POR QUE ENSINAR MATEMÁTICA?

Esta pergunta teve, ao longo dos anos, diferentes respostas, dependendo da concepção de sociedade, de educação e de matemática da época. A mudança da sociedade, marcada por vários progressos científicos e avanços tecnológicos, define novas exigências para os jovens. Várias profissões desaparecem ao mesmo tempo que novas profissões surgem. Este ritmo acelerado de mudanças no mundo de trabalho e nas formas de organização da sociedade exige estudo e aprendizagem permanentes. No caso particular de Matemática, observa-se que a sociedade passa a exigir do cidadão não só conhecimentos específicos, mas principalmente novas maneiras de organizar o pensamento e de saber lidar com dados numéricos e interpretá-los. São também necessárias atitudes como tomar iniciativa, saber trabalhar em grupo, expor suas idéias por escrito ou oralmente, ter pensamento crítico e ser criativo. Além disso, é importante ter a capacidade de resolver problemas e de saber utilizar diferentes recursos tecnológicos. Sabemos que o ensino não deve estar vinculado apenas às transformações que ocorrem no mundo de trabalho, mas não podemos esquecer que o trabalho faz parte da vida de todo cidadão. Além disso, diversas situações do dia a dia envolvem informações numéricas, tais como reajustes de preços e salários, pesquisas de mercado e outras tantas, que exigem conhecimentos de gráficos, porcentagens e familiaridade com números.

A aquisição de conhecimentos matemáticos tem sido apontada como relevante para o desenvolvimento de diversas formas de pensar, tais como pensamento lógico-analítico, percepção geométrica, pensamento algébrico-simbólico, pensamento numérico, pensamento probabilístico, capacidade para identificação de regularidades e interdependências, capacidade para resolução de situações-problema, capacidade para realização de estimativas e percepção de ordens de grandeza, capacidade para interpretação de gráficos, familiaridade com medidas.

Estas capacidades desempenham papéis importantes em muitas instâncias da vida prática do indivíduo. Desta forma, a Matemática do Ensino Fundamental e Médio deve procurar, sempre que possível e que fizer sentido, fazer uso de problemas e situações vinculados à vida cotidiana do aluno e à formação da cidadania. Entretanto, mais importante que a recordação pontual de tópicos, é o próprio contato com o processo de pensamento matemático. A dinâmica de nossa sociedade demanda do cidadão o desenvolvimento de esquemas ágeis de pensamento, e não a simples memorização de pacotes de conteúdo – que facilmente podem se tornar obsoletos em questão de poucos anos, ou esquecidos em questão de poucos dias.

Defendemos que a possibilidade de aplicação ao cotidiano não pode ser tomada como critério único para a inclusão de tópicos em um currículo de Matemática – pois neste caso estaríamos, no mínimo, cometendo o grave erro de negar aos estudantes a natureza abstrata da própria Matemática. Embora as situações cotidianas sejam fundamentais no planejamento das abordagens pedagógicas de diversos conteúdos em sala de aula, não podemos restringir (ou reduzir) o ensino de Matemática à sua dimensão utilitária. A tentativa de aplicar no cotidiano do aluno tópicos que de fato não possuem aplicação práticas é não só artificial (e, portanto, contraditória com o próprio princípio de estabelecer vínculos com a vida diária), mas danosa à aprendizagem de Matemática. É importante considerar que muitos tópicos (como, por exemplo, congruência de triângulos) propiciam campos férteis para a exploração do raciocínio dedutivo, sendo também imprescindíveis para o ensino de Matemática – mesmo quando dificilmente pareçam ser 'aplicáveis' na vida diária do indivíduo.

Também devemos considerar a possibilidade de explorar questões históricas, tais como o célebre problema da irracionalidade da medida da diagonal de um quadrado de lado 1, vivenciado pelos gregos no século V a.C. Questões desta natureza oferecem ao aluno a oportunidade de contemplar o processo de criação e re-criação contínua de conceitos matemáticos, de compreender que o conhecimento matemático é fruto da construção humana a partir da observação e da interação constantes com a natureza, com o contexto social e cultural.

De acordo com o exposto acima, a organização curricular aqui proposta foi estruturada tendo a formação de conceitos e o desenvolvimento do pensamento matemático como bases centrais, a partir das quais as metodologias de ensino são formuladas. Os conteúdos para o ensino fundamental de Matemática foram selecionados levando em consideração a formação geral do estudante, no sentido descrito, e organizados em quatro campos:

- Campo numérico-aritmético
- Campo algébrico-simbólico
- Campo geométrico
- Campo da informação

O objetivo de tal organização não é sugerir uma estruturação compartimentalizada dos conteúdos. Ao contrário, a integração entre estes quatro campos pode e deve ser evidenciada, por meio da exploração das múltiplas conexões entre os diferentes conteúdos, de forma a apresentar a Matemática não como uma coleção pontual de tópicos estanques, mas como um campo orgânico de pensamento, como sugere a figura abaixo. O objetivo principal desta organização nos quatro campos é garantir que, em nas quatro séries finais do Ensino Fundamental e nas três séries do Ensino Médio, nenhum dos quatro campos fique descoberto. Isto é, mesmo que a realidade particular de cada sala de aula torne necessário que certos conteúdos sejam menos aprofundados, é fundamental que todos os quatro campos sejam abordados, ao menos parcialmente.

Os quatro campos devem ser integrados, por meio da exploração das múltiplas conexões entre eles.

De acordo com esta proposta, o aprofundamento e o detalhamento da organização curricular dependerá da especificidade de cada sala de aula. No entanto, é de fundamental importância que *nenhum dos quatro campos fique completamente descoberto em nenhuma das séries***.** Assim sendo, *todos os tópicos contidos na grade geral de* *organização curricular de cada série deverão ser abordados.* A critério do professor, os aprimoramentos sugeridos poderão variar, de acordo com cada contexto específico.

É aconselhável ainda que se adote um livro didático, mesmo que o professor prefira trabalhar de forma mais livre. No mínimo, o livro será de utilidade para o estudante como referência (ajudando a criar hábitos de consulta) e fonte de exemplos e exercícios. O PNLD – Programa Nacional do Livro Didático do MEC – promove avaliações dos volumes de 5ª a 8ª séries, e ainda distribui os livros. Em 2004, foi instituído também um programa de avaliação de livros texto para o Ensino Médio, o PNLEM/05 que, embora não faça a distribuição de livros, permite ao professor a consulta às resenhas dos especialistas sobre as coleções aprovadas para fazer sua escolha. Ainda que não haja distribuição gratuita de livros para o estudante deste nível de ensino no estado do Rio de Janeiro, a adoção de um texto, mesmo que volume único, pode contribuir para melhorar os hábitos de estudo dos alunos.

Finalmente, durante o desenvolvimento deste trabalho, foi importante seguir os seguintes critérios gerais, buscando escolher uma seriação de conteúdos, tanto para o 2º segmento do Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio:

(1) respeitar o amadurecimento do estudante e o grau de dificuldade dos temas;

(2) promover a presença de assuntos dos quatro campos básicos em cada uma das séries;

(3) evitar a concentração dos assuntos em grandes blocos, numa série só, optando por uma apresentação gradativa, que, além de ser menos exaustiva, pode propiciar maior articulação entre os diversos temas e promover uma revisão mais freqüente de vários assuntos;

(4) acompanhar, sempre que possível, a distribuição habitual nas coleções didáticas mais utilizadas;

(5) possibilitar a articulação com outras áreas do ensino ou da própria Matemática;

(6) ficar próximo da prática atual de alguns professores.

No entanto, mesmo dentro de tais princípios, há uma diversidade muito grande de escolhas. Uma tinha que ser feita – e esta é a que apresentaremos a seguir.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Quando se considera o *Ensino Fundamental*, a Matemática deve levar o aluno a:

• utilizar os conceitos matemáticos para sua vida,

• desenvolver o interesse e a capacidade de resolver problemas;

• organizar informações;

• utilizar as representações e saber comunicar-se em Matemática e desenvolver as capacidades de argumentação e de trabalho em equipe[1].

O papel da Matemática se impõe também em diversas dimensões do *Ensino Médio*, como pode ser observado na leitura de alguns dos principais objetivos[2] deste nível de escolaridade:

• consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, que possibilitem o prosseguimento dos estudos e;

• como etapa final, também, uma preparação básica para o trabalho e cidadania;

• aprimoramento como pessoa humana, o que inclui a formação ética;

• desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico e, finalmente;

• a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos.

Assim, durante o Ensino Básico, o aluno precisa desenvolver atividades que lhe permitam fazer estimativas, analisar e criticar resultados, reconhecer padrões. O aluno precisa adquirir facilidade tanto no trato com números, medidas, unidades, quanto nas representações das figuras do plano e do espaço. É preciso reforçar os conhecimentos de álgebra, incluindo as funções e suas representações, o que permitirá ao estudante utilizar essa ferramenta, hoje, mais popular com a propagação das planilhas eletrônicas. O aluno precisa estar em condições de compreender o valor do estudo estatístico e probabilístico, de ler e compreender ou redigir um texto técnico, de criar e apresentar argumentos, ainda que em situações abstratas. Espera-se ainda o aluno aprenda a reconhecer e aplicar raciocínio lógico-dedutivo. Ao final do Ensino Médio ele deve também estar apto a usar e reconhecer o raciocínio dedutivo como processo de validação de descobertas ou conjecturas, bem como aprender a levantar suas próprias hipóteses, estabelecer generalizações, enfim, a organizar seu pensamento.

Apresentamos a seguir objetivos que podem ser alcançados através dos quatro campos de estudo, levando em consideração algumas orientações metodológicas gerais que podem contribuir para este fim.

Campo Numérico-aritmético

O desenvolvimento da compreensão sobre números deve ser feito de forma gradual, por meio da resolução de problemas motivadores adequados, levando-se em consideração suas propriedades e suas relações. Assim, o aluno poderá perceber a existência de diversos tipos de números (naturais, inteiros negativos, racionais e irracionais) bem como seus diferentes significados e interpretações. Já em relação

[1] Extraído dos PCNs – Ensino Fundamental
[2] Extraído da LDB 9394/96.

às operações, deve-se estimular a compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, das relações entre elas e dos diferentes tipos de cálculo (exato e aproximado, mental e escrito). É importante observar ainda que o campo aritmético desempenha um papel pedagógico específico e distinto do campo algébrico, muito embora a aritmética tenha bases comuns com a álgebra do ponto de vista matemático teórico (e possa até mesmo, em um certo sentido, ser considerada como um caso particular da mesma). Portanto, no ensino de Matemática, o pensamento aritmético não deve ser suplantado pelo algébrico em nenhuma das séries do segundo segmento do ensino fundamental ou do ensino médio.

Campo Algébrico-simbólico

O pensamento algébrico permite ao aluno perceber regularidades e explicitá-las matematicamente, estabelecer relações entre grandeza variáveis, modelar e resolver situações-problema por meio de equações, além de compreender e utilizar os diversos significados do uso de simbologia em Matemática. Portanto, o ensino de álgebra não deve se reduzir a manipulações de expressões algébricas e resolução de equações de uma forma mecanizada. Deve ser dada especial atenção ao entendimento das idéias de variável, dependência, expressão, equação e função, e à compreensão crítica da simbologia algébrica.

