representação gráfica dos dados coletados em pesquisas de opinião pública, eleitorais, da área da economia, da saúde, da agricultura, entre outras. Os gráficos, em especial, facilitam a análise dos resultados e, como os quadros e as tabelas, permitem a rápida interpretação dos dados e auxiliam na forma de decisão. Há vários tipos de gráficos que são colocados na mídia para que os leitores os interpretem e melhor avaliem as pesquisas feitas.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Ler e interpretar quadros, tabelas e gráficos de diferentes tipos. Ler e interpretar dados e informações apresentados em diferentes linguagens e informações, compreendendo-as e criticando-as.		Realizar com os alunos a seguinte atividade: **Mortalidade infantil** "Um milhão de crianças morre anualmente por problemas facilmente evitáveis, como doenças perinatais e infecções intestinais e respiratórias e mais de 6 milhões que conseguem sobreviver sofrem de algum grau de desnutrição. Apesar de classificar a situação das crianças como "péssima", o representante do Unicef no Brasil, Agop Kayayan, 49, disse haver razões para otimismo. Kayayan acredita que com vontade política e mobilização social existem recursos públicos suficientes para se reverter o quadro investindo-se em educação básica, saneamento e demais cuidados primários de saúde."  *Folha de São Paulo 10/11/92* Solicitar que os alunos, observando e comparando os gráficos, respondam as questões abaixo: a) Qual a maior causa de mortalidade de crianças de 0 a 1 ano? E a menor? b) Em que faixa etária o percentual de morte por infecção intestinal é maior? c) A grande faixa sem indicação no gráfico de 1 a 4 anos representa o percentual de crianças que morrem de doenças não respiratórias nem intestinais. Este percentual é maior ou menor do que a metade das crianças representadas no gráfico? d) Numa população onde morrem 2 milhões de crianças de 0 a 1 ano, o que seria o maior, o número de crianças que morrem de infecções intestinais ou de doenças que podem ser evitadas por vacinas? e) Emitir um parecer sobre o otimismo de Kayayan, justificando seu parecer. Se você compartilha ou não desse "otimismo", diga a sua posição pessoal frente à Mortalidade Infantil nas Américas. Solicitar que cada aluno faça um álbum com diferentes tipos de gráficos retirados de jornais e revistas e, para cada um deles, elabore duas ou três perguntas que auxiliem a interpretá-los. Os alunos devem indicar as fontes de pesquisa, nome do jornal ou revista, data, página. Socializar as pesquisas dos alunos: cada aluno pode apresentar um tipo diferente de gráfico contendo as perguntas elaboradas. Encorajar o grupo a enriquecer as perguntas de seus colegas. Ao final ou durante as apresentações, deve-se discutir

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 273 24/8/2009 15:53:58

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer quadros, tabelas e gráficos como fontes de informações que possibilitem o conhecimento da realidade. Compreender e emitir juízos sobre informações. Identificar formas de coletar, registrar ou identificar dados numéricos ou informações. Ler, construir e interpretar quadros e tabelas. Diferenciar variáveis qualitativas e quantitativas.	Coleta, organização, interpretação e análise de dados Linguagem e vocabulário da Estatística Variável qualitativa e quantitativa	qual o tipo de gráfico que melhor se presta para cada situação. O professor deve estar atento para perceber se os diferentes tipos de gráficos apareceram nas pesquisas dos alunos. Ele deve estar preparado para apresentar os que não foram apresentados, em especial os histogramas, que são formas de representar os dados assumidos por uma variável quantitativa e muito usados em Estatística. Se possível, assistir com os alunos ao documentário *Uma verdade inconveniente*, de Al Gore, e comentar as questões por ele propostas, destacando a quantidade e os diferentes tipos de gráficos utilizados na sua argumentação. Após um estudo de gráficos, propõe-se o estudo de outros temas da Estatística. **Medidas de centralidade** Toda a pesquisa nas mais variadas áreas, geralmente, consta de uma etapa de coleta de dados, bem como o processamento e análise das informações obtidas. A Estatística, um ramo da Matemática de origem muito antiga, desenvolveu um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa. É conveniente proporcionar aos alunos oportunidades de coletar e organizar dados, a fim de se apropriar da linguagem e de alguns procedimentos de análise das informações. Sugere-se incentivar os alunos a fazerem uma pesquisa na turma sobre algum tema de seu interesse. Após decidirem o tema, eles devem escolher alguns aspectos que irão pesquisar que serão os objetos de estudo. Exemplificando: Os alunos decidem que querem fazer o perfil da sua turma, relacionado à aula de Matemática. Eles escolhem cinco objetos de estudo: sexo, idade, gosto por Matemática, nota que obteve no trabalho e nota que obteve na última prova de Matemática. Alguns farão coleta de dados. Num momento coletivo, os dados serão organizados em um quadro desenhado em papel pardo. Em Estatística, os quadros e as tabelas são muito utilizados para organizar os valores coletados, sejam eles números ou intervalos. Completar o quadro abaixo para os 10 alunos.

Sexo	Idade	Gosto por matemática	Nota do trabalho	Nota da prova	Média final
masculino	16	sim	6,7	6,0	
masculino	16	não	7,8	6,2	
masculino	16	não	9,2	9,0	
feminino	15	sim	3,2	6,0	
feminino	15	não	8,4	8,5	
masculino	15	sim	9,7	9,0	
masculino	17	sim	5,8	6,0	
feminino	15	não	9,8	10,	
masculino	15	sim	7,5	7,0	
feminino	16	sim	8,6	8,0	

Esclarecer aos alunos que os cinco objetos de estudo são as variáveis. As variáveis que se referem ao sexo, ao gosto

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Fazer estimativas a partir de dados organizados. Comprovar ou refutar estimativas.	Média aritmética	por matemática, isto é, que se referem a uma qualidade, atributo ou preferência dos alunos, são chamadas de variáveis qualitativas. As idades e as notas que tiraram no trabalho e na prova apresentam como resposta um número como medida, essas variáveis são quantitativas. Com os dados do quadro, pode-se propor aos alunos que, para cada variável quantitativa, procurem estabelecer medidas (números) que sejam representativas, isto é, que resumam como se distribuem os valores de tais variáveis. Uma dessas medidas é a média aritmética. A média aritmética é usada como medida de tendência central como forma de, por meio de um único número, dar uma ideia das características de um grupo de números.
Compreender e utilizar adequadamente conceitos de média, moda e mediana.	Média aritmética ponderada	A partir das idades dos alunos, pode-se estabelecer uma única idade que caracteriza o grupo todo. Solicitar aos alunos que estimem qual a idade média do grupo. Após, discutir com eles que cálculo poderiam fazer para estabelecê-la. $MA=\frac{16+16+16+16+15+15+15+15+15+17}{10}=\frac{156}{10}=15{,}6$ Discutir o resultado e verificar quem fez a melhor estimativa e em que posição cada um se encontra em relação à média da turma. Pode-se, também, calcular a média aritmética do teste, da prova e da média final. Desafiar os alunos a calcularem a sua média final, sabendo que o teste tem peso 1 e a prova tem peso 3. Cada aluno, discutindo com seu colega, deve estimar sua média e calculá-la. Esta média é chamada de média aritmética ponderada. Média do aluno: $1=\frac{1\times 1{,}67+3\times 6{,}0}{4}=\frac{6{,}7+18{,}0}{4}=6{,}175$ A forma de calcular a média ponderada deve ser discutida e os alunos devem argumentar sobre as suas hipóteses. Pode-se, também, discutir um critério de arredondamento.
Pesquisar o significado de termos da Estatística e elaborar um glossário. Reconhecer a importância da Estatística no conhecimento da realidade.	Linguagem da estatística	Depois de trabalhar com média aritmética e média aritmética ponderada, solicitar que os alunos façam uma pesquisa em livros didáticos indicados, questionando: Haverá outras medidas representativas de tendência central que auxiliam a interpretar dados coletados? Quais são? Exemplifique-as. Nessa pesquisa, deverão aparecer os conceitos de mediana e moda, que devem ser discutidos a partir dos exemplos coletados. Solicitar que os alunos façam um glossário de termos estatísticos. Socializar no grande grupo as pesquisas dos alunos e fazer um texto coletivo que sistematize os conhecimentos do grupo, trabalhando com a linguagem da Estatística, sistematizando as

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Compreender o desenvolvimento da Estatística como uma construção do homem a partir de suas necessidades. Identificar variáveis e classificá-las em quantitativas e qualitativas. Reconhecer e diferenciar população e amostra.	Variável Variáveis quantitativas e qualitativas População Amostra	medidas de centralidade, a média aritmética, a mediana e a moda, discutindo que às vezes é mais interessante usar essa ou aquela. Incentivá-los a selecionar e resolver alguns problemas, cuja solução envolva o cálculo de médias aritméticas, mediana e moda. Solicitar que os alunos leiam o pequeno texto a seguir. **A Estatística e os Números** No mundo atual, ouve-se falar muito de dados estatísticos que aparecem na mídia relacionados às questões de trânsito, das estradas, da violência, do clima, do aquecimento global, entre outros temas da realidade. Estes dados são organizados, interpretados e possibilitam o conhecimento do mundo, as críticas e as tomadas de decisão. A Estatística é fundamental para determinadas empresas no controle de qualidade de seus produtos e, na medida em que elas têm que tomar decisões importantes, podem, até, influenciar em seu crescimento ou no decrescimento de sua produtividade. A Estatística é, ainda, fundamental para o estudo do tratamento de doenças, no que diz respeito a testes de eficácia de medicamentos para combatê-los ou das vacinas para preveni-los e em tantas outras áreas como a do trabalho, da economia, da política. Os números, em Estatística, são utilizados para representar e descrever fatos observados em diferentes áreas, principalmente nas científicas e da economia. Os gráficos e as tabelas são elementos dos estudos estatísticos. Em seus primórdios, tais estudos eram muito relacionados à demografia (área da ciência geografia que estuda a dinâmica populacional humana – www.dicionarioinformal.com.br). Por isso, a Estatística adotou termos como população e indivíduo utilizados na demografia, dando-lhes sentido próprio em referentes aos seus estudos. Ao estudar uma população, o pesquisador estabelece um determinado aspecto comum a todos os indivíduos. Este aspecto, que pode ser altura, temperatura, sexo, nacionalidade, chama-se variável. As variáveis podem ser quantitativas quando exigem contagens (idade, altura, temperatura, número de filhos...), e portanto são expressos por números ou intervalos numéricos, ou qualitativas, quando expressam uma qualidade ou atributo (sexo, cor da pele, nacionalidade) e não são expressos por números. As variáveis quantitativas podem ser discretas (aquelas cujos valores podem ser ordenados de modo que entre dois valores consecutivos não pode existir nenhum outro) ou contínuas (aquelas que podem assumir qualquer valor em um intervalo). Após a leitura, discutir coletivamente o texto com os alunos e solicitar que selecionem nos gráficos de seus trabalhos já apresentados, e apresentem em um texto os diferentes tipos de

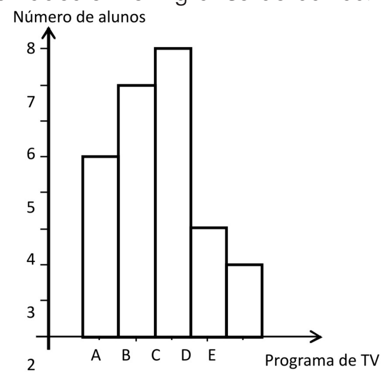
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Frequência	variáveis que foram trabalhadas no texto acima que foi lido e discutido. Solicitar aos alunos que façam uma pesquisa com seus colegas do ensino médio de sua escola. Inicialmente, apresentar aos alunos alguns temas que eles poderiam estudar: a) o peso dos alunos do ensino médio, tendo em vista que há muitos alunos; b) o refrigerante preferido dos alunos do ensino médio; c) a preferência dos alunos do ensino médio por programas de televisão (A, B, C, D, E) selecionados. Os alunos devem, em duplas ou quartetos, escolher um dos temas apresentados ou outro qualquer do seu interesse. Cada tema deve ter uma justificativa e questões a ele relacionadas. Ao iniciar a pesquisa, os alunos perceberão que a população é muito grande. No grande grupo, a questão deve ser discutida, visto que, muitas vezes não é possível analisar toda a população envolvida com o fato que será investigado.
Utilizar conceitos de frequência relativa e absoluta para construir e analisar dados em um gráfico.	Frequência relativa e absoluta	O que o Estatístico faz nesta situação? Ele escolhe uma *amostra*, que é um subconjunto finito da população menor do que a população. A amostra é selecionada, quando a população é muito grande, quando se quer economizar tempo e dinheiro ou quando se quer uma pesquisa não muito detalhada. A amostra pode ser escolhida por sorteio, se os elementos da população já se acham ordenados de alguma forma, em listas, por exemplo. Neste caso, o pesquisador pode optar por escolher alguns da lista, usando um critério. Se a população estiver dividida em subgrupos com comportamentos semelhantes ou diferentes, o número de elementos da amostra pode ser proporcional aos números dos elementos dos subgrupos ou a um número igual de cada grupo.
Resolver problemas que envolvam coleta, organização e representação de dados.		Combinada a forma de selecionar a amostra, cada grupo dependendo de seu tema de pesquisa, combina os aspectos a serem pesquisados (os objetos de estudo) peso, idade, sexo, preferência, e outros, cuidando que haja variáveis qualitativas e quantitativas e os procedimentos de coleta de dados. Nesta primeira etapa, solicitar que os alunos descrevam o processo da sua pesquisa desde a escolha e justificativa do tema, da amostra e dos procedimentos de coleta de dados.
Utilizar porcentagem nos cálculos estatísticos.		De posse dos dados, os alunos serão orientados a fazer a distribuição de frequências, fazendo uma tabulação dos dados, registrando em tabelas o número de vezes que um dado aparece (frequência absoluta - f), ou, calculando percentuais (frequência relativa - fr), farão representações gráficas dos dados.
Expressar dados em quadros, tabelas e gráficos	Tabelas, quadros e gráficos de barra e de setor	Um exemplo: No caso dos programas de televisão A – B – C – D – E, numa amostra de 25 alunos, numa população de 200 alunos, as preferências de cada um dos elementos da amostra era: A B C B A B A B C C C D B C D D E A B C C E B C A.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 277 24/8/2009 15:53:59

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem

No quadro, estão registradas as frequências absolutas (f). Esses dados estão apresentados em um gráfico de barras.

Programa	Número de alunos
A	5
B	7
C	8
D	3
E	2
TOTAL	25



Calculadas as frequências relativas ($fr\%$), pode ser construído um gráfico de setor.

Programa	f	$fr\%$
A	5	20
B	7	28
C	8	32
D	3	12
E	2	8
TOTAL	25	100

A frequência relativa (fr), em cada caso, foi calculada pelo quociente entre a frequência absoluta e o número de elementos da amostra, na forma de percentual.

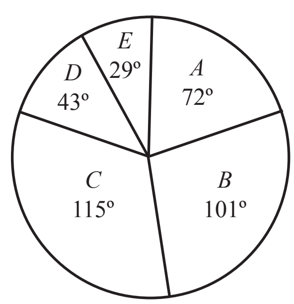
Para A a $fr = \dfrac{5}{25} = 0{,}2 = 20\%$

Para B a $fr = \dfrac{7}{25} = 0{,}28 = 28\%$

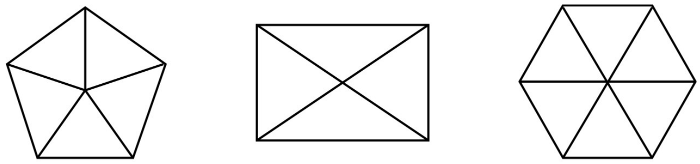
Para construir o gráfico de setor, calculando os ângulos, tem-se para o programa A, usando as frequências relativas em percentuais e considerando-se x a medida em graus de cada ângulo, o que segue:

$$\begin{array}{ccc} 360^{\circ} & \text{———} & 100\% \\ x & \text{———} & 20\% \end{array}$$

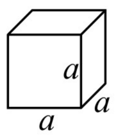
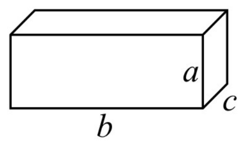
$$x = \frac{360^{\circ} \times 20\%}{100\%} = 72^{\circ}$$



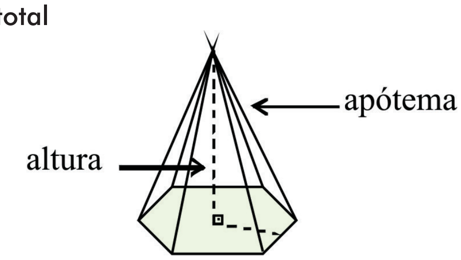
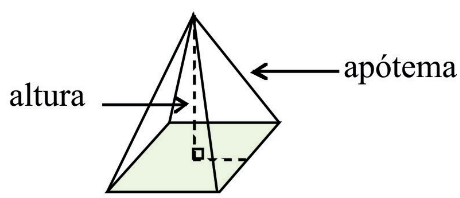
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		Calculando os demais ângulos de setor, constrói-se o gráfico. Os alunos devem ser orientados a fazerem análises dos gráficos, tabelas e quadros. Por exemplo, se 32% preferem C, é possível inferir que, numa amostra de 50 alunos, 16 alunos preferem o programa C? O papel do professor é lançar questões, é problematizar, é encorajar seus alunos a usarem conhecimentos e procedimentos matemáticos para fazer tais análises. Os alunos devem ser incentivados a fazerem cartazes, álbuns com relatórios de suas pesquisas, ilustrando-os com gráficos e com suas análises. O professor pode promover eventos na escola ou a participação em feiras de amostras escolares de tal forma que seus alunos exponham seus trabalhos. O tema distribuição de frequências pode ser ampliado a critério do professor.
Identificar poliedros. Classificar os poliedros, segundo critérios combinados. Identificar os prismas e as pirâmides, explicitando as características que os diferenciam. Reconhecer que a área lateral corresponde à soma das áreas das faces do prisma e que o número de faces laterais corresponde ao número de lados do polígono da base. Deduzir a fórmula para o cálculo da área de um polígono regular.	Prismas e pirâmides	**Geometria plana e espacial** No Caderno do Professor de 2º e 3º anos do ensino médio, na Atividade 1: Poliedros e corpos redondos: qual a diferença?, propõe-se uma atividade prática com o objetivo de explorar diferentes sólidos geométricos, classificando-os em poliedros e corpos redondos. Sugere-se que esta atividade seja realizada para introduzir a Geometria Espacial. Definir os poliedros, solicitar que, dentre eles, os alunos identifiquem os que possuem duas faces congruentes e paralelas (chamadas base), separando-os em um monte, e que separem em outro monte aqueles que têm uma única base, sendo que as demais faces concorrem para um único vértice. Ficam, assim, estabelecidos três montes, sendo que, no terceiro monte estão aqueles que não têm as características do 1º nem do 2º monte.  Nomear os poliedros do 1º monte de prismas, do 2º monte de pirâmides e, no terceiro, estão os sólidos que não são prismas nem pirâmides. Ao final desta atividade, sugere-se que os alunos descrevam em um texto o que aprenderam sobre prismas e pirâmides, desenhando-os bem como suas planificações. **Calculando a área de um polígono regular** Solicitar que os alunos observem os polígonos regulares desenhados abaixo, nomeando-os.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Perceber que todo polígono regular pode ser decomposto em triângulos congruentes, cuja altura corresponde à apótema do polígono. Reconhecer a apótema de um polígono regular como o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados.	Área de um polígono regular com qualquer número de lados Apótema	 Levar os alunos a observarem que todo polígono regular pode ser decomposto em triângulos cuja base corresponde à medida do lado do polígono. Analisar cada triângulo, identificando sua altura e definindo-a como <u>apótema do polígono</u>. (a) Estabelecer com os alunos uma discussão de modo que percebam que, para calcular a área do polígono, basta calcular a área de um dos triângulos e multiplicá-la pelo número de triângulos que o compõem. $A = \text{número de triângulos x área do triângulo}$ $A = \text{número de triângulos x} \left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $A = \underbrace{\text{número de triângulos}}_{n} \text{ x} \left(\frac{b \times a}{2}\right)$ lado do polígono = ℓ $A = \underbrace{n \cdot \ell}_{perímetro\, =\, p} \cdot \frac{a}{2}$ $\quad A = \frac{p}{2} \cdot a$ semiperímetro
Reconhecer que a área total de um prisma corresponde à adição da área lateral com o dobro da área da base. Planificar prismas calculando área da base, área lateral e área total. Reconhecer a área total como a reunião da área das bases com a área lateral do prisma.	Área da base de um prisma Área lateral de um prisma	**Área da base, área lateral e área total de prismas** Disponibilizar aos alunos algumas planificações de prismas, incluindo cubos e paralelepípedos. Solicitar que eles as recortem com muito cuidado e montem os sólidos. Nomear seus elementos, explorando as diferentes bases, as faces laterais, discutindo sobre o que é a área da base, a área lateral e a área total, estimulando-os a calculá-las. Usando régua, solicitar que os alunos encontrem as medidas necessárias para o cálculo da área da base, da área lateral (soma das áreas das faces laterais) e total do prisma (área lateral mais duas vezes a área da base). Explorar a área total de prismas regulares cujos polígonos da base tenham números diferentes de lados, promovendo uma discussão sobre o assunto com os alunos. Desafiá-los a generalizarem a fórmula para o cálculo da área lateral e da área total de um prisma qualquer. Selecionar problemas que sejam resolvidos a partir da área da base, da área lateral e da área total de um prisma.

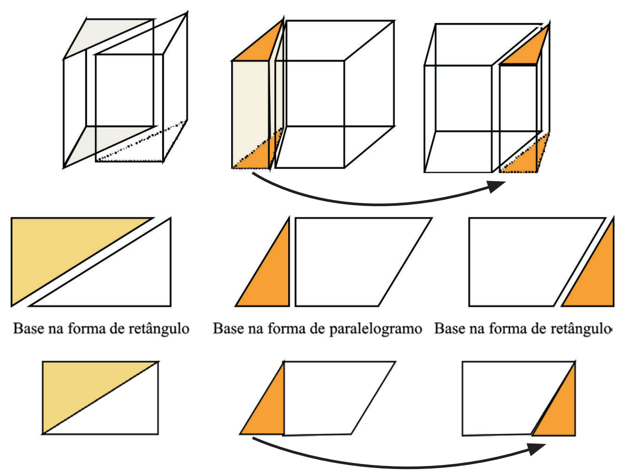
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 280 24/8/2009 15:54:00

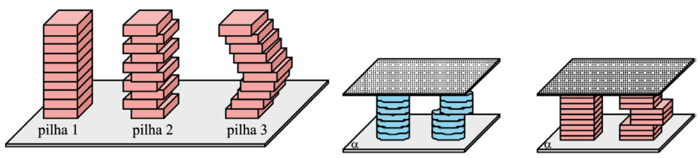
Habilidades/ Competências	**Conteúdos/Conceitos Estruturantes**	**Situações de Aprendizagem**
Reconhecer o cubo como um paralelepípedo especial cuja área total corresponde a seis vezes a área de uma de suas faces e a área lateral quatro vezes a área de uma de suas faces. Reconhecer que o volume do cubo e de um paralelepípedo é igual ao produto da largura pelo comprimento e pela altura.	Volume do cubo e do paralelepípedo	**Volume do cubo e do paralelepípedo** O cubo e o paralelepípedo são prismas com características especiais. O paralelepípedo é também chamado de bloco retangular. A fórmula de cálculo de seu volume é base para o cálculo dos volumes de outros prismas. Atividade prática: Usando o material dourado, verificar quantas vezes um cubinho cabe dentro de um cubo que tem 10 cm de aresta. Fornecer aos alunos a planificação de um paralelepípedo retângulo que tenha 10 cm de comprimento, 5 cm de altura e 3 cm de largura. Solicitar que montem o paralelepípedo e descubram quantos cubinhos cabem no seu interior. Desafiá-los a encontrar uma forma de calcular esse total de cubos, explorando o número de cubos que cabem nas suas três dimensões. Estender o mesmo procedimento para o cubo, chegando à conclusão de que tanto o volume do paralelepípedo como o do cubo é o produto das suas dimensões (largura (c), comprimento (b) e altura (a)). $V_c = a^3$ $V_p = a \cdot b \cdot c$ ou $V_p = A_b \cdot h$ 
Reconhecer as características das pirâmides, construindo-as a partir de suas planificações. Reconhecer o uso dos sólidos geométricos ao longo da história.	Pirâmides	**Pirâmides e seus elementos** Dando sequência ao estudo das pirâmides, é interessante trabalhar aspectos de sua história e de seus elementos. Solicitar que os alunos leiam o texto sobre pirâmides e explorar no grande grupo as questões nele colocadas. **Pirâmides: formas geométricas que encantam o homem** Ao longo da história da humanidade, as pirâmides foram utilizadas como símbolos de grandeza, de poderio, de misticismo, em manifestações artísticas por sua beleza, perfeição e sua solidez. A primeira imagem que nos vem à mente quando falamos em pirâmides é a das pirâmides do Egito, especialmente as de Quéfren, Quéops e Miquerinos. Foram erguidas numa época em que a civilização não contava com equipamentos sofisticados de transporte e medição. Para construir a pirâmide de Quéops, considerada a Grande Pirâmide, de 2500 a.C., foram utilizados mais de dois milhões de blocos de rochas, pesando mais de duas toneladas cada um. Platão (427 a.C. - 347 a.C.) utilizou o tetraedro, uma pirâmide regular cujas faces são quatro triângulos equiláteros, um dos cinco sólidos regulares, chamados Platônicos para representar o fogo, para ele um dos elementos existenciais. No Museu do Louvre, em Paris, com uma forma futurista, em 1988, foi inaugurada uma outra pirâmide. Na época de sua construção, houve uma grande discussão quanto ao