Campo Geométrico

O ensino de geometria envolve a exploração de habilidades tais como: orientação, percepção e representação do espaço físico; percepção, reconhecimento e representação de formas; classificação de formas segundo suas características e propriedades; construção de figuras geométricas; medição do espaço (conceito e cálculo de perímetro, de área, de volume e capacidade); além de desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. A abordagem de geometria no ensino de matemática deve estimular a percepção intuitiva do espaço físico no sentido concreto, objetivando a compreensão de objetos geométricos em seu aspecto abstrato.

Campo da Informação

A finalidade de tópicos vinculados a tratamento da informação no ensino de matemática é possibilitar que o aluno aprenda a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos e a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória, de forma a capacitá-lo para a leitura crítica de informações veiculadas nos meios de comunicação de massa. Portanto, a abordagem pedagógica deste campo deve, sempre que possível, lançar mão da interpretação crítica de dados numéricos, gráficos e tabelas de diferentes tipos divulgados em jornais, revistas e outros meios.

ESTRUTURA CURRICULAR DO ENSINO FUNDAMENTAL

Para atingir os objetivos, é muito importante que os conteúdos de Matemática sejam, sempre que possível, articulado entre si, com outras disciplinas que o estudante tenha visto, esteja vendo ou vá ver na escola, e ainda com seus conhecimentos adquiridos, anteriormente, dentro e fora da escola. Embora o nível de aprofundamento e o detalhamento da organização curricular dependa da especificidade de cada sala de aula, no entanto, é fundamental que *nenhum dos quatro campos fique completamente descoberto em nenhuma das quatro séries*.

Assim sendo, *todos os tópicos contidos nos quadros de tópicos centrais de cada série deverão ser abordados*, mas as abordagens e ordenações recomendadas e os aprimoramentos sugeridos poderão variar, a critério do professor, de acordo com cada contexto pedagógico específico. É importante notar que diversas linhas de conteúdos são retomados em duas ou mais séries subseqüentes. A retomada, reestruturação e reconexão de uma linha de conteúdos em novos contextos teóricos matemáticos visa fundamentalmente apresentar a Matemática não como um conjunto pronto e com conhecimentos acabados, mas como um campo dinâmico do conhecimento humano em constante evolução – motivando assim o desenvolvimento do pensamento matemático, em lugar da simples memorização de tópicos. Além disso, esta organização curricular tem por objetivo estimular permantes articulações, sejam horizontais, entre tópicos de diferentes campos numa mesma série, sejam verticais, entre tópicos de séries diferentes, de forma a facilitar a constante integração entre os quatro campos.

Outro ponto importante da organização curricular aqui proposta é inclusão, como forma de aprimoramento dos conteúdos trabalhados, de recursos computacionais (calculadoras e programas de computador) para o ensino de diversos conteúdos em todas as quatro séries. Como já foi observado, a familiaridade com novas tecnologias é um aspecto fundamental para a formação plena da cidadania na sociedade contemporânea, o que justifica a presença de recursos computacionais para o ensino na educação básica de forma geral.

Além disso, no caso específico da Matemática, podemos ainda acrescentar a este um aspecto particular: como a estrutura dos algoritmos utilizados por computadores e calculadoras é essencialmente matemática, esta estrutura pode se converter em um recurso pedagógico em si. Em outras palavras, a exploração pedagógica dos processos computacionais para efetuar cálculos pode aprofundar a compreensão pelos alunos dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para cada uma das séries, apresentamos uma organização curricular geral de conteúdos vinculados aos quatro campos, e, em seguida, indicações mais detalhadas de conteúdos que consideramos fundamentais com sugestões de abordagens, seguida de uma lista de aprimoramentos possíveis desses conteúdos. De acordo com a proposta geral feita para a área de Ciências da Natureza e Matemática, o documento de orientação curricular propõe:

(1) que todos os temas fundamentais sejam objeto de estudo; e

(2) que todos os programas de estudo incluam, necessariamente, pelo menos um dentre os aprimoramentos sugeridos em cada um dos principais temas tratados pelas disciplinas. Os aprimoramentos escolhidos serão parte integrante dos conhecimentos a serem considerados como objeto de estudo.

Apresentaremos também sugestões metodológicas para alguns tópicos selecionados – tipicamente considerados como obstáculos no ensino básico de Matemática. Essas sugestões visam ilustrar em linhas gerais a distribuição curricular proposta (particularmente no que diz respeito a suas características de estabelecimento de conexões diversificadas entre conteúdos e de retomada, reestruturação, reconexão e aprofundamento progressivo de linhas de conteúdos), além de servir como orientação para a abordagem pedagógica em sala de aula, elaboração de atividades para os alunos e elaboração de avaliações. Sugerimos ainda uma breve bibliografia e uma relação de programas computacionais e de portais na Internet, que podem servir de apoio para o professor.

Em Resumo – Alguns Pontos Importantes

Esta estrutura curricular foi organizada de forma que todos os quatro campos fundamentais sejam abordados em todas as quatro séries do Ensino Fundamental. Assim, cada linha de conteúdos deve ser retomada e reestruturada, sempre que estiver relacionada com novos contextos matemáticos apresentados.

Além disso – considerando a grande diversidade social observada na rede pública estadual de ensino do Estado do Rio de Janeiro – para permitir maior autonomia de cada professor ao adaptar a estrutura curricular a sua realidade particular, os tópicos foram organizados da seguinte forma:

• *tópicos centrais:* Estes conteúdos são obrigatórios e devem necessariamente ser abordados, mesmo que a realidade de sala de aula demande uma abordagem menos aprofundada que a sugerida neste documento.

• *abordagem e ordenação recomendadas:* Como o próprio título sugere, tratam-se de recomendações – cada professor deve planejar o detalhamento dos tópicos centrais de acordo com sua realidade de sala de aula, tendo como objetivo que a abordagem adotada seja o mais próximo possível da recomendada.

• *aprimoramentos sugeridos:* Em um contexto pedagógico ideal, todos os aprimoramentos aqui sugeridos deveriam ser abordados e o professor poderia ainda incluir diversos outros. De forma geral, recomenda-se que pelo menos um dos itens nas listas de aprimoramentos sugeridos seja incluído na abordagem de cada campo.

TÓPICOS CENTRAIS
(SUGERIDO COMO O CONTEÚDO MÍNIMO OBRIGATÓRIO)

↓

ABORDAGEM E ORDENAÇÃO DE CONTEÚDOS
(SÃO RECOMENDAÇÕES, E DEVEM SER ADAPTADAS À CADA REALIDADE PELAS EQUIPES NAS ESCOLAS)

↓

APRIMORAMENTOS SUGERIDOS
(ENRIQUECEM O CONTEÚDO MÍNIMO – SUGERE-SE A INCLUSÃO OBRIGATÓRIA DE PELO MENOS UM EM CADA CAMPO)

Estrutura Curricular para a 5ª Série do Ensino Fundamental

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• cálculo mental e estimativas. • números naturais. • frações e números decimais. • sistemas de medida.	• regularidades e relações.	• observação do espaço e identificação de formas. • figuras planas. • perímetros e áreas. • ângulos.	• médias aritméticas. • tabelas e gráficos. • pares ordenados. • probabilidades discretas.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

Campo Numérico-aritmético

A abordagem de *números naturais* idealmente deve incluir os seguintes tópicos:

• origem histórica, sistema decimal de numeração, localização na reta numérica;

• leitura de números por extenso e uso dos algarismos indo-arábicos;

• representação na reta numérica;

• adição: as idéias de reunir e acrescentar, algoritmo;

• subtração: as idéias de retirar, comparar e completar, algoritmo, subtração como operação inversa da adição;

• multiplicação: idéia aditiva (adição de parcelas iguais), princípio multiplicativo da contagem, multiplicação como área, algoritmo;

• divisão (exata e não exata): as idéias de repartir e medir, algoritmo, divisão como operação inversa da multiplicação;

• as propriedades comutativa, associativa e distributiva;

• potências de dez,

• múltiplos e divisores;

• números primos.

Assim, objetiva-se uma conceituação ampla dos números naturais, sua representação e suas operações. No caso das operações e suas propriedades, recomenda-se fortemente ênfase nas idéias e não na nomenclatura.

Aprimoramentos Sugeridos

• escrita de números por extenso e uso dos algarismos indo-arábicos;

• potenciação e propriedades das potências de mesma base;

• radiciação: conceito e estimativas;

• critérios de divisibilidade simples (2, 3, 4, 5, 6 e 10);

• fatoração, fatores primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum.

O trabalho com frações e números racionais deve incluir (ver sugestão metodológica 2):

• frações: conceito, equivalência, representação na forma decimal, exemplos elementares de soma e subtração de frações;

• adição e subtração de números decimais.

Aprimoramentos Sugeridos

• a introdução da noção de porcentagem;

• início do trabalho de representação de números racionais na reta numérica.

A abordagem pedagógica do campo numérico-aritmético na 5ª série deve ainda incluir, por sua importância para o cotidiano e pela relação com outras disciplinas:

• sistemas de medida de diferentes grandezas, tais como: tempo, temperatura, comprimento, área, volume e ângulos.

• cálculo mental e estimativas;

• uso conveniente da calculadora;

• resolução de problemas.

Do ponto de vista metodológico, recomenda-se, nesta e nas demais séries do ensino fundamental, o emprego de resolução de problemas como um recursos pedagógico. Deve-se ainda estimular a prática de cálculo mental e estimativas e o uso conveniente da calculadora (ver sugestão metodológica 10) pelos alunos, sempre em paralelo com os algoritmos para as quatro operações na forma escrita.

Campo Algébrico-simbólico

A abordagem introdutória deste campo, feita na 5ª série do ensino fundamental, pode se restringir à identificação intuitiva de relações e de regularidades entre padrões gráficos e numéricos (ver sugestão metodológica 10, especialmente exemplos 1, 2 e 3), com o objetivo de preparar o estudo da simbologia algébrica, desenvolvida nas séries seguintes.

Campo Geométrico

O estudo de geometria na 5ª série deve ser desenvolvido a partir da observação e da exploração do espaço físico, suas formas e relações e identificação de figuras planas e de sólidos a partir de formas familiares. Desta forma, objetiva-se a introdução dos primeiros conceitos fundamentais – como perímetro, área, ângulo – e de suas propriedades. Assim, recomenda-se inicialmente a abordagem dos seguintes tópicos:

• identificação de formas no espaço;

• classificação (intuitiva) de figuras planas e sólidos de acordo com critérios variados;

• ampliação e redução de figuras planas com uso de papel quadriculado;

• identificação de polígonos;

• identificação de arestas, vértices, faces;

• paralelismo e perpendicularidade: reconhecimento e traçado.