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 281 24/8/2009 15:54:00

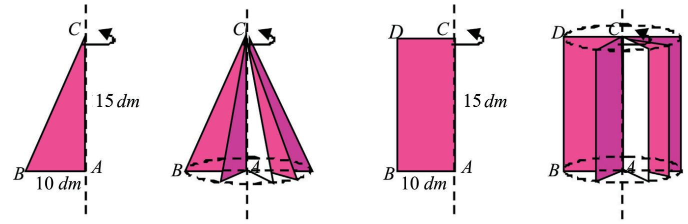
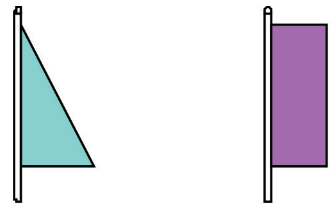
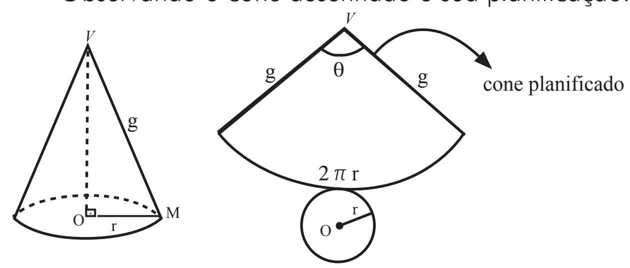
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		seu estilo, considerando o choque entre o contemporâneo e o clássico, pois seu projeto contrastava com o estilo clássico desse museu. No entanto, para muitos, é justamente esse contraste que dá ao lugar um aspecto todo especial e que deslumbra seus visitantes. Essa grande pirâmide de vidro e metal, medindo 20,6 metros de altura, de base quadrangular de 35 metros de lado, possui 603 losangos e 70 triângulos de vidro. O tetraedro regular com os outros polígonos regulares perpetua a obra de Platão. As pirâmides do Egito são monumentos funerários construídos para eternizar os reis, a pirâmide de vidro do Louvre é um objeto de arte, que embeleza a entrada do Museu, onde estão grandes obra da humanidade. Ao longo da história e na atualidade, as pirâmides fascinam e encantam o homem. **Elementos das pirâmides: área da base, área lateral e área total**
Identificar os elementos das pirâmides. Reconhecer e nomear os elementos das pirâmides.	Elementos das pirâmides Apótema da base (a), apótema da pirâmide (A), altura (H), face, faces laterais, vértice da pirâmide	 
Relacioná-los como lados de triângulos retângulos e, a partir do Teorema de Pitágoras, encontrar fórmulas para calculá-los. Fazer demonstrações de expressões analíticas que permitam o cálculo da área lateral e da área total de pirâmides.		Explorando pirâmides regulares de diferentes bases, os alunos poderão perceber que suas faces laterais são triângulos isósceles ou equiláteros e que, diferentemente dos primas, a área lateral das pirâmides será a soma das áreas dos triângulos que são faces laterais cuja altura é o apótema da pirâmide. Por outro lado, ao estudar o seu volume, é necessário que os alunos reconheçam e saibam calcular a altura de uma pirâmide. Assim, é interessante elaborar uma pequena unidade explorando os triângulos retângulos que se encontram ao trabalhar com as pirâmides e que permitem calcular medidas de tais elementos. Solicitar que os alunos construam, com lâminas para retroprojetor ou com outro material similar, pirâmides de diferentes bases, de tal modo que elas fiquem transparentes. Com fios coloridos, representem seus elementos, o apótema da base (a), o apótema da pirâmide (A), a altura da pirâmide (H). A seguir, encontrem os triângulos retângulos cujos lados são tais elementos. A partir da relação de Pitágoras, desafiá-los a expressar fórmulas para calcular o apótema da base, o

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 282 24/8/2009 15:54:00

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Comparar o volume de um prisma com o de uma pirâmide cuja base é congruente à base do prisma. Reconhecer que o volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma se ambos tiverem bases congruentes.	Área lateral, área da base, área total Volume da pirâmide	apótema da pirâmide e a sua altura. Explorados os elementos das pirâmides, sugere-se que sejam trabalhadas situações-problema que levem ao conceito de área lateral, área da base e, área total e que permitam a generalização das formas de cálculo destas áreas. **Volume da pirâmide** Apresentar aos alunos um prisma e uma pirâmide planificados que tenham a mesma base e mesma altura. Pedir que os alunos montem essas figuras tridimensionais, não colando uma das bases, isto é, deixando uma tampa que possa ser aberta. Solicitar que preencham o interior da pirâmide com areia, bolinhas de isopor bem miudinhas e transfiram essa quantidade de material para o prisma. O prisma deve ser totalmente preenchido mesmo que, para isso, os alunos tenham que repetir a tarefa de preencher outra (s) pirâmide com o mesmo material. Desafiar os alunos a observarem o que ocorreu, estabelecendo a relação abaixo: $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\, do\ volume\ do\ prisma$ $\quad V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$
Reconhecer que o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura. $V = A_b \cdot h$		**Volume de um prisma qualquer: outra atividade exploratória da noção de volume de prismas** Explorar um prisma cuja a base é um paralelogramo. Solicitar aos alunos que, usando uma barra de sabão, construam um prisma cuja base é um paralelogramo. Desafiar os alunos a seccionarem o prisma de modo a transformá-lo num prisma cuja base seja um retângulo.  Explorar essa atividade de tal modo que os alunos percebam que tanto um prisma de base retangular como em forma de paralelogramo, calcula-se o volume do mesmo modo: $V = A_b \cdot h$. Sabendo calcular o volume do prisma, entende-se que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume do prisma.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		Uma forma de chegar à fórmula do volume da Pirâmide é a partir de um prisma de base triangular, e seccioná-lo em três pirâmides de mesma base e de mesma altura (isto pode ser feito no concreto a partir de uma barra de sabão). A partir do Princípio de Cavalieri, pode-se concluir que a mesma fórmula que permite calcular o volume de uma pirâmide de base triangular permite calcular o volume de pirâmides não triangulares. **O Princípio de Cavalieri** Este é um princípio que se deve trabalhar com os alunos para generalizar fórmulas de calcular os volumes. Por exemplo, as fórmulas dos volumes dos prismas e dos cilindros podem ser generalizadas a partir da obtenção da fórmula do volume de um paralelepípedo, chamado de bloco retangular. As fórmulas dos volumes das pirâmides de qualquer base podem ser generalizadas, a partir da obtenção da fórmula do volume de uma pirâmide de base triangular. Após conversar sobre isso com seus alunos, solicitar que eles leiam e procurem entender o texto abaixo. **O princípio de Cavalieri** O matemático italiano Francesco Buonaventura Cavalieri (1598-1647) observou que pilhas de objetos idênticos dispostos de maneiras diferentes têm o mesmo volume:  A partir disso, ele enunciou o Princípio de Cavalieri, que diz: se dois ou mais sólidos de mesma altura estão sobre um plano α, e qualquer plano paralelo a α determinar nesses sólidos figuras planas de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume. Discutir com os alunos o Princípio de Cavalieri e, com perguntas e exemplos, proporcionar que eles relacionem a noção de volume com empilhamento de planos.
Entender os cones e os cilindros como sólidos de revolução. Reconhecer os cilindros como corpos redondos, obtidos a partir da	Sólidos de revolução: cones e cilindros Eixos de revolução e elementos dos cones e dos cilindros	**Cones e cilindros** Os cilindros e os cones são corpos redondos, também chamados sólidos de revolução, obtidos fazendo um triângulo retângulo ou um retângulo girar em torno de um lado. A formação de um cone ou de um cilindro retos pode ser imaginada a partir de um triângulo retângulo ou de um retângulo, em movimento de rotação em volta de um de seus catetos (eixo de rotação). Por isso são chamados de cone de revolução e cilindro de revolução.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 284 24/8/2009 15:54:01

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
rotação (revolução) de um retângulo em volta de um de seus lados (eixo de revolução).	Planificação de cones e cilindros	 Solicitar que os alunos recortem em um cartão um triângulo retângulo e um retângulo e que, em um dos catetos do triângulo e em um dos lados do retângulo, colem um espetinho, como mostram as figuras abaixo: 
Reconhecer os cones como corpos redondos, obtidos a partir da rotação (revolução) de um triângulo retângulo em volta de um de seus catetos (eixo de revolução).	Área lateral, área da base e área total dos cones e cilindros	A seguir, eles devem fazer girar as pontas dos espetinhos, um de cada vez, imaginando que figuras ficarão formadas, e descrever a atividade, bem como as figuras formadas, a partir de como foram geradas. Cabe ao professor promover a leitura coletiva de alguns textos e, neste momento, expressar com os alunos os conceitos de cone e cilindro como sólidos de revolução, indicando os eixos de revolução e nomeando os seus elementos.
Reconhecer e nomear os elementos dos cones e dos cilindros. Construir cones e cilindros a partir de sua planificação.		**Elementos dos cones e cilindros** A partir das planificações de cilindros e cones (em lâminas de retroprojetor ou material similar), solicitar que os alunos construam cones e cilindros transparentes e, com fios coloridos, identifiquem seus elementos, nomeando-os, e, aplicando conhecimentos matemáticos já construídos, encontrem fórmulas para calcular tais elementos (como foi feito com as pirâmides). Explorar os sólidos construídos e reconhecer a área da base, a área lateral e a área total de cada um. **Área lateral, área total e área da base de cones e cilindros** A partir da planificação do cilindro, desafiar os alunos a encontrarem uma forma de calcular a sua área lateral e a sua área total.
A partir de um cone construir sua planificação.		Para a área lateral e total do cone sugerimos a realização da seguinte atividade: Observando o cone desenhado e sua planificação. 

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		O cone tem 6 cm de raio e 8 cm de altura. Planificando-o, verifica-se que se obtém um setor circular de raio g (superfície lateral do cone) e um círculo (sua base) de raio 6 cm, conforme mostram as figuras 1 e 2. Discutir com os alunos o significado das letras colocadas nas figuras e desafia-los a construírem um cone a partir de sua planificação, seguindo o seguinte roteiro: 1) Calcular g; 2) Recortar dois círculos de raio r para a base do cone e outro de raio g para obter o setor (a superfície lateral) do cone; 3) Calcular o ângulo θ; 4) No círculo de raio g, tomando o centro como V (vértice do cone), marcar o ângulo θ com o auxílio do transferidor, deixando uma sobra para colagem. O professor, como mediador, deverá lançar o problema e, com questionamentos, estimular os alunos a perceberem que: Para calcular g, os alunos deverão utilizar o Teorema de Pitágoras: $6^2 + 8^2 = g^2 \rightarrow g = 10$. Para o cálculo do ângulo ⌀, usa-se uma regra de três. Para marcar o ângulo ⌀ e delimitar o setor circular, tem-se que, a partir de um raio (g), considerar o centro do círculo como o vértice do cone. comprimento do arco — ângulo central $2\pi g$ — $360°$ $2\pi r$ — θ **Volume do cone e do cilindro:** Apresentar para os alunos um cone e um cilindro planificados que tenham a mesma base e mesma altura e solicitar que construam a figura espacial correspondente, deixando uma tampa que possa ser aberta. Solicitar que comparem as bases dessas figuras, bem como as suas alturas. Preencher com bolinhas miudinhas de isopor ou areia o cone e despejar a quantidade de material, que preenchem seu interior, no interior do cilindro. Analisar de forma cooperativa com os alunos o espaço ocupado por esse material. Essa atividade possibilitará aos alunos concluírem que o volume do cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro desde que tenham a mesma altura e a mesma base. $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$, sendo r (raio da base) e H (altura do cone). Algumas semelhanças entre prismas e cilindros e entre pirâmides e cones permitem que alguns procedimentos para o cálculo de seus volumes sejam análogos. Vimos que, como nos prismas e pirâmides, três cones de areia completam o volume do cilindro de mesmo raio da base e mesma altura. Assim:

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

$$V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$$

$$V_{cone} = \frac{A_b \cdot H}{3} \quad (cilindro)$$

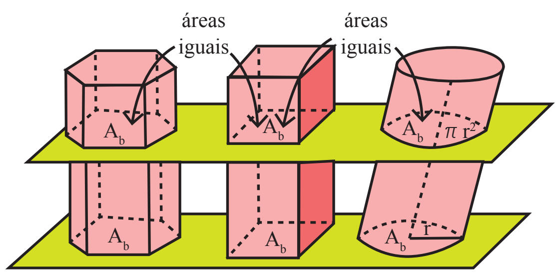
$$V_{cone} = \frac{\pi\, r^2 \cdot H}{3}, \ sendo:$$

H (altura do cone e do cilindro)
r (raio do círculo da base do cone e do cilindro)
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

Aplicações do Princípio de Cavalieri
Volume do prisma e do cilindro

No bloco retangular (paralelepípedo), o volume é obtido pela fórmula $V = A_{base} \cdot H$, onde A_{base} corresponde à área de base e H representa a altura do sólido.

Para calcular o volume de um prisma ou de um cilindro, também utilizamos $V = A_{base} \cdot H$. Isto porque, de acordo com o Princípio de Cavalieri, se dois sólidos tiverem áreas da base e alturas iguais, e qualquer plano paralelo ao plano da base determinar nesses sólidos figuras planas de áreas iguais, seus volumes também serão iguais:



Após a leitura, discutir com os alunos o Princípio de Cavalieri e, com perguntas e exemplos, proporcionar que relacionem a noção de volume com o empilhamento de planos. No livro do aluno 7ª e 8ª séries, na atividade “Empilhando placas e determinando volumes”, é tratada a questão do empilhamento relacionada ao volume.

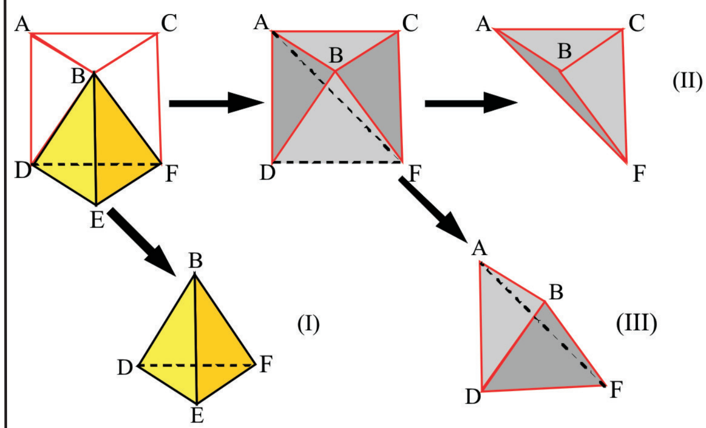
Outra questão a ser discutida e sistematizada é a questão da forma de calcular o volume de prismas com quaisquer bases e do cilindro.
</td></tr>
</table>

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 287 24/8/2009 15:54:03

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

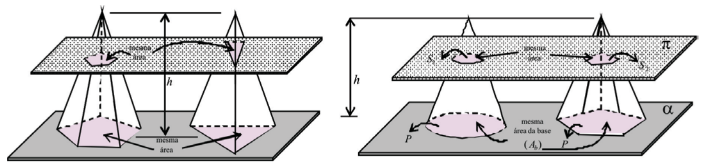
Volume da pirâmide e do cone

Todo prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares, como você vê na sequência de desenhos abaixo:



O volume de cada uma de suas três pirâmides corresponde a $\frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$.

Usando o Princípio de Cavalieri, podemos concluir que a mesma fórmula é válida para calcular o volume de pirâmides não triangulares e o volume de cones:



Assim, para toda pirâmide e para todo cone, temos:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot \mathrm{H}$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot \mathrm{H}$$

Adaptado de *Matemática e Vida*
Bongiovanni, Vissoto, Laureano (1993), p. 177-199.

</td></tr>
</table>

Habilidades/competências, conteúdos/conceitos estruturantes e situações de aprendizagem do 3º ano

Para o 3º ano, este referencial está organizado com o objetivo de revisar, aprofundar, complementar e sistematizar conceitos trabalhados nos anos anteriores de escoalridade, visando ao desenvolvimento de uma competência matemática que possibilite ao aluno conluente do ensino médio tanto continuar seus estudos como ingressar no mundo do trabalho.

Entende-se que as habilidades já desenvolvidas em anos anteriores possibilitam um trabalho mais complexo, formal e sistematizado que pressupõe o uso e o aprofundamento das linguagens e dos processos matemáticos.

Inicialmente, são abordados os Números Complexos, apresentados a partir da resolução de equações de 2º grau, cuja solução não pertence ao conjunto dos Números Reais, bem como de aspectos históricos que evidenciam a necessidade de ampliar os campos numéricos já conhecidos.

Segue-se estudo de polinômios, apresentado como uma construção e um aprofundamento, do que, a esse respeito, já foi estudado no ensino fundamental, e é visto, a partir de funções, um conceito que estrutura a Matemática e é sistematizado no ensino médio.

O estudo das Combinações retoma o Princípio Fundamental da Contagem e caracteriza os agrupamentos que se diferenciam apenas pela natureza dos elementos. O tema é colocado no 3º ano para retomar conhecimentos de Geometria e desenvolver cálculos algébricos.

O estudo das relações entre as funções trigonométricas retoma e aprofunda esse tema.

A Geometria Analítica, tratada formalmente no 3ª ano, é apresentada a partir da localização de pontos em mapas e de aspectos históricos e visa a relacionar a Álgebra e a Geometria amplamente vistas nas séries anteriores, enfatizando para o aluno a importância dessa relação para a Matemática e de sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Nesta unidade, é mencionada a Geometria do Táxi, uma geometria não euclidiana.

A Matemática Financeira aborda temas da realidade, amplamente tratados na mídia e que merecem especial atenção dos professores, na medida em que possibilitam avaliar e resolver situações-problema do dia a dia. Sua inclusão no Referencial Curricular do 3º ano do ensino médio justifica-se também pelo fato de que o estudo da Matemática Financeira contextualiza temas como porcentagem, funções de 1º grau, exponenciais e logarítmica, utilizando-se da leitura e interpretação de quadros, tabelas e gráficos.

No intuito de retomar a Estatística, são trabalhadas as medidas de dispersão que envolvem variáveis quantitativas, além de aprofundam e complementam outros conceitos já trabalhados nas séries anteriores.

A Matemática Financeira é apresentada no 3º ano por tratar-se de um tema de ampla aplicação no cotidiano e por proporcionar a revisão e aplicação de conceitos como porcentagem, funções de 1º grau, exponenciais e logarítmicas.

Para finalizar o ensino médio, é proposta a revisão e a sistematização do estudo das funções e da Geometria, utilizando uma linguagem bem como conceitos mais formais e precisos.

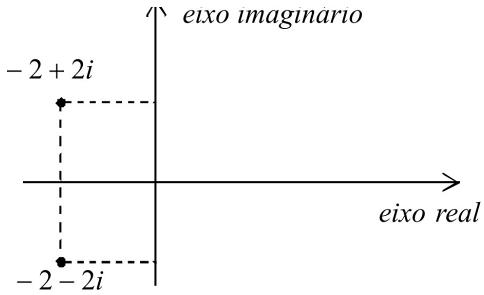
No que diz respeito às funções, o uso da linguagem de conjuntos possibilita a formalização de conceitos a partir da definição do produto cartesiano e das relações. Trata-se de trabalhar com uma linguagem mais formal e com conceitos mais precisos.

Sugere-se que a sistematização da Geometria parta das atividades propostas no Caderno do Aluno de 2° e 3° anos. Neste particular, as definições e classificações são mais formais e detalhadas. O estudo dos Poliedros de Platão proporciona a exploração de uma Geometria Numérica que culmina no estudo da Relação de Euler.

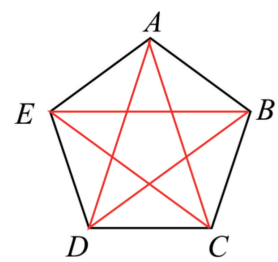
As sequências, as regularidades e os padrões são bastante explorados, bem como a regra de recorrência para chegar às generalizações.

Ainda no que diz respeito à Geometria, pretende-se ampliar o universo de compreensão dos alunos apresentando, no mesmo caderno, uma Geometria não euclidiana: a Geometria Fractal.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer equações de 2° grau que não têm raízes reais. Identificar o contexto histórico em que os números complexos foram desenvolvidos.	Equações de 2° grau que não têm raízes reais	**Números complexos** Entende-se que ao final do ensino médio os alunos tomem conhecimento do Conjunto dos Números Complexos. Sugere-se que eles sejam apresentados a partir de uma situação-problema em um contexto histórico. Solicitar que os alunos resolvam, pela fórmula de Bhaskara, a equação: $x^2 - 4x + 8 = 0$ Ao resolver a equação, os alunos chegarão ao seguinte resultado: $x = \dfrac{+4 \pm \sqrt{-16}}{2}$, o que indicará que, no Conjunto dos Números Reais, essa equação não tem solução, pois não existe um número real r tal que $r^2 = -16$. Como os matemáticos resolveram esta questão com a qual se deparavam em seus trabalhos? Solicitar que os alunos leiam o texto a seguir e tentem achar as raízes da equação no novo conjunto numérico.
Reconhecer um número complexo como a resolução de uma equação de 2° grau. Identificar a parte real e a parte imaginária de um número complexo.	Número complexo na forma $a+bi$	**Surge um novo conjunto numérico** No século XVI, um matemático chamado Bombelli propôs-se a encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Considerando $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e usando as regras da álgebra elementar, ele desenvolveu regras para operar com esses novos números que chamou de impossíveis, fictícios, místicos ou imaginários. Seguiram, então, outros matemáticos que sistematizaram o trabalho com raízes quadradas de números negativos, aplicando em seus trabalhos as propriedades dos números reais sempre que possível. Albert Girard, em 1629, escreveu-as na forma de $a+b\sqrt{-1}$. A partir dessa notação, em 1637, René Descartes denominou o "a" de parte real e o "b" de parte imaginária. Por fim, Leonard Euler, em 1748, usou a letra "i" para representar $\sqrt{-1}$, passando a expressão do tipo $a+b\sqrt{-1}$ a ser escrita como $a+bi$. Karl Fredrich Gauss deu o nome de complexos aos números da forma $a+bi$.
Identificar números complexos.	Números complexos como raízes de uma equação de 2° grau	Ao solucionar a equação, considerando o Conjunto dos Números Complexos, os alunos poderão chegar à conclusão que $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = 4\sqrt{-1} = 4i$, então as raízes da equação desenvolvida serão:
Reconhecer um número real como um número complexo.	Conjunto dos Números Complexos	$x' = \dfrac{-4+4i}{2} = \dfrac{2(-2+2i)}{2} = -2+2i$ $x'' = \dfrac{-4-4i}{2} = \dfrac{2(-2-2i)}{2} = -2-2i$
Identificar que o Conjunto dos Números Reais está contido no Conjunto dos Números Complexos.	Número complexo representado por um par ordenado	Compreendendo historicamente o surgimento do Conjunto dos Números Complexos, é momento de defini-los, identificando sua forma algébrica e retomando os diferentes Conjuntos Numéricos e verificar que os números reais podem ser considerados Subconjuntos dos Números Complexos (C) e que $R \subset C$. Associar cada número complexo a um único par ordenado $Z = a+bi \leftrightarrow (a, b)$ permite corresponder todo o número

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Representar um número complexo como um par ordenado, localizando o plano complexo. Ler e interpretar diferentes linguagens e representações.	Representação de números complexos no sistema cartesiano, o plano complexo	complexo a um ponto do plano chamado complexo ou de Argand-Gauss em que o eixo das abscissas é chamado eixo real e o eixo das ordenadas é chamado eixo imaginário, como mostra a figura a seguir:  Na medida do seu tempo, dos conhecimentos prévios de seus alunos, o professor decidirá sobre a amplitude que dará ao estudo dos números complexos.
Ler e interpretar a linguagem algébrica, utilizando diferentes situações. Reconhecer um polinômio de grau qualquer. Operar com polinômios reconhecendo o grau do polinômio resultante.	Polinômios, classificação e grau de polinômio Notação e linguagem algébrica Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão Grau de polinômio resultante das operações Grau de polinômio resultante das operações	**Polinômios** O estudo dos polinômios pode ser abordado desde as séries iniciais, na medida em que se propõe o trabalho a partir de sequências, em especial numéricas, e que os alunos são incentivados a generalizar tais sequências. Nas séries finais do ensino fundamental, os polinômios e suas operações são sistematizados através de jogos e de trabalhos com materiais concretos. Com o estudo das funções, os polinômios tornam-se familiares aos alunos. Propõe-se um estudo mais aprofundado de polinômios para concluir o ensino médio. Sugere-se que, com o auxílio dos conceitos de perímetro e área de quadrados e retângulos, o professor retome o estudo de polinômios, sua classificação e redução de termos semelhantes (valor numérico da expressão algébrica), aprofundando tais conhecimentos, generalizando definições, analisando o grau dos monômios e dos polinômios. Nesta unidade, as operações com polinômios são definidas com o uso de simbologias relacionadas a funções. Exemplificando: Tomemos os polinômios $A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ e $B(x) = 2x^2 + 2$ Adicionando-os ou subtraindo-os: $A(x) + B(x) = (2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) + (2x^2 + 2) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + 2x^2 + 2 = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ $A(x) - B(x) = (2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) - (2x^2 + 2) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 2 = 2x^3 + x2 + 2x - 1$ Para a adição: a soma de dois polinômios é um polinômio cujos termos são a soma algébrica dos termos semelhantes dos polinômios somados. Para a subtração: a diferença de dois polinômios é o polinômio que se obtém adicionando o 1° ao oposto do 2°. $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$ Para a multiplicação: o produto de dois polinômios, é o polinômio que se obtém multiplicando cada termo do primeiro

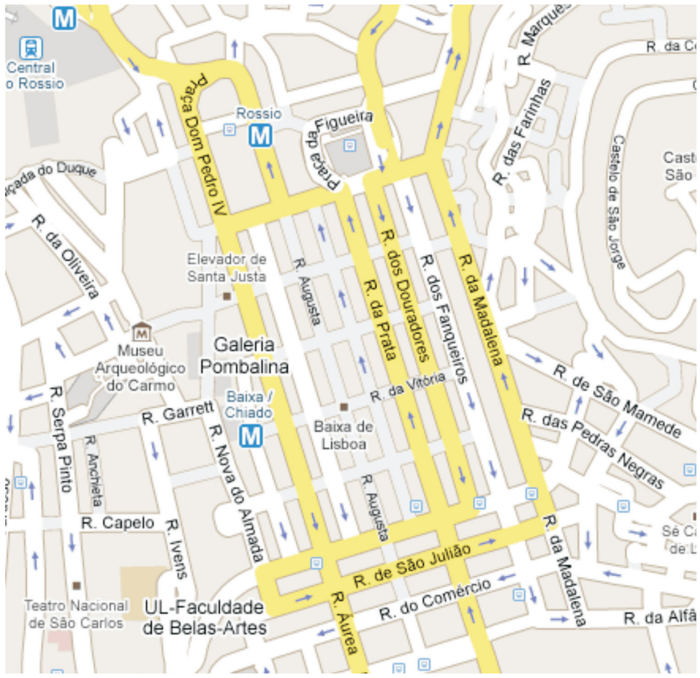
MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 292 24/8/2009 15:54:04

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer e utilizar dispositivos práticos que facilitem divisão de polinômios. Determinar as raízes de um polinômio.	Divisão de um polinômio por *(x - a)* Regra de Briot-Ruffini Divisibilidade por *(x - a)* Raízes de um polinômio	polinômio por todos os termos do 2°, reduzindo os termos semelhantes. Para a divisão: efetuar a divisão do polinômio A(x) pelo polinômio B(x) é determinar um polinômio Q(x) e um polinômio R(x) que: A(x) = B(x) . Q(x) + R(x), com grau R(x)menor que o grau de B(x) ou R(x)=0 (quando a divisão for exata). Usando exemplos e generalizando, o professor deve discutir as operações e seus resultados, analisando os nomes dos termos e dando especial atenção aos possíveis graus dos polinômios resultantes. Sugere-se que seja trabalhado o quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do tipo *(x - a)*, explorando o dispositivo prático conhecido como algoritmo de Briot-Ruffini. Trabalhar, então, a divisibilidade por *(x - a)*, o que permite encontrar as raízes do polinômio e que deve ser explorado a partir de exercícios. Fazer comentários durante as correções que levam a sistematizações, tais como: O resto da divisão do polinômio P(x) por *(x - a)* é P(a). Dizer que *a* é raiz de P equivale a dizer que P(x) é divisível por *(x - a)*.
Reconhecer o Princípio Fundamental da Contagem e utilizá-lo na resolução de problemas. Reconhecer quando dois agrupamentos se diferenciam pela ordem ou pela natureza de seus elementos. Diferenciar arranjos, permutações e combinações simples.	Princípio Fundamental da Contagem Arranjos e permutações simples Noções de combinações simples Diagonais de um polígono	**Combinações** Retomar o Princípio Fundamental da Contagem, bem como alguns problemas de arranjos e permutações simples, discutindo com os alunos durante a correção dos exercícios, chamando a sua atenção para a questão da ordem e da natureza dos elementos dos agrupamentos. Neste momento, se os alunos nunca tiverem trabalhado com o Princípio Fundamental da Contagem ou com arranjos e permutações, é fundamental que o trabalho seja iniciado por esses temas, conforme orientações que constam nos referenciais do 1° e 2° anos do ensino médio. Selecionar problemas cujos agrupamentos do conjunto de *n* elementos, quando comparados dois a dois, somente se diferenciem pela natureza dos elementos. Exemplo1: Calcular o número de diagonais de um polígono.  $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ são as diagonais e $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ não são consideradas, pois $\overline{AC}$, $\overline{CA}$; $\overline{AD} = \overline{DA}$; $\overline{BD} = \overline{DB}$; $\overline{BE} = \overline{EB}$; $\overline{CE} = \overline{EC}$. Esse é um bom momento para retomar o conceito de