Aprimoramentos Sugeridos

• composição e decomposição de figuras planas;

• vistas e planificação de sólidos geométricos;

A partir daí, a introdução das noções de perímetro e área deve incluir os seguintes tópicos (ver sugestão metodológica 3):

• perímetros de polígonos;

• áreas de quadrados e retângulos;

• conservação de área;

• independência das medidas de perímetro e área;

Aprimoramentos Sugeridos

• uso de unidades padronizadas e não padronizadas;

• relação entre a unidade de medida e o valor numérico da medida.

O estudo de ângulos deve abordar:

• uso do transferidor;

• identificação de ângulos de 90º, 180º e 360º;

• idéia de ângulo como giro e mudança de direção.

Aprimoramento Sugerido

• identificação de ângulos agudos e obtusos.

Campo da Informação

A abordagem pedagógica do campo de tratamento da informação no ensino fundamental deve estimular a familiaridade gradual com medidas de dispersão de dados (médias, modas, medianas) e com as diferentes formas de representação e de interpretação de dados (tabelas e gráficos de diferentes tipos). Em todas as quatro séries recomenda-se a observação e análise de notícias de jornais e revistas em sala de aula, bem como, se possível, a utilização de planilhas eletrônicas. Na 5ª série, pode-se abordar os seguintes tópicos (ver sugestão metodológica 9):

• leitura, interpretação e construção de tabelas

• leitura, interpretação e construção de gráficos de barra (gráficos de freqüência) e de setor;

• pares ordenados no primeiro quadrante;

• observação e análise de notícias de jornais e revistas.

Aprimoramentos sugeridos

- médias aritméticas simples;
- uso de planilhas eletrônicas;
- probabilidades discretas simples.

Estrutura Curricular para a 6ª Série do Ensino Fundamental

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• números inteiros. • frações e números racionais. • razões e proporções. • sistemas de medida.	• noção de variável e fórmulas algébricas. • equações e sistemas. • noção intuitiva de função.	• polígonos. • perímetros, áreas e volumes. • ângulos. • retas, segmentos, semi-retas. • circunferências.	• médias. • tabelas e gráficos. • probabilidades simples.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

Campo Numérico-aritmético

Em continuidade ao trabalho com números naturais na 5ª série, a introdução de números inteiros na 6ª série deve abordar:

• ordenação e comparação de números inteiros;

• as quatro operações elementares entre números inteiros e suas propriedades;

• expressões numéricas;

• a reta numérica e o plano cartesiano.

Aprimoramento Sugerido

• potenciação: propriedades das potências de mesma base e potências de dez (expoentes positivos e negativos).

A abordagem pedagógica para a introdução de números negativos é bem mais delicada que a de números naturais, pois a idéia é bem menos intuitiva para os alunos (ver sugestão metodológica 1). Assim, ao trabalhar com os alunos as quatro operações elementares e suas propriedades, é recomendada uma maior ênfase nos significados e interpretações e menor na nomenclatura ou em memorização de regras. Não há sentido em exercícios envolvendo expressões numéricas exageradas.

No caso de frações e números racionais, a abordagem deve dar continuidade ao trabalho desenvolvido na série anterior, enfocando (veja sugestão metodológica 2):

• reconhecimento de números racionais na forma de dízimas periódicas;

• adição e subtração de racionais na forma de fração e na forma decimal (caso geral);

• multiplicação e divisão de racionais na forma de fração e na forma decimal.

Aprimoramento Sugerido

• potenciação e radiciação de bases racionais, tais como $(0{,}3)^2$, $(\frac{1}{2})^4$, etc.

Dando prosseguimento ao trabalho desenvolvido na 5ª série, a abordagem do campo numérico-aritmético na 6a série deve ainda incluir:

• porcentagem;

• razões, proporcionalidade, regra de três,

• grandezas direta e inversamente proporcionais.

Aprimoramento Sugerido

• escalas.

• sistemas de medida de diferentes grandezas: tempo, temperatura, comprimento, área, volume e ângulos.

Como na série anterior, é importante explorar neste campo:

• uso conveniente da calculadora;

• cálculo mental e estimativas;

• resolução de problemas.

Campo Algébrico-simbólico

O trabalho com reconhecimento de padrões e regularidades desenvolvida na 5ª série deve servir com embasamento para que, na 6ª, se dê início ao trabalho com as noções de variável, dependência, equação, sistema e função, através da abordagem dos tópicos abaixo (ver sugestão metodológica 4):

• noção de variável e noção de incógnita;

• resolução de equações: por meio de estimativas mentais, de balanceamento e de operações inversas (ver sugestão metodológica 5);

• fórmulas algébricas, identificação de dependência entre variáveis (relacionando-as, onde couber, com as grandezas geométricas estudadas);

• representação gráfica no plano cartesiano de equações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7);

• resolução de problemas.

Aprimoramentos Sugeridos

• noção intuitiva de função (relacionando com as grandezas geométricas estudadas);

• sistemas lineares com duas variáveis;

• uso de programas computacionais gráficos para resolução de equações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7).

Campo Geométrico

O trabalho com reconhecimento de figuras planas iniciado na 5ª série deve ser retomado e aprofundado, abordando-se agora a classificação e a identificação de propriedades de polígonos, ainda de forma intuitiva:

• propriedades intuitivas de polígonos, ângulos internos e externos (através da observação de ladrilhos e pisos);

• identificação de diferentes tipos de quadriláteros.

Aprimoramento Sugerido

• ampliação e redução de figuras planas usando razões.

O estudo de medidas geométricas, já iniciado para áreas, também deve ser aprofundado e estendido, introduzindo-se a noção de volume. Este estudo deve incluir:

• perímetros de figuras planas;

• áreas de quadrados, retângulos e triângulos retângulos;

• cálculo de áreas de figuras planas por composição e decomposição de figuras de áreas conhecidas;

• idéia intuitiva e estimativas de volumes.

Aprimoramentos Sugeridos

• volumes de cubos e paralelepípedos: unidades padronizadas e não padronizadas, relação entre a unidade de medida e o valor numérico da medida;

• conservação de volume;

• relação de medidas em metros cúbicos e seus submúltiplos com medidas em litros e seus submúltiplos.

O estudo de ângulos nesta série deve abordar:

• ângulos adjacentes, complementares e suplementares;

• uso de régua e compasso para construção de ângulos.

O estudo de retas deve ser iniciado nesta série, e incluir:

• identificação de retas, segmentos, semi-retas;

Aprimoramento Sugerido

• as noções de bissetriz e mediatriz.

Recomenda-se ainda a introdução da idéia de circunferência, incluindo:

• uso do compasso para construção de circunferências;

• identificação de raio, diâmetro e centro.

Campo da Informação

Na 6ª série, os seguintes tópicos devem ser abordados (ver sugestão metodológica 9):

- médias aritméticas simples e ponderadas;
- leitura, interpretação e construção de tabelas e de gráficos de barra, de setor e de segmentos;
- coleta e organização de dados em tabelas e de gráficos;
- noção de probabilidade discreta e exemplos simples;
- observação e análise de notícias de jornais e revistas.

Aprimoramentos Sugeridos

- noção de moda, exemplos simples;
- uso de planilhas eletrônicas.

Estrutura Curricular para a 7ª Série do Ensino Fundamental

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• números racionais. • razões e proporções. • sistemas de medida. • porcentagem e juros simples.	• noção de variável e fórmulas algébricas. • equações, inequações e sistemas. • monômios e polinômios. • produtos notáveis. • noção de função.	• propriedades de triângulos e quadriláteros. • áreas e volumes. • congruência de figuras planas. • ângulos. • Teorema das Paralelas.	• médias, modas e medianas. • tabelas e gráficos. • probabilidade. • noções de amostras e populações. • aplicações de porcentagem.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

Campo Numérico-aritmético

Antes de se introduzir a idéia de número irracional (o que será feito na 8ª série), é recomendada uma revisão geral sobre racionais na 7ª série, enfocando:

• conceito, operações e propriedades;

• representações na forma de fração e decimal.

Aprimoramento Sugerido

• fração geratriz de dízimas periódicas.

Em continuidade às séries anteriores, a abordagem do campo algébrico-simbólico na 7ª série deve ainda incluir:

• porcentagem e juros simples;

• razões e proporções, grandezas direta e inversamente proporcionais;

• uso conveniente da calculadora;

• resolução de problemas.

Aprimoramento Sugerido

• noções de notação científica.

Campo Algébrico-simbólico

A abordagem dos principais conceitos deste campo deve ser gradativamente revisada e aprofundada ao longo das quatro séries do segundo segmento do ensino fundamental. Assim, recomenda-se o aprofundamento dos estudos desenvolvidos na 6ª série através da abordagem dos tópicos abaixo (ver sugestão metodológica 4):

• fórmulas algébricas, identificação de dependência entre variáveis (relacionando-as, onde couber, com as grandezas geométricas estudadas);

• noção intuitiva de função (relacionando-as, onde couber, com as grandezas geométricas estudadas);

• monômios e polinômios;

• operações algébricas entre monômios e binômios: representações algébrica e geométrica (relacionando com propriedades de potências de mesma base e com perímetros e áreas de figuras planas);

• produtos notáveis: representações algébrica e geométrica;

• sistemas de equações; inequações elementares;

• representação gráfica no plano cartesiano de equações, inequações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7);

• resolução de problemas.

Aprimoramentos Sugeridos

• equações fracionárias elementares;

• uso de programas computacionais gráficos para resolução de equações, inequações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7);

Campo Geométrico

A abordagem de figuras planas desenvolvida nas séries anteriores deve ser continuada, aprofundando-se o estudo de triângulos e quadriláteros:

• classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos;

• condições de existência de triângulos (desigualdade triangular);

• classificação de quadriláteros quanto aos lados e ângulos;

• diagonais de quadrilátero;

• soma dos ângulo internos e soma dos ângulos externos de triângulos e quadriláteros;

• construções com régua e compasso de triângulos e quadriláteros.

Aprimoramento Sugerido

• estudo das cevianas de um triângulo.

O estudo de medidas geométricas deve ter prosseguimento, abordando os tópicos:

• perímetros de figuras planas;

• cálculo de áreas de figuras planas por composição e decomposição de figuras de áreas conhecidas;

• áreas de triângulos e quadriláteros;

• volumes de cubos e paralelepípedos: unidades padronizadas e não padronizadas, relação entre a unidade de medida e o valor numérico da medida;

• conservação de volume;

• relação de medidas em metros cúbicos e seus submúltiplos com litros e seus submúltiplos.

Aprimoramento Sugerido

• Teorema de Pitágoras.

Na 7ª série, recomenda-se também a introdução da noção de congruência de figuras planas, desenvolvida inicialmente através da superposição de figuras por meio de transformações geométricas e depois aplicada ao caso particular de congruência de triângulos:

• congruência de figuras planas por meio de transformações geométricas (translações, rotações e reflexões);

• congruência de triângulos.

O estudo de ângulos deve incluir noções de soma e subtração de ângulos, e é recomendada ainda a apresentação de importantes teoremas em geometria:

• Teorema das Paralelas, ângulos alternos internos, correspondentes, etc.

Campo da Informação

A partir da 7ª série, sugere-se o aprofundamento do trabalho com medidas de dispersão e gráficos, desenvolvido nas séries anteriores:

• medidas de tendência central: média, moda e mediana;

• aplicações de porcentagem ao tratamento da informação (noção de freqüência relativa);

• leitura, interpretação e construção de tabelas e de gráficos de barra, de setor e de segmentos;

• noções de amostra e população;

• observação e análise de notícias de jornais e revistas.

Aprimoramento Sugerido

• uso de planilhas eletrônicas.

Estrutura Curricular para a 8ª Série do Ensino Fundamental

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• números irracionais. • os conjuntos numéricos. • o número **π**. • ordens de grandeza e notação científica. • sistemas de medida. • noções de matemática financeira.	• equações, inequações e sistemas. • conceito de função.	• polígonos regulares. • círculos. • perímetros, áreas e volumes. • semelhança. • Teorema de Tales. • relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo. • Teorema de Pitágoras.	• médias, modas e medianas. • tabelas e gráficos. • levantamento de dados estatísticos.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

Campo Numérico-aritmético

A motivação para a existência de números irracionais pode ser construída geometricamente através do Teorema de Pitágoras aplicado à determinação da diagonal do quadrado de lado 1 (ver sugestão metodológica 8). A partir daí, a abordagem de números irracionais deve incluir:

• localização na reta numérica;

• representação decimal (discutindo dízimas periódicas e não periódicas);

• operações simples com radicais.

O trabalho com números naturais, inteiros e racionais desenvolvido nas séries anteriores deve ser revisado, e generalizado para o conjunto dos números reais, abordando-se:

• formalização dos conjuntos numéricos;

• o número **π**, o perímetro do círculo;

• a reta real;

• operações entre números reais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação) e suas propriedades.

A abordagem do campo numérico-aritmético na 8ª série deve ainda incluir:

• ordens de grandeza e notação científica;

• noções de matemática financeira;

• uso conveniente da calculadora;

• resolução de problemas.

Campo Algébrico-simbólico

Dando prosseguimento ao trabalho desenvolvido nas séries anteriores, recomenda-se a abordagem dos seguintes tópicos (ver sugestão metodológica 4):

• equações quadráticas: fatoração, fórmula de Baskara (ver sugestão metodológica 6);

• conceito de função;

• funções lineares e quadráticas;

• representação gráfica no plano cartesiano de equações, inequações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7);

• resolução de problemas.

Aprimoramentos Sugeridos

• sistemas de equações quadráticas;

• equações polinomiais elementares de grau superior;

• funções e proporcionalidade;

• uso de programas computacionais gráficos para resolução de equações, inequações e sistemas de equações (ver sugestão metodológica 7);

Campo Geométrico

Recomenda-se o aprofundamento do estudo de figuras planas, através do enfoque em propriedades de polígonos regulares:

• diagonais de polígonos regulares;

• soma dos ângulo internos e soma dos ângulos externos de polígonos regulares; a verificação de que todo polígono regular pode ser inscrito (ou circunscrito) em uma circunferência.

O estudo de círculos deve abordar:

• posições relativas entre círculos e retas;

• ângulos central e inscrito.

O estudo de medidas geométricas deve ter continuidade, incluindo os tópicos:

• revisão geral de perímetros e áreas de figuras planas;

• cálculo de áreas de figuras planas por composição e decomposição de figuras de áreas conhecidas;

• áreas de polígonos regulares;

• área do círculo e de partes do círculo (setor, coroa);

• volumes de cubos e paralelepípedos.

Da mesma forma que no caso da noção de congruência na 7ª série, é recomendada também a introdução da noção de semelhança de figuras planas na 8ª, através da ampliação de redução de figuras por meio de transformações geométricas e, em seguida, a aplicação ao caso particular de semelhança de triângulos:

• semelhança de figuras planas por meio de transformações geométricas (expansões e reduções);

• semelhança de triângulos.

Deve-se ainda apresentar nesta série o Teorema de Tales, relacionado com o estudo de semelhança. Também se pode abordar na 8ª série uma breve introdução do estudo de trigonometria, com ênfase nas idéias geométricas e não nos aspectos técnicos:

• relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo;

• Teorema de Pitágoras;

• senos, cossenos e tangentes de ângulos notáveis (30º, 45º, 60º).

Aprimoramento Sugerido

• o Teorema de Pitágoras pode ser trabalhado tanto como um resultado de área como um resultado de semelhança.

Campo da Informação

A abordagem de tratamento da informação na 8ª série deve incluir a continuidade do trabalho com medidas de dispersão e gráficos e o aprofundamento das noções de matemática financeira introduzidas na 7ª. Assim, recomenda-se:

• médias, modas e medianas;

• leitura, interpretação e construção de tabelas e de gráficos de barra, de setor e de segmentos;

• histogramas;

• probabilidade;

• levantamento de dados estatísticos;

• observação e análise de notícias de jornais e revistas.

Aprimoramento sugerido

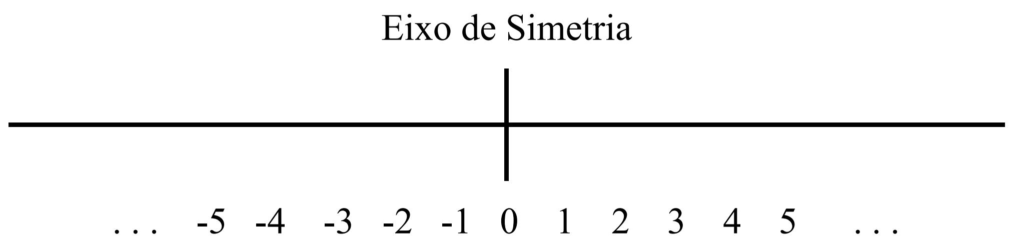
• uso de planilhas eletrônicas.

SUGESTÕES METODOLÓGICAS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Os tópicos abordados nas sugestões metodológicas a seguir foram selecionados dentre aqueles tradicionalmente considerados como “nós” do ensino básico de Matemática, isto é, conteúdos cujo ensino e aprendizagem são com freqüência considerados difíceis por alunos e professores. Como já foi dito, estas sugestões objetivam fornecer ao professor orientações de apoio para a abordagem pedagógica em sala de aula, elaboração de atividades e avaliações. Várias delas podem ser encontradas nas leituras sugeridas para o professor. É claro que há diversas outras formas de abordar tais conteúdos e que as orientações apresentadas aqui podem (e devem) ser adaptadas, a critério do professor, considerando seu contexto específico.

1. Números Inteiros

Para motivar a necessidade de números positivos e negativos, diversos exemplos podem ser explorados, tais como temperaturas, comparação da altitude com o nível do mar, saldos bancários, pontos em um jogo. Desta forma, o aluno estará tendo um primeiro contato com números negativos e poderá relacioná-los com outras disciplinas. Em seguida, pode-se construir a reta numérica com os alunos, fazendo-os pensar sobre a localização de cada número inteiro na reta e explorando uma relação intuitiva da simetria com o sinal de menos.



As operações de adição e subtração também devem ser bastante trabalhadas na reta. Para tal, pode-se fazer uma recordação das operações com números naturais e sua relação com a localização de números na reta, e generalizar para números inteiros positivos e negativos. Vale ressaltar que a calculadora neste ponto pode ser usada como um valioso recurso pedagógico de apoio, já que oferece a possibilidade de conferência dos cálculos feitos pelos alunos.

Para relacionar o sinal de menos com a idéia de simetria, o plano cartesiano pode ser explorado através de papel quadriculado (ou programas computacionais gráficos). A exploração de simetrias neste momento desenvolve ainda a visão espacial e desperta o estudante para o estudo de geometria. Assim, deve-se trabalhar a construção de diversos tipos de figuras através de simetrias: figuras geométricas (retângulos, losangos), objetos da vida diária (pipas, bolas, certas placas de trânsito), partes do corpo (rosto, olhos, nariz), dentre outras. É importante também chamar atenção para o fato de que se uma figura qualquer sofrer duas reflexões, obtém-se uma figura congruente à original.

Somente depois de se desenvolver e envolver os alunos no trabalho com números negativos, de forma que eles hajam construído significado para o sinal de menos, e de se trabalhar amplamente expressões numéricas apenas com adição e subtração, é que recomenda-se a introdução da operação de multiplicação. Desta forma, deve-se evitar ao máximo que o manuseio de sinais na operação de multiplicação se torne uma regra decorada e sem significado.

2. Frações

O trabalho com frações, iniciado nas 3ª e 4ª séries, deve ter continuidade nas séries seguintes por meio de atividades que permitam a reelaboração e aprofundamento dos conceitos. O conceito de fração merece cuidado: por exemplo, inicialmente é difícil para o aluno entender que uma fração é representada por um conjunto de símbolos, dos quais dois são isoladamente números – mas é, ela própria, um único número.

É de fundamental importância apresentar uma diversidade de atividades, que explorem diferentes modelos de frações. Por exemplo, pode-se separar $\frac{1}{4}$ de 12 balas, obtendo como resposta um número inteiro (3 balas) ou recortar $\frac{1}{4}$ de um pedaço de barbante, obtendo como resposta uma parte do todo.

Estas atividades devem ser trabalhadas utilizando materiais concretos (cartões, barbantes, tiras de papel, etc.) e representações gráficas (pintar, desenhar, etc.) para chegar à formalização.

Devemos ainda propiciar ao aluno situações diversificadas que permitam vivenciar os diferentes significados de frações (parte-todo, quociente, razão, operador). A relação parte-todo se apresenta quando um todo (contínuo ou discreto) divide-se em partes de mesmo tamanho.

Exemplo 1: Uma turma é dividida em 5 grupos, tendo cada grupo o mesmo número de alunos. Três desses grupos são formados só por meninas e o restante só de meninos. A fração que os grupos formados por meninas representam do total é $\frac{3}{5}$.

Na idéia de fração como quociente associa-se a fração à operação de divisão de números inteiros. Esta é uma idéia pouco explorada nos livros didáticos, mas fundamental para o desenvolvimento da compreensão matemática – ao se introduzir números racionais, a divisão de um inteiro qualquer por outro não nulo passou a ser sempre possível.

Exemplo 2: O resultado da divisão de 3 pizzas por 5 pessoas é indicada pela fração $\frac{3}{5}$. Podemos observar que o resultado é o mesmo do exemplo anterior, embora as situações apresentadas sejam bem diferentes.

As frações também devem ser utilizadas como índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, como razões.

Exemplo 3: Num colar, para cada 3 contas amarelas são colocadas 5 contas vermelhas, ou seja, as contas amarelas e vermelhas no colar estão na razão de $\frac{3}{5}$.

A idéia de fração também está presente no estudo das probabilidades, das porcentagens e das proporções como escalas em mapas. As frações ainda podem ser apresentadas como operações, isto é, algo que age sobre uma grandeza e a transforma.

Exemplo 4: Que número devo multiplicar por 5 para obter 3?

Esta idéia também está presente no trabalho com situações que envolvem representações de objetos, como por exemplo, redução ou ampliação de fotografias e figuras em geral.