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 293 24/8/2009 15:54:04

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Definir combinações de n elementos tomados p a p. Localizar pontos em mapas, considerando o sistema cartesiano.	Combinações – definição, notação e problemas de aplicação Vocabulário e simbologia matemática	polígono, sua classificação pelo número de lados, vértices e ângulos e, ainda, o que são diagonais. Exemplo 2: Calcular o número de comissões de três elementos que se pode formar com cinco elementos: Ana, Pedro, Simone, Caio e Laura: Ana, Pedro, Simone (que é a mesma que Ana, Simone e Pedro; Pedro, Ana e Simone; Pedro, Simone e Ana; Simone, Ana e Pedro; Simone, Pedro e Ana). Verificar que os seis agrupamentos referem à mesma comissão e que, portanto somente um deles vale, o que vai justificar que, na fórmula de cálculo das combinações dos n elementos p a p, os arranjos dos n elementos tomados p a p sejam divididos pelo fatorial de p. Ao resolver, em duplas, os problemas propostos, os alunos devem discutir com seu colega cada solução. O papel do professor é questionar, mediar a resolução dos problemas, sugerir o uso de diagramas e encorajar que seus alunos os identifiquem e formulem hipóteses de solução, bem como a generalização de uma expressão para resolver problemas desse tipo que são chamados combinação de n elementos tomados p a p cuja notação é $C_{n,p}$. Por exemplo: o número de diagonais do pentágono são as $C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{2}$. As comissões de três componentes formadas a partir de 5 pessoas são $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{6}$. Como 2 é 2! e 6 é 3!, pode-se escrever $C_{3,2} = \frac{A_{3,2}}{2!}$ e $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!}$e . Generalizando $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ Ao trabalhar com as combinações, os alunos terão a oportunidade de retomar os problemas de arranjos e permutações, fazendo a distinção de agrupamentos que se diferenciam ou pela ordem, ou pela natureza de seus elementos, ou, ainda, pelos dois. É, também, um momento de retomar as questões referente aos fatoriais, aprofundando-as com exercícios algébricos. O estudo das combinações, pela variedade de situações que podem ser envolvidas, permite a retomada de conceitos de geometria. Se o professor achar conveniente, pelo tempo ou pelo adiantamento dos alunos, pode, neste momento, explorar os números combinatórios, o Binômio de Newton, partindo do Triângulo de Pascal, que envolve inúmeras sequências interessantes de serem exploradas, e generalizadas em expressões analíticas, o que permitirá desenvolver o raciocínio e a capacidade de generalizar. Este também é um momento interessante para trabalhar com a história da Matemática e com fractais (Sugestão e Atividade do Caderno do Aluno 2° e 3° anos).

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 294 24/8/2009 15:54:05

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		Geometria Analítica Sugere-se iniciar o estudo da Geometria Analítica por uma situação prática.  *www.maps.google.br_20/02/2009.*
Resolver problemas que envolvam a noção de distância e menor distância entre dois pontos.	Sistema cartesiano ortogonal – retas paralelas e perpendiculares – eixo das abscissas e ordenadas	Este é o mapa da parte da cidade de Lisboa que foi reconstruída após o terremoto de 1755. Como se pode observar, as ruas das partes reconstruídas são paralelas e perpendiculares entre si.
Reconhecer o plano cartesiano.	Localização de pontos no plano cartesiano	Considerar o cruzamento entre a Rua Áurea e a Rua do Comércio como o ponto de intersecção entre essas duas ruas P(0,0), que serão consideradas como o eixo vertical, das ordenadas (Rua Áurea), e com o eixo horizontal, das abscissas (Rua do Comércio), para a localização dos pontos neste mapa. Supor que um turista localizado no cruzamento das Ruas Áurea e do Comércio, o P(0,0), queira encontrar-se com um amigo que está no cruzamento da Rua dos Fanqueiros com a Rua da Vitória. Se ele for caminhando, pela Rua do Comércio, seguindo pela Rua dos Fanqueiros, que distância aproximada ele percorrerá?
	Geometria euclidiana e Geometria do Táxi (não euclidiana)	Se ele disponibilizasse de um transporte aéreo, como um helicóptero, ele poderia percorrer uma distância menor? Solicitar que os alunos marquem com lápis coloridos os dois eixos e os pontos em que se encontram o turista e seu amigo.
Localizar pontos num plano cartesiano.	O triângulo retângulo, seus elementos e a Relação de Pitágoras	Desafiá-los a, em duplas, calcularem as duas distâncias, considerando cada quadra como uma unidade de comprimento. Solicitar que alguns alunos apresentem suas soluções e, no

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 295 24/8/2009 15:54:05

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Perceber a Geometria Analítica como a Geometria associada à Álgebra. Relacionar conhecimentos algébricos e geométricos. Resolver situações-problema envolvendo fórmulas da distância entre dois pontos e ponto médio.	Geometria Analítica Plana Aspectos Históricos da Geometria Analítica O plano cartesiano Representação e pontos e polígonos no plano cartesiano Distância entre dois pontos e cálculo de elementos de um polígono – lados, altura, diagonais, área, perímetro Fórmula da distância entre dois pontos e ponto médio. O estudo da reta Equação geral da reta e reduzida da reta	grande grupo, sejam discutidas as soluções encontradas. Ao realizar esta atividade, os alunos deparam-se com duas diferentes geometrias. Ambas, de uma determinada forma, usam um sistema de eixos ortogonais para localizar distâncias entre dois pontos. Considerando um triângulo retângulo, ligando os pontos de intersecção das ruas do Comércio e dos Fanqueiros (onde está o ângulo reto), das ruas do Fanqueiros e Vitória, e das ruas Áurea e do Comércio (onde se localizam os ângulos agudos), tem-se os pontos entre os quais vão ser calculadas as distâncias e onde estão localizados nos vértices dos ângulos agudos do triângulo retângulo. A menor distância, a percorrida pelo helicóptero, considera a hipotenusa do triângulo retângulo, calculada a partir da relação de Pitágoras, enquanto a maior distância, a percorrida caminhando, é calculada a partir da soma dos catetos do triângulo retângulo. As duas distâncias são calculadas apoiadas em diferentes geometrias: a menor distância, na Geometria Euclidiana, que considera o plano cartesiano e é chamada Geometria Analítica, e a outra, que não é euclidiana, é chamada Geometria do Táxi. Por intermédio da Geometria Analítica Plana, representam-se os pontos de um plano por coordenadas (x,y) e fazem-se cálculos relativos a figuras geométricas por meio de operações algébricas sobre pares de coordenadas. Um pouco de história. **A Geometria Analítica** René Descartes (1596-1650), em 1637, publicou o livro *Discurso do Método,* cujo objetivo era expor sua visão racionalista da ciência como estudo da natureza. No capítulo de seu livro intitulado “La Géometrie”, Descartes apresentou um método racional de unificação da Geometria e da Álgebra que recebeu nome de Geometria Analítica e que traduz pontos, retas e construções geométricas em igualdades algébricas. As figuras geométricas passaram a ser representadas no plano cartesiano, um sistema de eixos ordenados e perpendiculares que possibilita que cada ponto do plano seja identificado por um par ordenado de números reais. Embora alguns históriadores afirmem que a Geometria Analítica tenha origem na Antiguidade, para que ela pudesse assumir sua forma atual era necessário o desenvolvimento do simbolismo algébrico, que só aconteceu no século XVII com Descartes e seu contemporâneo Pierre de Fermat (1601-1665). Solicitar que os alunos leiam o texto e discutir com eles o significado do termo Geometria Analítica. Um estudo mais detalhado do plano cartesiano é apresentado no referencial de 1º ano do ensino médio. A partir das atividades iniciais, conhecendo e explorando os conhecimentos prévios dos alunos, algebrizando seus conhecimentos geométricos, considerando os pontos representados por pares ordenados, podem-se representar figuras geométricas, calcular seus lados, seus perímetros e

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer o centro, o raio e a circunferência. Reconhecer a equação de uma circunferência.	Inclinação de uma reta Retas paralelas, coincidentes e concorrentes Estudo da circunferência Elementos da circunferência Equação de circunferência de centro na origem do sistema Equação da circunferência	áreas, suas diagonais e alturas (a partir do cálculo da distância entre dois pontos) e o ponto médio de um segmento. No estudo da reta, para determinar sua equação, os alunos devem entender que a relação entre as coordenadas x e y, diz respeito ao fato de que todos os segmentos nela contidos têm a mesma inclinação que pode ser associada à representação de grandezas diretamente proporcionais. Considera-se importante que o professor contemple a apresentação da reta tanto em sua forma geral $Ax + By + C = 0$ como na sua forma reduzida $y = ax + b$ e explore tanto as retas paralelas aos eixos coordenados e as retas inclinadas em relação aos eixos, reconhecendo a inclinação da reta como sendo $m = -\frac{a}{b}$, dando ênfase ao cálculo do coeficiente angular, conhecidos dois pontos de uma reta. Um estudo sobre as posições relativas entre duas retas pode ser proposto a partir de verificar se duas ou mais retas são coincidentes ou distintas. Se distintas, se são concorrentes ou paralelas. Se concorrentes, o ângulo que há entre elas. Se paralelas, a distância entre elas. No estudo analítico da circunferência, considerando-a como o conjunto de pontos que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado chamado centro da circunferência, sugere-se que seja apresentada a equação da circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas. Considerando o tempo disponível, o professor decidirá sobre a apresentação da equação da circunferência de centro C(a,b) e raio r: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ou $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, atentando para o fato de que a distância de um ponto qualquer P(x,y) que se movimenta sobre a circunferência C(a,b) e será sempre igual à medida do raio. Isso possibilita que a equação da circunferência seja deduzida a partir da fórmula da distância entre dois pontos P e C: $$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r^2$$ Resolver situações-problema que envolvam a equação da reta e da circunferência.
Relacionar conceitos de porcentagem e funções ao estudo da Matemática Financeira.		**Matemática Financeira** A Matemática como ferramenta para a interpretação, a compreensão, a previsão de situações-problema no campo econômico, dos negócios, ou, simplesmente, no orçamento doméstico e pessoal é reconhecida e deve ter seu lugar na escola (ver início da abordagem sobre o assunto nos referenciais curriculares de 7ª série). A conexão da Matemática no campo das finanças pode ser observada, por exemplo, nas aplicações financeiras, na valorização de imóveis, na depreciação de veículos. Em especial, o estudo das funções que estrutura a Matemática do ensino médio fornece modelos para a resolução de tais situações-problema. O trabalho mais sistematizado com a Matemática Financeira

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Identificar em artigos, propagandas da mídia, temas relacionados à Matemática Financeira, bem como sua linguagem específica. Elaborar glossários. Levantar hipóteses e argumentar. Relacionar juros simples e compostos e compará-los a partir de quadros, tabelas e gráficos.	Juros simples e compostos Linguagem da Matemática Financeira: capital (principal), juro, taxa de juros, prazo, montante	no 3° ano do ensino médio, além de ser um tema de ampla aplicação no cotidiano, proporciona aos alunos a revisão de conceitos trabalhados ao longo de toda a escolaridade, como porcentagem e funções, em especial, as de 1° grau, exponenciais e logarítmicas e seus gráficos. Sugere-se que o estudo mais sistematizado da Matemática Financeira inicie por uma conversa com os alunos, momento em que o professor, problematizando questões referentes à Matemática Financeira, tenha uma ideia do que os alunos sabem ou pensam sobre o tema. Solicitar aos alunos que tragam para a aula jornais e revistas atualizados, que tratem das questões relacionadas ao que foi discutido em aula. Para garantir o material de consulta, é interessante que o professor também traga materiais que poderão incluir livros didáticos que tratem do tema. Em duplas, em aula, solicitar que os alunos selecionem notícias, reportagens que contenham materiais sobre finanças, que incluam gráficos, tabelas, análises financeiras e econômicas. Pode-se sugerir que relacionem questões ou que façam um glossário das palavras, como juro, taxa de juros, montante, capital, principal, aplicações financeiras, valorização, depreciação, ações, mercado de capitais e outros que o professor e os alunos encontrarem em suas pesquisas. Aproveitar os problemas que surgirem nessa pesquisa ou propor problemas a partir das questões sugeridas que contenham quadros ou tabelas e gráficos que proporcionem que os alunos, com sua mediação, possam concluir: - Que o capital inicial de uma aplicação pode crescer, em função dos juros, de duas formas distintas: Juros simples: ao longo do tempo, somente o principal rende juros. Juros compostos: após cada período, os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros, o que é conhecido como "juros sobre juros". - Que o crescimento do principal com juros simples é linear, ao passo que o crescimento com juros compostos é exponencial e, portanto, mais "rápido". - Que os juros compostos, quando incidem sobre empréstimos feitos em bancos ou em compras feitas em cartões de crédito e se acumulam, também crescem muito rapidamente, isto é, de forma exponencial. Um exemplo: Neide tomou um empréstimo de R$ 2.000,00 em uma financeira e se comprometeu a pagá-lo após 6 meses. A taxa de juros combinada foi de 8% ao mês. No final do prazo, porém, ocorreu um problema: o valor calculado por Neide não coincidia com aquele cobrado pela financeira. Vejamos como cada um, Neide e o gerente, calculou o valor a ser pago:

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 298 24/8/2009 15:54:06

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Relacionar cálculos de juros simples e compostos a conceitos de função de 1° grau, exponencial, comparando seus gráficos. Desenvolver, a partir de situações-problema, fórmulas relacionadas a juros. Ler, interpretar e concluir a partir de diversas representações.		(see below)

Cálculo de Neide	Cálculo do gerente
Em um mês: 8% Em seis meses: 6 . 8 = 48% 2000 mais 48% de 2.000= = 2000 + 0,48 . 2.000 = = 2000 + 960 = 2.960	1º mês: 2.000 + 0,08 . 2.000 = 2.000 + 160 = 2.160 2º mês: 2.160 + 0,08 . 2.160 = 2.332,80 3º mês: 2.332,80 + 0,08 . 2.332,80 = 2.519,42 4º mês: 2.519,42 + 0,08 . 2.519,42 = 2.720,97 5º mês: 2.720,97 + 0,08 . 2.720,97 = 2.938,65 6º mês: 2.938,65 + 0,08 . 2.938,65 = 3.173,74
Total a pagar: R$ 2.960,00	**Total a pagar: R$ 3.173,74**

Solicitar que os alunos analisem e comparem as duas colunas do quadro e respondam as questões:

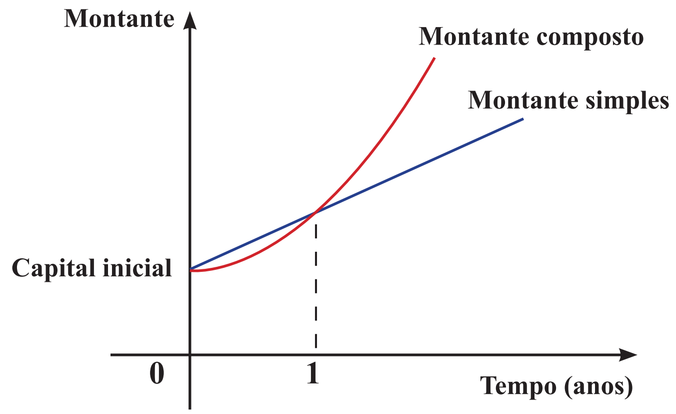
Quem estava com a razão? Por que essa confusão aconteceu?

Qual a diferença entre o cálculo de Neide e do gerente?

Adaptado de Matemática - volume 3 - Smole, Kátia. São Paulo: Saraiva, 2003, p. 8.

Depois, promover uma discussão a partir das conclusões dos alunos e incentivá-los a expressarem suas hipóteses, valorizando-as.

Analisando o gráfico abaixo, verificamos que o montante simples é representado por uma reta (crescimento linear) e que o montante composto é representado por uma curva exponencial (crescimento exponencial).



Smole, 2003, p. 25.

As fórmulas de juros devem ser generalizadas a partir da resolução de situações-problema propostas, como por exemplo:

Você aplicou R$10.000,00 em determinada instituição financeira, em certa data do mês. Essa instituição, ao receber

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Modelar situações-problema, aplicando conceitos de função.		(continua abaixo)

seu capital, comprometeu-se a pagar juros de 1% ao mês, no regime de juros compostos. Você irá deixar essa aplicação na instituição por 4 meses, sem efetuar qualquer retirada ou depósito. Qual deverá ser o montante a ser resgatado ao término do prazo estipulado para a aplicação?

Vamos solucionar o problema com a utilização de um quadro:

Período (meses)	Valor inicial (R$)	Montante no final de cada período (R$)
1	10.000,00	10.000,00 + 1% de 10.000,00 $10.000{,}00 + 10.000{,}00 \cdot 0{,}01$ $10.000{,}00\,(1 + 0{,}01)$ $10.000{,}00\,(1{,}01)$ 10.100,00
2	10.100,00	10.100,00 + 1% de 10.100,00 $(10.000{,}00 \cdot 0{,}01) + (10.000{,}00 \cdot 0{,}01) \cdot 0{,}01$ $(10.000{,}00 \cdot 0{,}01) \cdot (1 + 0{,}01)$ $(10.000{,}00 \cdot 0{,}01) \cdot (1{,}01)$ $10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^2$ $10.000{,}00 \cdot 1{,}0201$ 10.201,00
3	10.201,00	10.201,00 + 1% de 10.201,00 $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^2] + [10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^2] \cdot 0{,}01$ $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^2] \cdot (1 + 0{,}01)$ $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^2] \cdot (1{,}01)$ $10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^3$ $10.000{,}00 \cdot 1{,}030301$ 10.303,01
4	10.303,01	10.303,00 + 1% de 10.303,00 $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^3] + [10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^3] \cdot 0{,}01$ $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^3] \cdot (1 + 0{,}01)$ $[10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^3] \cdot (1{,}01)$ $10.000{,}00 \cdot (1{,}01)^4$ $10.000{,}00 \cdot 1{,}04060401$ 10.406,04

Podemos observar pelos dados do quadro acima que, no final de cada período (nesse caso, mês), o montante de sua aplicação pode ser calculado em função da aplicação inicial de R$10.000,00, ou da taxa de juros de 1% ou 0,01, ou do número de períodos (meses) em que o capital inicial ficou aplicado.

Tendo em vista as operações realizadas, podemos dizer que o montante que você irá resgatar no final de 4 meses será $10.000{,}00 \times (1{,}01)^4$. Utilizando essas operações, podemos generalizar uma fórmula para os juros compostos.

Sabemos que:

- o capital aplicado por você é C;
- a taxa de juros compostos no período é i;
- o número de períodos de capitalização é n.

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>A partir da interpretação de quadros e tabelas, diferenciar juros simples e compostos</td><td>Montante</td><td>

Então, teremos o que mostra o quadro abaixo:

<table>
<tr><th>Período</th><th>Início do período</th><th>Montante</th></tr>
<tr><td>1</td><td>C</td><td>$M_1 = C + Ci$
$M_1 = C + (1+i)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$M_1 = C(1+i)$</td><td>$M_2 = M_1 + M_1 i$
$M_2 = M_1(1+i)$
$M_2 = [C(1+i)(1+i)]$
$M_2 = C(1+i)^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$M_2 = C(1+i)^2$</td><td>$M_3 = M_2 + M_2 i$
$M_3 = M_2(1+i)$
$M_3 = [C(1+i)^2(1+i)]$
$M_3 = C(1+i)^3$</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td><td>$M_n = C(1+i)^{n-1}$</td><td>$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} i$
$M_n = M_{n-1}(1+i)$
$M_n = [C(1+i)^{n-1}](1+i)$
$M_n = C(1+i)^n$</td></tr>
</table>

O quadro sugere a fórmula que fornece o montante no final de n períodos: M = C(1+i)n

Nessa fórmula, temos que:

- M é o montante ou valor principal;
- C é o capital ou valor principal;
- i é a taxa de juros por período;
- n é o número de períodos.

Adaptado do paradidático *Taxa, variações e funções*, p. 53.

Um exemplo do uso de funções exponenciais e logaritmos na economia:

Imagine que uma pessoa tenha aplicado uma quantia de R$ 1.200,00 a uma taxa de 5% ao ano, durante *n* anos. Após um ano, o montante M será o capital inicial C acrescido 5% de seu valor.

Com base nos dados citados, calcularemos quanto deve receber tal pessoa, caso a duração da aplicação seja um, dois ou *n* anos.

Após um ano: M = C . 1,05

Após dois anos: M = (C . 1,05) . 1,05 = C . 1,052

Após três anos: M = (C . 1,05) . 1,052 = C . 1,053

Utilizando o mesmo raciocínio, concluímos que, após *n* anos o montante será igual a C . 1,05n, onde C é o capital aplicado e *n* a duração da quantia em anos.

Para encontrar, por exemplo, o valor do montante cuja duração é de 8 anos, basta substituir na fórmula C por R$ 1.200,00 e *n* por 8. Então, M = 1.200 . 1,058 = 1.772,95.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td>Generalizar as fórmulas de cálculo de juros simples e compostos.

Relacionar cálculos de juros com funções logarítmicas.</td><td></td><td>Outro exemplo seria calcular o montante para 5 anos e 169 dias. Tal pessoa deveria receber:

$M = 122 \cdot 1{,}05^{5+169/360} = 1.200 \cdot 1{,}05^{5 \cdot 360}\sqrt{1{,}05^{169}}$

Eis aí um exemplo de nosso cotidiano que exige longos e trabalhosos cálculos aritméticos. Atualmente, porém, é possível resolvê-lo em frações de segundo, usando o computador ou uma calculadora financeira.
Retomando o problema de aplicação de certa quantia à taxa de 5% ao ano, durante 8 anos, vamos empregar outro processo para resolvê-lo. Calculamos, primeiro o fator:

$q = 1 + \frac{i}{100}$, onde i é a taxa: $q = 1 + \frac{5}{100} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

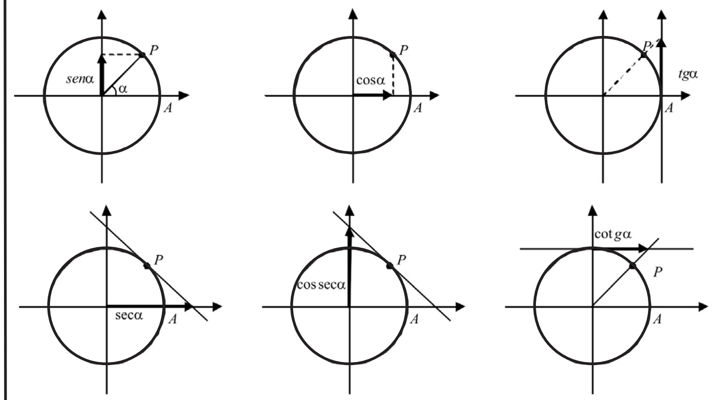
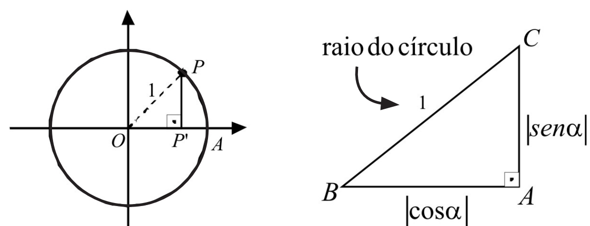
$M = C \cdot 1{,}05^n$
$\log M = \log C \cdot 1{,}05^n$
$\log M = \log C + n \cdot \log 1{,}05$
$\log M = \log 1200 + 8 \log 1{,}05$
onde:
$\log 1200 = 3{,}0792 \; e \; \log 1{,}05 = 0{,}0212$
$\log M = 3{,}0792 + 0{,}1695$
$\log M = 3{,}2415$
$M = 1.772{,}95$

Adaptado do paradidático Taxa, variações e funções, p. 54.

Observações: no trabalho com Matemática financeira, aconselha-se o uso de calculadoras. Os livros didáticos e paradidáticos apresentam situações-problema, acompanhadas de gráficos, quadros ou tabelas, bem como jogos que podem ser selecionados a partir do nível dos alunos.</td></tr>
<tr><td>Identificar Medidas de Dispersão.</td><td></td><td>**Estatística: Medidas de Dispersão**
Para iniciar o estudo das Medidas de Dispersão, seria interessante encontrar em jornais ou revistas algumas matérias que tratassem de um tema do interesse dos alunos e que envolvessem variáveis quantitativas.
Vejamos um exemplo:
Foi feito um estudo dos salários dos empregados de uma fábrica. Foram escolhidos cinco empregados que tinham os seguintes salários mensais:
<table><tr><td>Empregado</td><td>P</td><td>J</td><td>A</td><td>M</td><td>C</td></tr><tr><td>Salário mensal</td><td>R$ 520</td><td>R$ 400</td><td>R$ 620</td><td>R$ 1.850</td><td>R$ 460</td></tr></table>
Foi calculada a média aritmética (MA) dos salários

$MA = \frac{520 + 400 + 620 + 1.850 + 460}{5} = 730{,}00$</td></tr>
</table>

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer a necessidade do uso de Medidas de Dispersão. Aplicar as Medidas de Dispersão na resolução de problemas.	Medidas de Dispersão	O salário médio dos empregados desta fábrica é R$ 730,00. Analisando as informações do quadro, verificar: - o salário dos cinco empregados estaria de acordo com a média calculada? - a média aritmética, neste caso, é um bom número para representar o salário dos empregados da fábrica? Muitas vezes, isso acontece, inclusive nos meios de comunicação: nos dados apresentados, os resultados das pesquisas feitas parecem muito distantes da realidade. Há casos em que a média aritmética ou outras medidas de tendência central não são suficientes para caracterizar a situação estudada. Há outras medidas chamadas de Medida de Dispersão que revelam o grau de variabilidade, por exemplo, dos salários. As mais usadas são a variância e o desvio padrão. O que é variância? O que é desvio padrão? Fazendo uma pesquisa em livros selecionados, os alunos poderão elaborar um trabalho que, discutido no grande grupo, poderá proporcionar a elaboração coletiva de um trabalho definindo tais conceitos que contenha exemplo de situação-problema.
		As relações entre as funções trigonométricas Propõe-se, nesta unidade, que os alunos sejam orientados a relacionar as funções trigonométricas. Ao fazê-lo, vão retomar o estudo da Trigonometria no círculo e no triângulo retângulo, a partir de estudo de fenômenos periódicos. Poderão, na sequência, trabalhar com identidades trigonométricas e com o cálculo de valores das funções trigonométricas e seus sinais nos quatro quadrantes. Neste estudo, retomam-se questões relacionadas ao estudo da circunferência, do Teorema de Pitágoras, do Teorema de Tales, da semelhança e da congruência de triângulos. Aqui, são apresentadas sugestões resumidas que podem ser melhor pesquisadas nos livros didáticos, relacionados e sugeridos na bibliografia anexa. Sugere-se que, com o auxílio do dispositivo prático (cuja construção está descrita no Referencial do 2º ano), sejam retomadas as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, e que sejam localizadas em seus respectivos eixos.