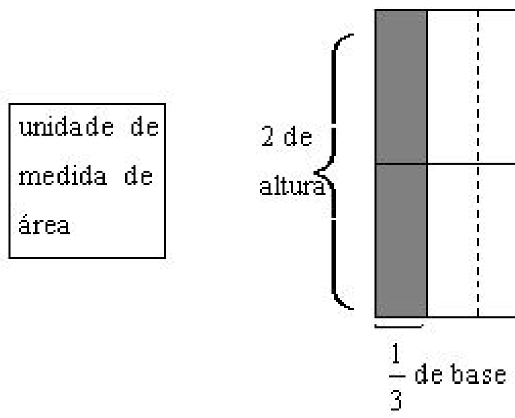
Devemos destacar a importância de propor atividades que envolvam todos estes significados durante o processo de aprendizagem, possibilitando ao aluno analisar e comparar as várias interpretações que existem e se interligam, construindo uma imagem conceitual rica.

Multiplicação de Frações

Inicialmente, pode-se apresentar a multiplicação de fração por número natural como uma adição de parcelas iguais, por exemplo, $3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Para generalizar o conceito a multiplicação de fração por fração, a interpretação multiplicação como áreas de retângulos é um bom um recurso pedagógico. Assim, podem-se utilizar exemplos onde a base e a altura dos retângulos são números inteiros ou fracionários. Nos exemplos 5 a 6 a seguir, consideremos o quadrado à esquerda como unidade de medida de área e seu lado como unidade de comprimento.

Exemplo 5: Fração por número natural

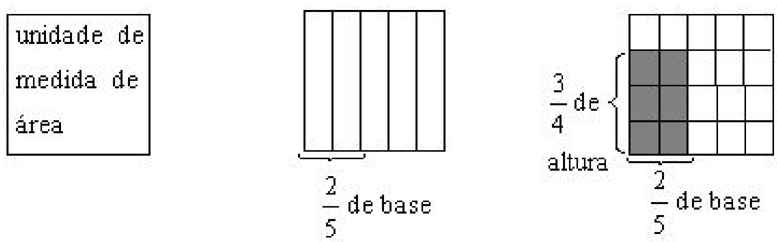
O retângulo hachurado tem as seguintes dimensões: $\frac{1}{3}$ u.c. de base por 2 u.c. de altura.



A unidade de medida de área foi dividida em 3 partes iguais, e o retângulo hachurado corresponde a 2 dessas terças partes, ou seja, $\frac{2}{3}$ u.a. O produto $\frac{1}{3} \times 2$ expressa a medida da área do retângulo considerado, isto é $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

Exemplo 6: Fração por fração

O retângulo hachurado tem $\frac{2}{5}$ u.c. de base por $\frac{3}{4}$ u.c.

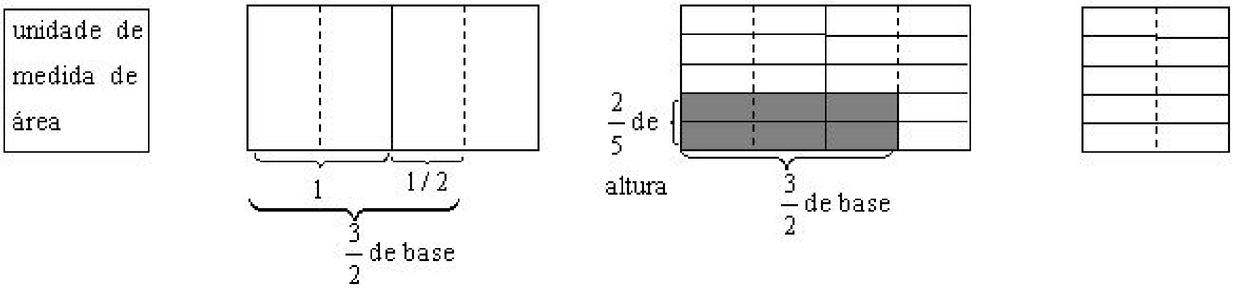


A unidade de área foi dividida em 20 partes iguais e o retângulo hachurado corresponde a 6 dessas partes.

Logo: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$.

Exemplo 7: Fração própria por fração imprópria

O retângulo hachurado tem $\frac{3}{2}$ u. c. de base por $\frac{2}{5}$ u.c. de altura.



A unidade de área foi dividida em 10 partes iguais e o retângulo hachurado corresponde a 6 dessas partes.

Logo: $\frac{3}{2} \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{6}{10}$.

A partir de várias experiências como essas, os alunos começam a generalizar, deduzindo as regras para multiplicação de frações. Nesse momento, é importante apresentar uma nova propriedade: a existência do inverso multiplicativo, segundo a qual a todo número fracionário, diferente de zero, corresponde outro número fracionário cujo produto com o número inicial é igual a 1.

$$\frac{2}{5} \text{ x } \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$$

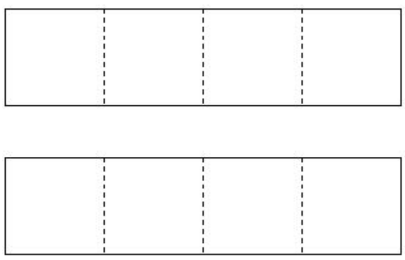
Logo, $\frac{2}{5}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{5}{2}$ (e vice-versa).

Divisão de Frações (Primeira Sugestão)

Uma grande dificuldade para o ensino de divisão de frações é dar significado para a operação. Vamos apresentar algumas sugestões para chegar à regra prática.

Exemplo 8: Dividir um número natural por uma fração de numerador 1.

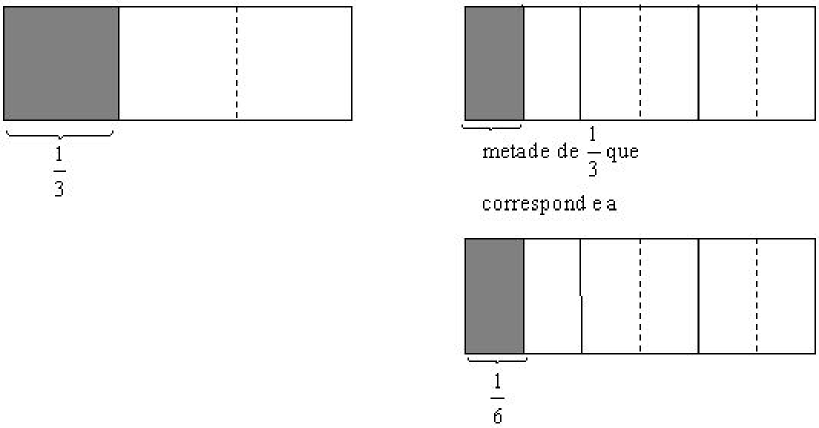
Neste caso, utilizaremos a divisão no sentido de 'quantos cabem'. Dividir 2 por $\frac{1}{4}$, significa descobrir quantos pedaços de $\frac{1}{4}$ cabem em 2 inteiros, ou seja:



$$2 \div \frac{1}{4} = 8$$

Exemplo 9: Dividir uma fração de numerador 1 por um número natural.

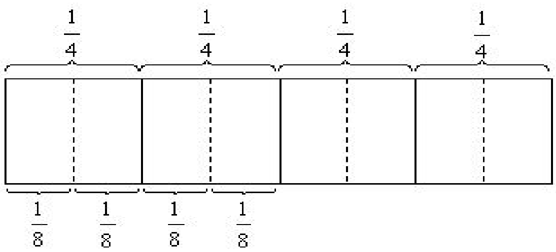
Neste caso, utilizaremos a divisão relacionada à idéia de repartir, ou seja, de subdividir uma parte de um todo num certo número de partes iguais. Dividir $\frac{1}{3}$ por 2, significa achar a metade de $\frac{1}{3}$, obtendo $\frac{1}{6}$ do total considerado:



$$\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$$

Exemplo 10: Dividir uma fração por outra fração, tendo as duas numerador 1.

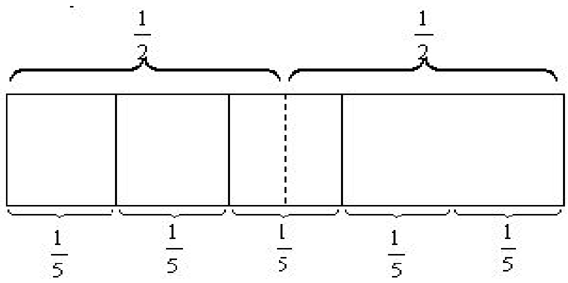
Utilizamos a divisão relacionada à idéia de 'quantos cabem'. Dividir $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{8}$ significa descobrir quantos pedaços de $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{4}$.



Comparando $\frac{1}{4}$ do retângulo com $\frac{1}{8}$ deste mesmo retângulo, vemos que o pedaço de $\frac{1}{8}$ cabe duas vezes em $\frac{1}{4}$, ou seja, que $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = 2$.

Exemplo 11: Dividir uma fração por outra fração, tendo as duas numerador 1.

Da mesma forma, podemos apresentar a divisão de $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{5}$, por exemplo, através de uma situação do tipo: 'quantos pedaços do tamanho de $\frac{1}{5}$ de uma barra de chocolate cabem em metade desta mesma barra?'



O pedaço de $\frac{1}{5}$ cabe duas vezes e meia em $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$.

A generalização para a divisão de uma fração qualquer por outra é um passo difícil, por isso deve ser conduzido com todo o cuidado. Para obter a regra prática da divisão, podemos aplicar as propriedades anteriormente estudadas: inverso multiplicativo (a todo número fracionário, diferente de zero, corresponde outro número fracionário cujo o produto com o primeiro é igual a 1) e invariância do quociente (um quociente não se altera quando dividendo e divisor são multiplicados por um mesmo número).

Exemplo 12: Consideremos a divisão: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$. Escrevendo a divisão proposta em forma de fração, temos: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$. Depois, aplicando as duas propriedades citadas, passando a ter:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}}{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Desta forma, devemos levar o aluno a perceber que a divisão proposta é equivalente à multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor.

Divisão de Frações (Segunda Sugestão)

Há quem prefira trabalhar a divisão de frações a partir da idéia de operação inversa da multiplicação. Para isso é importante preparar bem os alunos para o "corte" de fatores comuns a numeradores e denominadores na multiplicação, antes de efetuar as multiplicações. Tendo sido feito isto e lembrando que 8 : 2 = 4 porque 4 x 2 = 8, para dividir, por exemplo, $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{7}$ considera-se o seguinte:

$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{?}{?}$ se, e só se, $\frac{?}{?} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$. Ora, não existe número natural que multiplicado por 5 dê 2, nem número natural que multiplicado por 7 dê 3 (isso só seria possível em casos particulares, se o numerador e o denominador de uma fração fossem múltiplos dos da outra). Então é preciso "cortar" estes números para que a operação seja possível. O modo de cortá-los é justamente fazê-los aparecer como fatores na fração desconhecida: o 5 no denominador e o 7 no numerador. Depois é só multiplicar o numerador por

2 e o denominador por 3. Ou seja, fazendo as devidas simplificações tem-se: $\frac{2 \times 7}{3 \times 5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$, donde: $\frac{?}{?} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$, que é a regra geral: o quociente de duas frações é igual ao produto da 1ª pelo inverso da 2ª.

Localização dos Números Racionais na Reta Numérica

A localização dos números racionais (nas formas fracionária e decimal) na reta numérica deve merecer uma atenção especial por parte do professor desde a 5ª série. O professor deve propor atividades que propiciem a familiaridade com diferentes representações desses números. Como já foi dito, durante o processo de aprendizagem de racionais, é muitas vezes difícil para o aluno aceitar que um mesmo número pode ser representado de diversas formas – pois esta situação, em geral, não ocorre no estudo de naturais e inteiros. Por exemplo, ao localizar na reta $\frac{1}{2}$ e 0,5, o aluno deverá ser capaz de perceber que se trata de representações diferentes para o mesmo número, e de estabelecer relações entre estas representações.

Além disso, é importante explorar aspectos qualitativos e quantitativos por meio de perguntas tais como:

• *Este número é maior ou menor que 1?*

• *Quanto menor?*

• *Esta resposta tem sentido?*

• *Este número está compreendido entre que números inteiros consecutivos?*

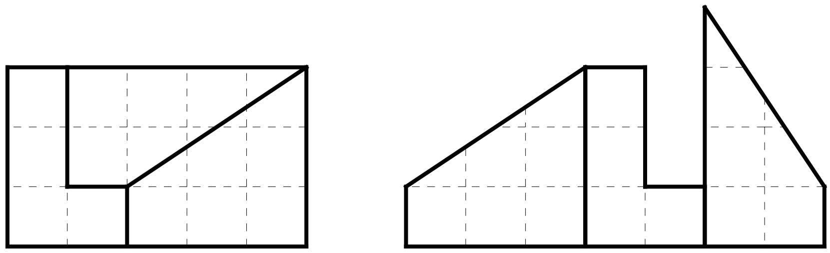
3. Perímetros e Áreas

Os conceitos de perímetro e área devem ser desenvolvidos desde as primeiras séries, quando se propõe ao aluno medir o perímetro e a área de seu caderno, de sua carteira, de sua sala, com a utilização de vários objetos como unidades de medida. Sugere-se ainda que o aluno estime perímetros e áreas maiores (como de quadras de esportes e outros terrenos) e escolha unidades convenientes para tal.

É interessante mostrar também aos alunos as relações entre as medidas do próprio corpo: antebraço com pé, pescoço com cintura, a abertura dos braços que coincide com a estatura (o que já foi usado como unidade de medida no Egito antigo). Sempre ao se tratar de unidades de medida, vale comentar os vários sistemas usados ao longo da história, muitos dos quais inspirados em medições do corpo humano e alguns mantidos até hoje (polegadas, pés, etc.). Atividades desta natureza motivam os estudantes a participarem ativamente da aula e instigam a curiosidade e a investigação.

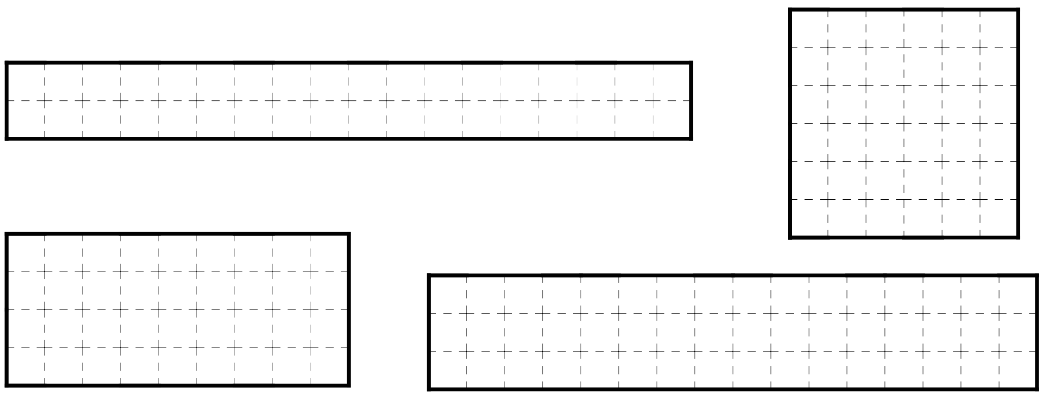
A partir dessas motivações iniciais, pode-se explorar várias figuras geométricas e seus perímetros e áreas, com a ajuda de papel quadriculado. Após medir alguns perímetros iguais com áreas distintas e vice-versa, pode-se propor o recorte de figuras geométricas do papel quadriculado e a sobreposição destas, de forma a ilustrar a mudança de perímetro com a manutenção da área, como no exemplo abaixo. É fundamental que os alunos construam a idéia de que perímetro e área são medidas *independentes*.

Exemplo 1:



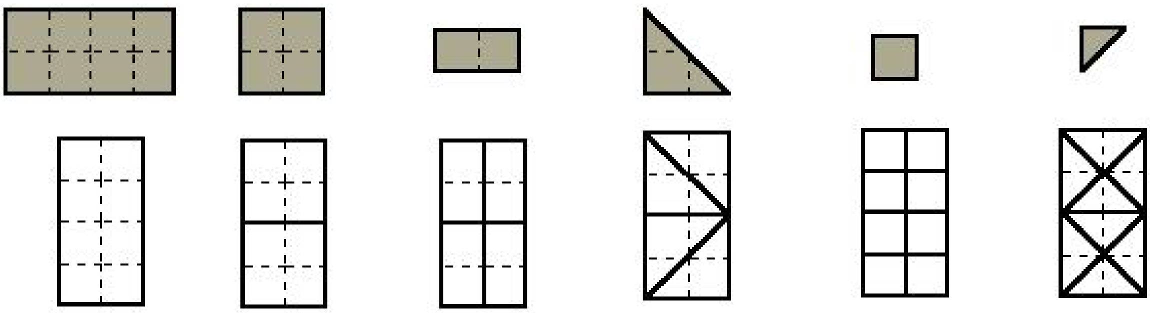
Ainda para ilustrar a idéia de que pode-se ter figuras com mesma área e perímetros tão grandes quanto desejado, pode-se propor aos alunos que construam no papel quadriculado diversos retângulos com mesma área e perímetros diferentes. No exemplo a seguir, todos os retângulos possuem 36 u.a., e observa-se que quanto mais se aproxima do quadrado, menor o perímetro com manutenção da área.

Exemplo 2:



O papel quadriculado também pode ser usado em atividades que ilustrem o fato que um mesma figura pode ser medida com unidades de área distintas, obtendo-se valores numéricos diferentes para a área. É importante chamar atenção para o fato de que quando menor for a unidade de área, maior será o valor numérico da área (e vice-versa). No exemplo a seguir, as figuras pintadas representam diferentes unidades de área e o mesmo retângulo é medido em relação a cada uma destas.

Exemplo 3:



1 u.a. | 2 u.a. | 4 u.a. | 4 u.a. | 8 u.a. | 8 u.a.

4. Simbologia Algébrica

Como já foi observado, a álgebra permite desenvolver a capacidade de abstração e generalização, além de constituir uma poderosa ferramenta matemática. Ela possui pelo menos quatro funções distintas, a saber:

• aritmética generalizada;

• estudo de variação entre grandezas dependentes;

• determinar valores de incógnitas;

• estrutura simbólica geral da matemática.

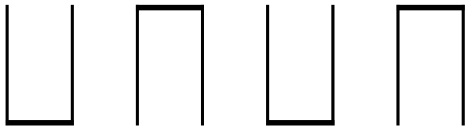
Para cada uma dessas funções os símbolos desempenham diferentes papéis pedagógicos. O quadro a seguir apresenta de uma forma simplificada as diferentes funções da álgebra e a utilização dos símbolos, relacionando os conteúdos referentes a cada função.

FUNÇÃO	ARITMÉTICA GENERALIZADA	VARIAÇÃO ENTRE GRANDEZAS	DETERMINAÇÃO DE INCÓGNITAS	ESTRUTURA SIMBÓLICA
USO DO SÍMBOLO	Generalização de propriedades numéricas *Exemplo:* a x b = b x a	Variáveis *Exemplo:* Se João recebe R$12,00 por hora de trabalho, qual será o seu salário sabendo ele trabalhou n horas no mês?	Incógnitas *Exemplo:* Se adicionarmos 7 ao dobro de um número obtemos 37. Qual é esse número? 2x + 7 = 37	Manipulação de expressões simbólicas *Exemplo:* Fatorar ac - bd - bc + ad
CONTEÚDO	Propriedades das operações e generalizações de padrões	Estudo das relações e funções	Estudo das equações	Cálculo algébrico

O trabalho com álgebra iniciado nas primeiras séries do ensino fundamental deve ter continuidade para que as noções e conceitos algébricos possam ser ampliados e consolidados. É necessário desenvolver um trabalho articulado envolvendo essas quatro funções ao longo do segundo segmento do ensino fundamental, proporcionando ao aluno a vivência de experiências variadas que envolvam todas elas.

No inicio do ensino de álgebra (na 5ª série), sugerimos apresentar situações que permitam ao aluno generalizar padrões e seqüências por meio da observação de regularidades. Neste procedimento, os símbolos aparecem de uma forma natural como variáveis propriamente ditas, possibilitando a aprendizagem. Nota-se que nesta proposta os símbolos algébricos são utilizados como incógnitas, que são introduzidas após a construção e manipulação de expressões algébricas. Este é um ponto delicado, pois requer muitas vezes a compreensão de que os mesmos símbolos (em geral letras) podem ser usados para representar tanto variáveis (em relações e funções), como incógnitas (em equações) e constantes (em equações, relações e funções). Vamos apresentar algumas atividades em que os alunos possam investigar regularidades, tanto em seqüências numéricas como em padrões geométricas. O objetivo destas atividades é expressar seqüências e padrões de maneira genérica, estimulando a construção da linguagem algébrica ao descrevê-los simbolicamente.

Exemplo 1: Descobrir a regra da seqüência abaixo, supondo que ela continue no mesmo padrão:

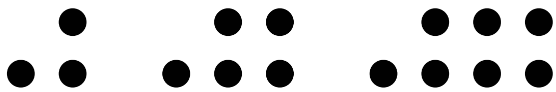


Qual é o 6º termo desta seqüência?

Sem desenhar, determine qual é o 10º termo desta seqüência?

Escreva a regra desta seqüência.

Exemplo 2: Observe a seqüência das figuras e imagine que ela continua no mesmo padrão:



Qual é a próxima figura da seqüência? Desenhe. E a seguinte? Desenhe.

Observando a seqüência, diga quantos pontinhos tem cada figura?

Quantos pontinhos tem a 4ª figura? E a 5ª? E a 6ª? E a 13ª?

Escreva a regra de formação dessa seqüência.