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Reconhecer as funções circulares, seus eixos de definição.	Funções trigonométricas circulares	
Relacionar as funções seno, cosseno e tangente com suas inversas.	Funções inversíveis	Retomando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, podem ser revisadas as suas inversas. $$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\ \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha};\ cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$ Relacionando as funções trigonométricas circulares com os catetos e o raio (r) do círculo trigonométrico com triângulos retângulos, retomando questões de congruência e semelhança, os alunos poderão, a partir do Teorema de Tales, de Pitágoras e de alguns conceitos e representações, encontrar relações entre as funções trigonométricas.
Estabelecer conexões entre conceitos aritméticos, algébricos e geométricos.		
Utilizar conhecimentos geométricos para desenvolver as relações entre as funções tigonométricas de um arco de circunferência.	Relação fundamental da Trigonometria	**A relação fundamental da Trigonometria** Desafiar os alunos a observarem, na figura 1 o triângulo PP'O retângulo em P', o triângulo ABC retângulo em A, relacionando-os. Verificando que são semelhantes, relacionando seus lados, e, com o auxílio da relação de Pitágoras, encontrar uma expressão matemática que relacione os lados do triângulo retângulo com as funções senos e cossenos.  Figura 1 A relação a ser definida é $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ para $\alpha \in R$, que é chamada Relação Fundamental da Trigonometria.
Generalizar relações trigonométricas demonstrando-as com o auxílio de representações e materiais manipulativos.	Relação entre a tangente, o seno e o cosseno	**A relação entre a tangente, o seno e o cosseno** Desafiar os alunos a observarem nas figuras 2, os triângulos PP_1O, retângulo em P_1, e ABC, retângulo em A, relacionando-os. Verificando que são semelhantes, e com o auxílio o Teorema de Tales, encontrar a relação (razão) entre a tangente, o seno e o cosseno do ângulo α .

<table>
<tr><th>Habilidades/ Competências</th><th>Conteúdos/Conceitos Estruturantes</th><th>Situações de Aprendizagem</th></tr>
<tr><td></td><td>Relação entre a secante e a tangente de um arco</td><td>

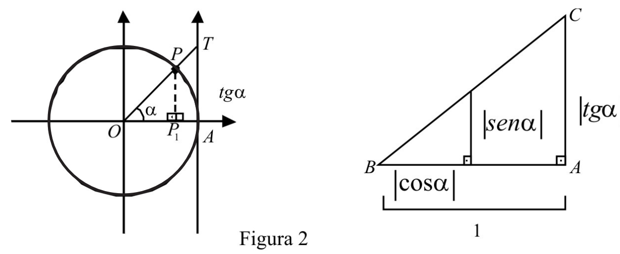


Figura 2

A relação a ser encontrada pelos alunos é:

$$\frac{|tg\alpha|}{|sen\alpha|} = \frac{1}{|\cos\alpha|} \qquad |tg\alpha| = \frac{|sen\alpha|}{|\cos\alpha|}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \text{ para } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

A relação entre a cotangente, o seno e o cosseno

Desafiar os alunos a observarem, nas figura 3, os triângulos OBP, retângulo em B, e OCP', retângulo em C e os triângulos ABC e A'B'C', retângulos em Â e Â', respectivamente, verificando que são semelhantes, relacionando seus lados correspondentes e, com o auxílio do Teorema de Tales, encontrar a relação (razão) entre o cosseno, o seno e a tangente do ângulo α.

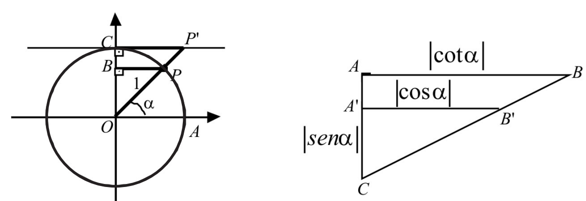


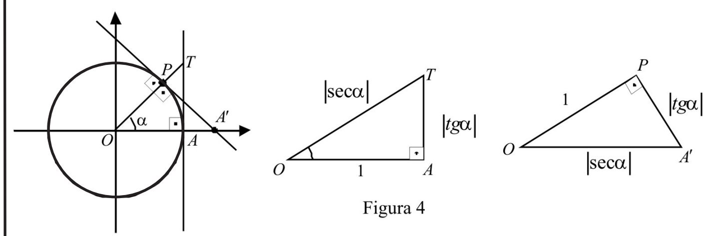
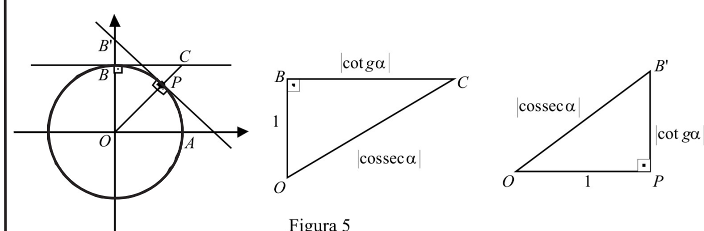
Figura 3

A relação a ser encontrada pelos alunos é:

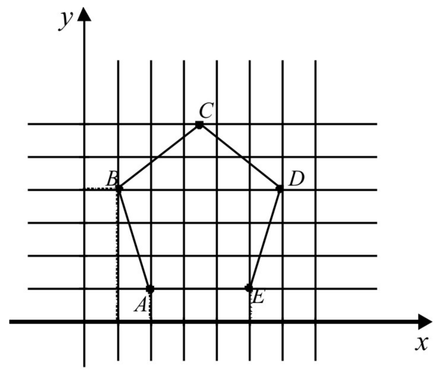
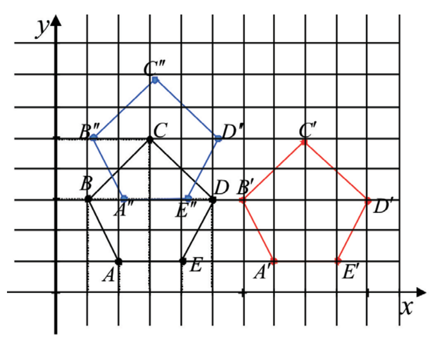
$$\frac{|\cot ag\alpha|}{|\cos\alpha|} = \frac{1}{|sen\alpha|} \qquad \cot ag\alpha = \frac{1 \times |\cos\alpha|}{|sen\alpha|}$$

$$\cot ag\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \text{ para } \alpha \neq \pi + k\pi,\ k \in Z$$

</td></tr>
</table>

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
	Relação da cossecante com a cotangente de um arco	**A relação entre a secante e a tangente** Desafiar os alunos a observarem, na figura 4 os triângulos OTA, retângulo em A e OPA' retângulo em P, e desenhá-los separadamente, verificando que são congruentes. Relacionar seus lados e, com o auxílio da Relação de Pitágoras, encontrar a relação da secante com a tangente de α.  Figura 4 A relação a ser encontrada pelos alunos é que $\sec^2 \alpha = 1 + tg^2 \alpha$. **A relação entre a cossecante e a cotagente**  Figura 5 Desafiar os alunos a observarem, na figura 5, os triângulos OBC, retângulo em B, e OPB', retângulo em P, desenhá-los separadamente e, relacionando-os, verificar que são congruentes. Relacionar seus lados e, a partir da Relação de Pitágoras, encontrar a relação da cossecante com a cotangente do ângulo α. A relação a ser encontrada pelos alunos é $cossec^2 \alpha = 1 + cot\,g^2 \alpha$. Durante a tarefa ou a sua correção, o professor, no seu papel de organizador e mediador da aprendizagem, deve retomar conceitos matemáticos. Por exemplo: relembrar que toda a reta tangente a uma circunferência em um ponto é perpendicular ao raio neste ponto, formando, portanto, com ele ângulos retos, o que justifica que os ângulos em P, nas figuras 4 e 5 sejam retângulos e o que permite comprovar a congruência dos triângulos em questão. No final da atividade, solicitar que, individualmente ou em duplas, os alunos organizem o registro da atividade, sistematizando-a num texto ou num esquema. Ao ler o trabalho dos alunos, o professor poderá acompanhar a sua aprendizagem. Aplicar as relações entre as funções trigonométricas em exercícios e problemas.

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 306 24/8/2009 15:54:08

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
Identificar polígonos congruentes construídos a partir de translações no plano cartesiano. Calcular e representar translações de pontos no plano cartesiano, a partir de uma função dada.	Translação Representação de polígonos no gráfico cartesiano Função translação no plano	**Translação de um polígono** O estudo das translações de polígonos, realizado a seguir, é preparatório para o estudo das translações dos gráficos das funções seno e cosseno. Este estudo pode ser aprofundado, a fim de generalizar as translações em gráficos de funções quaisquer. Fornecer aos alunos uma malha quadriculada, conforme a figura abaixo, com a seguinte situação problema:  Considerar as funções: T que a cada vértice (x, y) do polígono ABCDE, associe o ponto (x+5, y), representando por A'B'C'D'E' os pontos imagens correspondentes ao polígono ABCDE pela função T. T' que a cada vértice (x, y) do polígono ABCDE, associe o ponto (x, y+2), representando por A"B"C"D"E" os pontos de imagens correspondentes ao polígono ABCDE pela função T'. Observar os polígonos ABCDE, A'B'C'D'E' e A"B"C"D"E" e responder: a) que transformação o polígono ABCDE sofreu em relação à função T? b) que transformação o polígono ABCDE sofreu em relação à função T'? c) relacionando tais transformações às simetrias estudadas, como você as classificaria? Os alunos deverão calcular a função ponto a ponto, localizar as funções $T(x_1)$ e T(x) no mesmo gráfico e traçar as figuras semelhantes, respondendo as questões propostas.  $T(A) = T(2,1) = (7,1) = A'$ $T(B) = T(1,3) = (6,3) = B'$ $T(C) = T(3,5) = (8,5) = C'$ $T(D) = T(5,3) = (10,3) = D'$ $T(E) = T(4,1) = (9,1) = E'$ $T'(A) = T'(2,1) = (2,3) = A''$ $T'(B) = T'(1,3) = (1,5) = B''$ $T'(C) = T'(3,5) = (3,7) = C''$ $T'(D) = T'(5,3) = (5,5) = D''$ $T'(E) = T'(4,1) = (4,3) = E''$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 307 24/8/2009 15:54:09

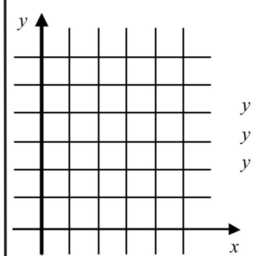
Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		O trabalho dos alunos, orientado e mediado pelo professor, deverá determinar duas translações em que, por T, o polígono A'B'C'D'E', congruente a ABCDE, teria se deslocado cinco unidades no sentido positivo do eixo das abscissas e o polígono A"B"C"D"E", congruente a ABCDE, por T', teria se deslocado duas unidades no sentido positivo dos eixos das ordenadas.

Translações e os gráficos das funções seno e cosseno

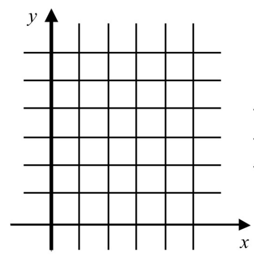
Para trabalhar translações nos gráficos das funções seno e cosseno, sugere-se um trabalho em duplas. Para cada elemento da dupla, dá-se uma situação-problema como sugerido abaixo:

Em cada uma das malhas quadriculadas, trace, em cores diferentes, os gráficos solicitados:

Folha 1

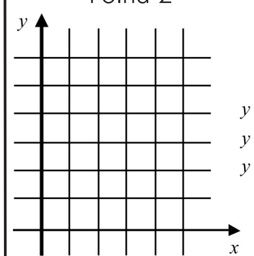


$y = senx$
$y = senx + 2$
$y = senx - 3$

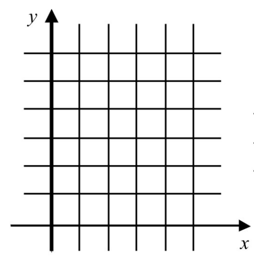


$y = \cos x$
$y = \cos x + 1$
$y = \cos x - 2$

Folha 2



$y = senx$
$y = senx + 5$
$y = senx - 2$



$y = \cos x$
$y = \cos x - 3$
$y = \cos x + 2$

Solicitar que nas, duplas, os alunos comparem seus gráficos e descrevam o que acontece com uma função do tipo f(x)=cossen x, quando a ela somam-se constantes positivas ou negativas.

As conclusões das duplas devem ser discutidas no grande grupo, que concluirá que, somando uma constante positiva ou negativa a uma função, ela fica transladada o mesmo número de vezes no sentido positivo de Oy (se a constante for positiva) ou no sentido negativo de Oy (se a constante for negativa).