Exemplo 3:

Observe a seqüência:

Se a seqüência continuasse no mesmo padrão, qual seria o próximo número? E o seguinte?

Qual é o número que ocupa a 8ª posição? E a 9ª?

Como você descobriu o número que ocupa a 8ª posição? Escreva uma sentença matemática para descobrir um termo qualquer.

Também são atividades interessantes para que os alunos expressem e generalizem relações entre números as que envolvem completar seqüências com produtos de números negativos por positivos e de negativos por negativos, mantendo o padrão numérico apresentado, como as exemplificadas abaixo:

$$\begin{array}{rccccccl}
 & 3 & . & 2 & = & 6 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & -2 \\
 & 2 & . & 2 & = & 4 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & -2 \\
 & 1 & . & 2 & = & 2 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & -2 \\
 & 0 & . & 2 & = & 0 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & -2 \\
 & (-1) & . & 2 & = & ? & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccccccl}
 & 3 & . & (-3) & = & -9 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & +3 \\
 & 2 & . & (-3) & = & -6 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & +3 \\
 & 1 & . & (-3) & = & -3 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & +3 \\
 & 0 & . & (-3) & = & 0 & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & +3 \\
 & (-1) & . & (-3) & = & ? & & \\
-1 & \downarrow & & & & \downarrow & & +3 \\
 & (-2) & . & (-3) & = & ? & &
\end{array}$$

5. Conceito de Equação e Equações de Primeiro Grau

"Algebrizar" um aluno é quase como alfabetizá-lo. Portanto, o processo pedagógico de conhecimento e decodificação da linguagem matemática deve ser conduzido com alguns cuidados. Antes do estudo de equações deve ser iniciado um trabalho de leitura e expressão em linguagem algébrica, com exemplos simples que possam ser resolvidos por meio de cálculos mentais, como no caso abaixo.

Exemplo 1: Se o dobro de um número é - 12, que número é este?

Não é recomendado abordar equações em linguagem algébrica sem que o aluno tenha familiaridade com termos algébricos e tenha total consciência das relações entre eles. A transformação necessária da linguagem corrente para a linguagem algébrica deve ser conduzida gradativamente. Portando, antes de se dar início ao estudo de equações algébricas, deve-se propor a "leitura" das expressões, em atividades como a do exemplo abaixo.

Exemplo 2: $3a + 4b$ significa afirmar "o triplo de *a* somado ao quádruplo de *b*."

Um equívoco bastante comum entre alunos no início do estudo de álgebra é o de pensar, por exemplo, no símbolo $3a$ como representando o número cuja dezena é 3 e a unidade *a* se pretende descobrir. A interpretação correta desta expressão pode ser explorada, por exemplo, através de perímetros de figuras planas.

Exemplo 3: Represente o perímetro de um quadrado de lado *x*.

Enfim, quando iniciar o estudo de equações, o aluno deve ser capaz de ler (criticamente) expressões algébricas.

Exemplo 4: $5k - 8 = 12$ significa perguntar "O quíntuplo de um número menos oito é igual a doze. Que número é este?"

Este trabalho deve tornar claro ao aluno que uma equação representa uma igualdade e que resolver uma equação, ou encontrar suas raízes, significa descobrir um valor desconhecido que satisfaz a igualdade.

Ao se introduzir o método algébrico para resolução de equações, deve-se dar toda ênfase à idéia de que a aplicação de uma mesma operação algébrica em ambos os lados de uma equação mantém a igualdade verdadeira. Neste momento, um recurso bastante útil é a analogia com uma balança cujos dois pratos devem ser mantidos em equilíbrio – assim, tudo que for feito de um lado deve ser feito igualmente do outro. É de fundamental importância que os alunos, em hipótese alguma, assimilem o método de resolução de equações como um processo sem significado de "passar os termos para outro lado".

Exemplo 5:

$$w + 5 = 9$$
$$w + 5 - 5 = 9 - 5$$
$$w = 4$$

Exemplo 6:

$$5k - 8 = 12$$
$$5k - 8 + 8 = 12 + 8$$
$$5k = 20$$
$$\frac{5k}{5} = \frac{20}{5}$$
$$k = 4$$

6. Equações Polinomiais de Segundo Grau e de Grau Superior

A abordagem de resolução de equações polinomiais de segundo grau e de grau superior na 8ª série deve dar continuidade ao trabalho anterior com equações elementares. Assim, deve-se destacar as noções de variável, de incógnita e de raíz de uma equação, como sendo o valor numérico da incógnita que satisfaz a igualdade.

A introdução da fórmula de Baskara merece cuidado especial, pois esta deve figurar como *um método particular para resolução de equações* (no caso especial de grau 2) e não como o objetivo central do estudo de equações quadráticas. Portanto este estudo pode ser iniciado a partir de exemplos numéricos simples de equações (reduzidas) que podem ser resolvidas apenas por meio de operações aritméticas ou de fatoração.

É importante ressaltar que, antes deste trabalho ser iniciado, o aluno deve ter familiaridade com o significado de todos símbolos algébricos utilizados, bem como com as propriedades das operações manuseadas (em particular potenciação e radiciação).

Da mesma forma, podem e devem ser discutidos exemplos de equações que não admitem soluções no conjunto dos números reais.

Exemplo 1:

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Exemplo 2:

$2x^2 + 7 = 9$

$2x^2 = 2$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Exemplo 3:

$2x^2 + 3x = 0$

$x(2x+3) = 0$

logo: $x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

Exemplo 4:

$x^4 = 4$

$x^2 = \pm 2$

para $x^2 = -2$, não existe solução real

para $x^2 = 2$, temos $x = \pm\sqrt{2}$

Exemplo 5:

$x^5 - x^3 = 0$

$x^3(x^2 - 1) = 0$

logo: $x = 0$ ou $x = \pm 1$

Exemplo 6:

$x^3 - \dfrac{1}{8} = 0$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

Ao longo de todo o trabalho com resoluções de equações, as equações de segundo grau devem apresentadas juntamente com equações de graus maiores que possam ser resolvidas facilmente (como no exemplo 6). Dentre as equações quadráticas que podem ser resolvidas por fatoração, encontram-se aquelas que têm a forma de um trinômio quadrado perfeito.

Exemplo 7:

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

Exemplo 8:

$x^2 + 4x + 4 = 9$

$(x+2)^2 = 9$

$x + 2 = \pm 3$

$x = -2 \pm 3$

logo: $x = -5$ ou $x = 1$

Exemplo 9:

$x^2 - 2x + 1 = 2$

$(x-1)^2 = 2$

$x - 1 = \pm\sqrt{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Os exemplos numéricos de trinômios quadrados perfeitos podem ser usados para motivar o método geral para resolução de trinômios do segundo grau por meio da transformação em trinômios quadrados perfeitos (isto é, “completar quadrados”).

Exemplo 10:

$$x^2+4x-5=0$$
$$x^2+4x+4-4-5=0$$
$$x^2+4x+4-9=0$$
$$x^2+4x+4=9$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm 3$$
$$x=-2\pm 3$$

logo, $x=-5$ ou $x=1$

Exemplo 11:

$$x^2+2x+2=0$$
$$x^2+2x+1-1+2=0$$
$$x^2+2x+1+1=0$$
$$x^2+2x+1=-1$$
$$(x+1)^2=-1$$

logo, a equação não possui soluções reais.

Exemplo 12:

$$4x^2-8x-5=0$$
$$4(x^2-2x)-5=0$$
$$4(x^2-2x+1-1)-5$$
$$4[(x-1)^2-1]-5=0$$
$$4(x-1)^2-4-5=0$$
$$4(x-1)^2-9=0$$
$$4(x-1)^2=9$$
$$(x-1)^2=\frac{9}{4}$$
$$x-1=\pm\frac{3}{2}$$
$$x=1\pm\frac{3}{2}$$

logo, $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$

Finalmente, depois que os alunos tenham adquirido familiaridade suficiente com exemplos numéricos, pode ser apresentada a dedução geral da fórmula de Baskara, por meio de completamento de quadrados:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$$
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0$$
$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

7. Resolução Gráfica de Sistemas

Depois da abordagem algébrica para resolução sistemas, por meio dos diferentes métodos (adição, comparação e substituição), não se deve deixar de lado a resolução gráfica. Desta forma, o aluno pode ampliar sua visão sobre sistemas, além de travar um primeiro contato com a equação de reta e com funções de primeiro grau (em geral, alunos a partir da 6ª série do ensino fundamental são capazes de observar, de maneira informal, os coeficientes lineares e angulares de retas). A abordagem gráfica deve ter início com ajuda de papel quadriculado. Pode-se partir de uma equação algébrica e marcar vários pares ordenados que satisfaçam a equação.

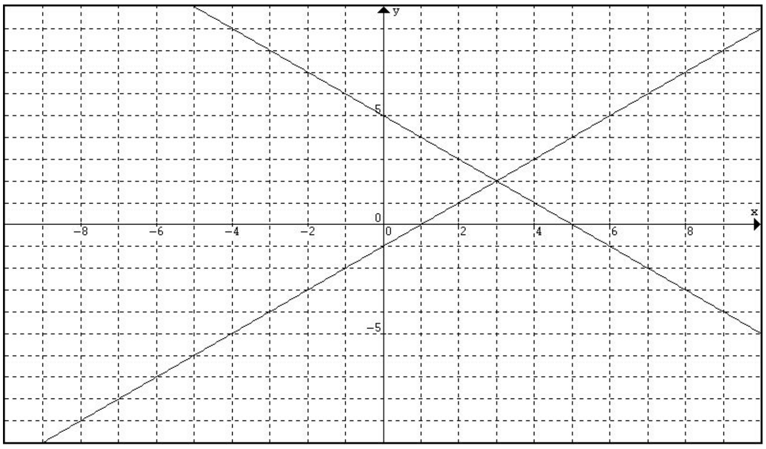
Exemplo 1: Para a equação, marcam-se vários pares ordenados, tais como (0,5), (1,4), (2,3), (-1,6). Após a análise destes pontos, que estarão alinhados (colineares), deve-se chamar atenção para os pares ordenados de coordenadas não inteiras que também resolvem a equação, por exemplo $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},\frac{16}{3}\right)$:

O objetivo desta análise inicial é capacitar o aluno a perceber que a representação gráfica de uma reta é o lugar geométrico dos pontos que resolvem a sua equação. Desta forma, torna-se natural perceber a solução de um sistema de primeiro grau com duas variáveis e duas equações é representada graficamente no plano cartesiano pelo ponto de encontro das duas retas.

Existem programas computacionais gráficos disponíveis, gratuitos e de fácil uso, que podem ser utilizados como ferramentas pedagógicas valiosas para este tipo de abordagem (ver sugestão metodológica 2). Esses programas devem ser introduzidos aos alunos *somente após a realização das atividades com lápis e papel*. O uso de programas gráficos confirma a atividade executada no papel, porém com maior precisão e rapidez, e dinamiza a aula. Com o apoio desses programas, os alunos podem construir e comparar várias retas em pouco tempo e modificar os coeficientes (angular e linear), observando imediatamente as mudanças de aspecto dos gráficos. Desta forma, sua atenção pode se liberar de cálculos mecânicos para se focar em análises qualitativas mais profundas, relacionando as propriedades algébricas de cada reta ou sistema de retas com as características geométricas de sua representação gráfica. Por exemplo, pode-se motivar a discussão sobre a relação entre o número de soluções do sistema e a posição relativa das retas, como indica a tabela abaixo. Neste caso, recomenda-se menor ênfase na nomenclatura da classificação dos sistemas quanto ao número de soluções (determinado, indeterminado, impossível) e maior ênfase nos significados algébrico e geométrico de tal classificação.

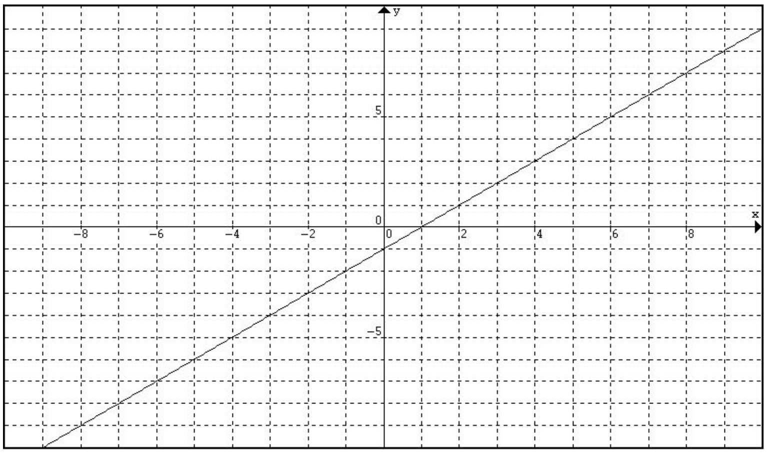
sistemas determinados (solução única)	retas concorrentes
sistemas indeterminados (infinitas soluções)	retas coincidentes
sistemas impossíveis (não existe solução)	retas paralelas

Exemplo 2: sistema determinado



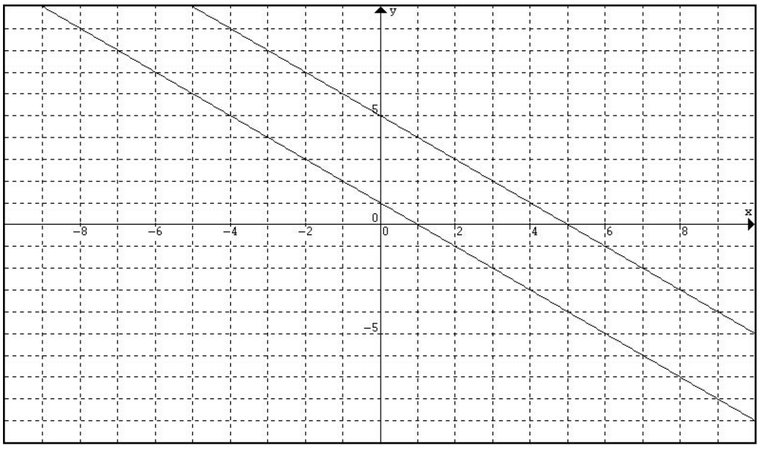
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Exemplo 3: sistema indeterminado



$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

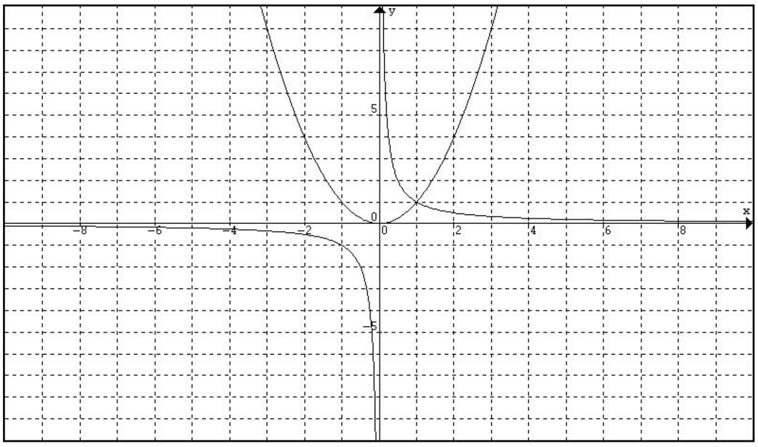
Exemplo 4: sistema impossível



$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Programas gráficos podem ainda ser utilizados para apresentar aos alunos mesmo sistemas não lineares elementares, ampliando a visão do conceito. A abordagem gráfica computacional deve sempre estar acompanhada da solução algébrica.

Exemplo 5:



$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} = x^2$$

$$x^3 = 1$$

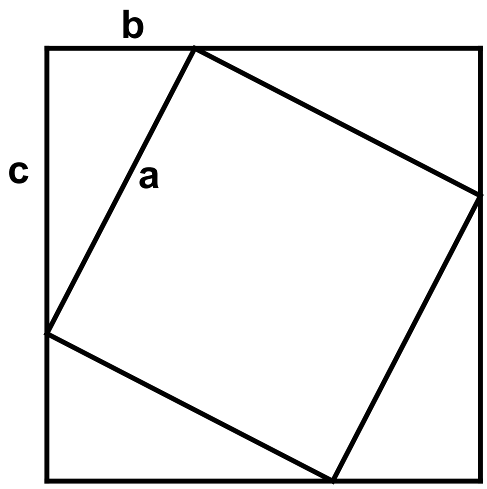
$$x = 1$$

$$y = 1$$

É importante ressaltar que o computador nunca deve ser utilizado como único recurso, mas sempre figurar como um dos ítens dentro de uma abordagem pedagógica ampla. Como é o caso de qualquer recurso pedagógico, o uso excessivo de programas de computador pode prejudicar seriamente o processo de aprendizagem. Por exemplo, programas gráficos, quando usados em excesso, podem levar ao indesejável efeito de inibir a habilidade dos alunos de calcular valores de funções por substituição. Desta forma, ao planejar uma abordagem pedagógica com apoio de programas computacionais, é fundamental que o professor tenha consciência das muitas possibilidades de exploração do recurso empregado – bem como de suas limitações – para adaptá-lo de forma adequada à sua própria realidade escolar.

8. Teorema de Pitágoras e Números Irracionais

Existem inúmeras formas conhecidas para provar o Teorema de Pitágoras. De fato, este é provavelmente o teorema cujas variedades de demonstrações mais tenham sido exploradas em toda a história da Matemática, desde que sua primeira prova conhecida foi elaborada na Escola Pitagórica Grega no século V AC. Para fins pedagógicos no ensino médio, as demonstrações geométricas por meio de igualdade de áreas são particularmente interessantes. Por exemplo, podemos chegar ao teorema a partir da construção abaixo.



A área do quadrado maior é igual a:

$$S = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

Por outro lado, esta mesma área pode ser decomposta nas áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado menor, portanto é também dada por:

$$S = 4 \times \frac{1}{2} bc + a^2 = a^2 + 2bc$$

Logo:

$$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Uma conseqüência imediata do Teorema de Pitágoras é o fato de que a diagonal do quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$. Este fato representou uma grande crise na Matemática grega na época de sua descoberta, pois toda a geometria da época era baseada na suposição de que quaisquer duas grandezas seriam comensuráveis entre si (isto é, de que a razão entre duas grandezas é necessariamente um número racional). Este dilema histórico pode ser usado para assinalar a complexidade dos números irracionais.

A questão sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$ pode ser motivada através da pesquisa da representação decimal desse número por tentativa e erro, com a ajuda de uma calculadora de bolso simples (munida simplesmente das quatro operações elementares). Para tal, pode-se começar com uma estimativa inicial, por exemplo 1,5. Fazendo o cálculo, observa-se que:

$$1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$$

Portanto, $\sqrt{2}$ deve ser menor que 1,5. Da mesma forma:

$$1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$$

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Dando continuidade ao processo, podemos fazer:

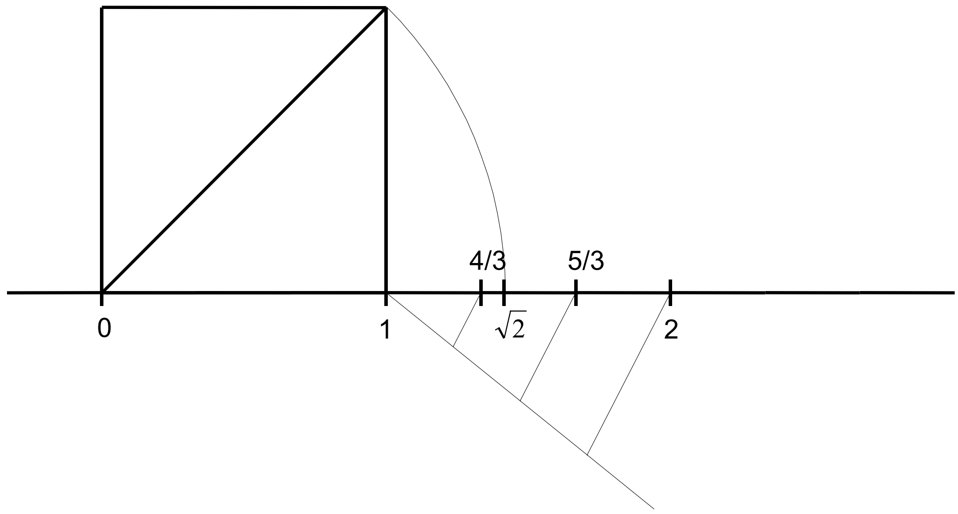
$$1{,}45 \times 1{,}45 = 2{,}1025$$
$$1{,}44 \times 1{,}44 = 2{,}0736$$
$$1{,}43 \times 1{,}43 = 2{,}0449$$
$$1{,}42 \times 1{,}42 = 2{,}0164$$
$$1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881$$

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42. Continuando o processo, podemos obter aproximações para $\sqrt{2}$ com tantas casas decimais quando desejarmos. Desta forma pode-se motivar a questão sobre o fato da representação decimal para $\sqrt{2}$ ser ou não periódica.

A partir daí, pode-se introduzir a discussão geral sobre relação entre a representação decimal de um número e o fato deste ser ou não racional. Por meio da observação do próprio algoritmo da divisão, pode-se concluir que qualquer número racional terá representação decimal finita ou periódica. Esta discussão pode ser iniciada com alguns exemplos numéricos e depois estendida ao caso geral.

Voltando ao exemplo de número $\sqrt{2}$, pode-se trabalhar a localização na reta numérica através construções geométricas, tanto com régua e compasso no papel quanto com programas de geometria dinâmica. Assim, podemos ilustrar por exemplo que $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{5}{3}$:

Exemplo:



9. Tratamento da Informação

Este campo pode ser abordado em todas as séries do segundo segmento do ensino fundamental, sendo explorado de forma diferente em cada uma delas. Desde a 5ª série, podem ser utilizadas planilhas eletrônicas como recurso de apoio.

Na 5ª série