Da mesma forma, outras transformações das funções trigonométricas podem ser trabalhadas como:

$$y = 3senx \qquad y = 2\cos x$$
$$y = -senx \qquad y = -\cos x$$
$$y = sen 2x \qquad y = \cos 2x$$
$$y = sen\frac{x}{2} \qquad y = \cos\frac{x}{2}$$

MATEMATICA ENSINO MEDIO V3.indd 308 24/8/2009 15:54:10

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		Tanto no caso das translações como nas demais transformações das funções trigonométricas, é importante que se analise o Domínio e o conjunto Imagem das funções transformadas com as funções $y = \text{sen}x$ e $y = \cos x$.
Reconstruir o estudo das funções, formalizando os conceitos e a linguagem. Reconhecer a importância do estudo das funções e suas finalidades	Produto cartesiano Relações e funções	**Uma revisão e sistematização do estudo das funções** A Matemática descreve, transforma e simplifica muitas atividades do nosso dia a dia. Por seu caráter experimental, a Matemática pode auxiliar no entendimento de situações do cotidiano e, por seu caráter formativo, pode auxiliar na resolução de situações pessoais ou profissionais de cada um. Os conceitos de relação e função de caráter formal são ideias presentes em atividades do dia a dia do homem e da ciência. As funções podem ser utilizadas para modelar problemas de vários campos do conhecimento humano, sejam eles econômicos, sociais, psicológicos, de comportamento, e fornecem ferramentas adequadas para solucionar problemas nos negócios, na Biologia, na Medicina, na Computação ou na Ciência Política. São utilizadas para, em termos matemáticos, expressar leis físicas e naturais e auxiliam na interpretação de determinados fenômenos. Nas duas séries iniciais do ensino médio, as funções foram estudadas, inicialmente, de uma forma intuitiva ou partindo de fenômenos periódicos. Na 3ª série do ensino médio, dada a relevância do estudo das funções, um conceito estruturante da Matemática que a relaciona com as demais áreas do conhecimento, propõe-se que se revise este tema, utilizando-se de linguagem e conceitos mais formais. Para isso sugere-se que, inicialmente, utilizando a linguagem de conjunto, defina-se produto cartesiano, representando-o de diferentes formas: diagramas de flechas, conjuntos de pares ordenados e gráficos cartesianos. Ainda, usando a linguagem de conjuntos, definam-se relações como todo o subconjunto de um determinado produto cartesiano, identificado o Domínio, o conjunto Imagem e as representações gráficas de uma relação. Por fim, definir formalmente funções como relações especiais, determinando o Domínio, o Contradomínio, o conjunto Imagem e representações gráficas de funções. Pode-se, na sequência, retomar as funções polinomiais de 1º e 2º graus, bem como as funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, comparando seus gráficos, seu crescimento, suas expressões analíticas, aprofundando o tema e aplicando-o na resolução de situações-problema das diferentes áreas do conhecimento e nas transformações. Este estudo, a critério do professor, deve se revestir de um caráter de revisão, à medida que os alunos já o tenham trabalhado e estejam aptos a este nível de abstração. Como uma grande sistematização da Matemática no final do ensino médio, esta revisão poderá enfatizar o estudo de outros temas que estruturam o pensamento matemático, entre

Habilidades/ Competências	Conteúdos/Conceitos Estruturantes	Situações de Aprendizagem
		outros, as sequências com suas regularidades e padrões, a Geometria e os cálculos algébricos. Pode-se, também, formalizar e aprofundar o estudo dos intervalos aplicados a inequações do 1° e de 2° graus, incluindo as inequações produto e quociente. A formalização do estudo dos conjuntos e suas operações pode, ainda, complementar o estudo das inequações, o que poderá desenvolver a habilidade de trabalhar com uma linguagem simbólica como a dos conjuntos. Ao trabalhar as operações com conjuntos, algumas operações com os conetivos lógicos podem ser estudadas. Finalizando a 3ª série do ensino médio, sugere-se, ainda, retomar e sistematizar os conceitos geométricos construídos ao longo da educação básica. As atividades 1 e 2 do Caderno do Aluno de 2° e 3° anos do ensino médio podem ser uma boa sugestão, tendo em vista a formalização de conceitos e da linguagem geométrica com seu vocabulário específico. O fato de tais atividades incluírem um trabalho realizado a partir de sequências, regularidades e padrões que culmina com apresentação da Geometria Fractal, uma Geometria não-euclidiana, reforça que sua aplicação seja realizada em sala de aula. A sistematização da Geometria na 3ª série deve incluir temas que o professor perceba que os alunos não trabalharam em séries anteriores, podendo assumir um caráter mais formal.

Referências

AOKI, Virginia (Ed.). *Projeto Pitanguá:* geografia. São Paulo: Moderna, 2005. v. 2.

ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA. *Normas para o currículo e avaliação em matemática.* Lisboa: Associação dos Professores de Matemática,1998. (Coleção Adendas)

BARATOJO, José Teixeira. *Dicionário de matemática para o 1° grau.* Porto Alegre: Sagra-DC Luzzatto, 1994.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal:* para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BARROSO, Juliane Matsubara. *Projeto Araribá:* matemática – ensino fundamental 5ª série. São Paulo: Moderna, 2003.

BECKER, Fernando. O que é construtivismo. *Revista de Educação AEC*, Brasília, AEC, v. 21, n. 83, p. 7-15, abr./jun. 1992.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino.* São Paulo: Contexto, 2007.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática atual.* São Paulo: Atual, 1995. (Coleção de 5ª a 8ª série)

BONJORNO, José Roberto et. al. *Matemática:* Fazendo a diferença. São Paulo: FTD, 2006. (Coleção de 5ª a 8ª série)

BONGIOVANNI, Vicenzo; VISSOTO, Olímpio Leite; LAUREANO, José Luiz Tavares. *Histórias de Matemática e de vida.* São Paulo: Ática, 1992.

___; ___; ___. *Matemática e vida.* São Paulo: Ática, 1993.

BOTOMÉ, Silvio Paulo; RIZZON, Luiz Antônio. Medida do desempenho ou avaliação da aprendizagem em um processo de ensino: práticas usuais ou possibilidades de renovação. *Chronos,* Caxias do Sul, v. 30, n. 1, p. 7-34, jan./jun.1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática (PCN+). Brasília: SEF/MEC, 1997.

___. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

___. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio:* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006.

___. Ministério da Educação – Diretoria de Programas

Especiais. Programa de Aprendizagem Escolar, Gestar II. *Matemática na alimentação e nos esportes*. Brasília: 2006. Caderno de Teoria e Prática 1.
___. Ministério da Educação – Diretoria de Programas Especiais. Programa de Aprendizagem Escolar, Gestar II. *Matemática nos esportes e nos seguros*. Brasília: 2006. Caderno de Teoria e Prática 2.
___. Ministério da Educação – Diretoria de Programas Especiais. Programa de Aprendizagem Escolar, Gestar II. *Matemática nas formas geométricas e na ecologia*. Brasília: 2006. Caderno de Teoria e Prática, 3.
___. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2008.
BRODY, Eliot Daniel; BRODY, Arnold. *As sete maiores descobertas científicas da história*. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.
BUCCHI, Paulo. *Curso prático de matemática*. São Paulo: Moderna, 1998.
BUKOWITZ, N. de S. L. Uma abordagem geométrica à compreensão dos números racionais. *Educação Matemática em Revista*, Recife, Gráfica A Única, ano 13, n. 24, p. 7-15, jun. 2008.
CALLAI, Helena; ZARTH, Paulo A. *O estudo do município e o ensino de história e geografia*. Ijuí: Unijuí Editora, 1998.
CÂNDIDO, Suzana Laino. *Formas num mundo de formas*. São Paulo: Moderna, 1997.
CARDOSO, Virgínia Cárdia. *Materiais didáticos para as quatro operações*. São Paulo: IME-USP, 2005.
CAVALCANTE, Meire. Dicas para dominar as modernas práticas pedagógicas. *Nova Escola,* São Paulo, Abril Cultural, dez. 2005.
CENTURION, Marília; JAKULOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Novo:* matemática na medida certa. São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção de 5ª a 8ª série)
COLL, César. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo: Ática, 1997.
DANYLUK, Ocsana. *Alfabetização matemática:* as manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 1998.
DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é matemática*. São Paulo: Ática, 2007. (Coleção de 5ª a 8ª série)
___. *Matemática:* contexto e aplicações: ensino médio. São Paulo: Ática, 2000. v. único.
___. *Matemática:* contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 1999. v. 2.
___. *Matemática:* contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 1999. v. 3.
DEVLIN, Keith. *Matemática:* A ciência dos padrões. Porto, Portugal: Porto Editora, 2002.
FINI, Maria Inês (Coord.). *Proposta curricular do Estado de São Paulo:* matemática. São Paulo: SEE, 2008.
FUNDAÇÃO EDUCACIONAL SANTA ROSA DE LIMA. Construtivismo e a pedagogia. *Informativo da Fundação Educacional Santa Rosa de Lima,* Porto Alegre, ano 3, n. 6, jun. 1996.
FREIRE, Madalena. O que é grupo? In: GROSSI, Esther Pillar; BORDIN, Jussara (Org.). *Paixão de aprender*. Porto Alegre: Pallotti, 1995.
GIOVANNI, José Rey; BONJORNO, José Roberto. *Matemática 3*. São Paulo: FTD, 1996. (Coleção Olho no Vestibular)
GUELLI, Oscar. *Contando a história da matemática:* história da equação de 2º grau. São Paulo: Ática, 1992.
___. *Matemática – nosso mundo:* 5ª série. São Paulo: Ática, 2001a.
___. *Matemática – nosso mundo:* 6ª série. São Paulo: Ática, 2001b.
___. *Matemática – nosso mundo*. São Paulo: Ática, 2001c.
HOFFMANN, Jussara. *Avaliação:* mito e desafio. Porto Alegre: Mediação, 1992.
___. *Avaliação mediadora:* uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 1993.
___. *Avaliação na pré-escola:* um olhar sensível e reflexivo sobre o educando. Porto Alegre: Mediação, 1997.
___. *Pontos e Contra pontos:* do processo ao agir em avaliação. Porto Alegre: Mediação, 1998.
___. *Avaliar primeiro respeitar depois*. Porto Alegre: Mediação, 2008.
IEZZI, Gelson et al. *Matemática*. São Paulo: Atual, 2002. v. único.
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. *Matemática e realidade:* 6ª série. São Paulo: Atual, 2005.
IEZZI, Gelson et al. *Matemática:* ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2001. v. 1.
___. *Matemática:* ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2001. v. 2.
___. *Matemática:* ciência e aplicações. São Paulo: Atual, 2001. v. 3.
IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. *Matemática*. São Paulo: Scipione, 1999. (Coleção de 5ª a 8ª série)
INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *ENEM – Exame nacional do ensino médio:* documento básico, 2000. Brasília, DF, 1999.
KAMII, Constance; DECLARK, Geórgia. *Reinventando a aritmética*. São Paulo: Papirus, 1992.
LABORATÓRIO BÁSICO POLIVALENTE DE CIÊNCIAS PARA O 1º GRAU: *Manual do professor / FUNBEC*. 3. ed. Rio de Janeiro: FAE, 1987.
LENIR, M.; SEYSSEL, E.; SIMÕES, L. F. *Matemática 5ª série*. São Paulo: Escola Educacional, ano. (Série Linha de Solução)
LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). *Aprendendo*

e ensinando geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.
LUCKESI, Cipriano. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 1995.
MACHADO, Nilson José. *Matemática e língua materna:* análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1998.
___. *Polígonos, centopeias e outros bichos*. São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)
MICHAELIS. *Moderno dicionário da língua portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos, 1998.
MOREIRA, Igor. *Geografia* – Rio Grande do Sul. São Paulo: Ática, 2004.
MURRIE, Z. de F. *Documento básico:* ensino fundamental e médio. ENCCEJA: Brasília, MEC-INEP, 2002. Livro introdutório.
PAIS, Luiz Carlos. *Didática da matemática:* Uma análise de influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
PAIVA, Manoel. *Matemática:* conceito, linguagem e aplicações. São Paulo: Moderna, 2002. v. 2.
PEREIRA, Nilton Mullet, SCHÄFFER Neiva Otero, BELLI, Samuel Edmundo Lopes, TRAVERSINI, Clarice Salete, TORRES, Maria Cecília de A., SZEWCZYK, Sofia (organizadores). *Ler e Escrever:* Compromisso no ensino médio. Porto Alegre: Editora da UFRGS e NIUE/UFRGS, 2008.
PERRENOUD, Philippe. *Ensinar:* agir na urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.
___. *Construir competências desde a escola*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.
PORTANOVA, Ruth (Org.). *Um currículo de matemática em movimento*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.
RIBEIRO, Jackson; SOARES, Elisabeth. *Projeto Radix:* matemática. São Paulo: Scipione, 2005. (Coleção de 5ª a 8ª série)
ROSA, Ernesto. *Matemática:* construir e aprender. São Paulo: FTD, 2004.
SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica. *Matrizes curriculares de referência para o SAEB*. 1999
SAERS – Sistema de avaliação do rendimento escolar do Rio Grande do Sul. *Boletim Pedagógico de Matemática da 5ª série/6º ano do ensino fundamental*. 2007.
SILVA, Circe; LOURENÇO, Simone; CÔGO, Ana. *O ensino-aprendizagem da matemática*. Brasília: Plano Editora, 2004.
SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Inês; CANDIDO, Patricia. *Figuras e formas*. Porto Alegre: Artmed, 2003.
___; ___ ___. *Resolução de Problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2000.
SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignês (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
SMOOTHEY, Marion. *Atividades e jogos com formas*. São Paulo: Scipione, 1998.
SMOOTHEY, Marion *Atividades e jogos com áreas e volumes*. São Paulo: Scipione, 1997.
___. *Atividades e jogos com triângulos*. São Paulo: Scipione, 1997. (Coleção Investigação Matemática)
SMOOTHEY, Marion . *Atividades e jogos com círculos*. São Paulo: Scipione, 1998.
SPINELLI, Walter. *Matemática:* ensino médio 1ª série 1º bimestre. São Paulo: SEE, 2008.
___. *Matemática:* ensino médio, 2ª série, 1º bimestre. São Paulo: SEE, 2008.
___. *Matemática:* ensino médio, 3ª série, 1º bimestre. São Paulo: SEE, 2008.
TINOCO, Lucia A. A. (Coord.). *Construindo o conceito de função*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática de matemática:* como dois e dois: construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.
VASCONCELLOS, Celso. *Avaliação:* concepção didática – libertadora do processo de avaliação escolar. São Paulo: Libertad – Centro de Formação e Assessoria Pedagógica, 1992.
WADSWORTH, Barry. *Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget*. São Paulo: Pioneira, 1995.

Lições do

Rio Grande

professor NOTA 10
Valorização do Magistério

GOVERNO DO ESTADO
PROGRAMA ESTRUTURANTE
Boa escola PARA TODOS
Educação para o desenvolvimento das pessoas e do Rio Grande.

GOVERNO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO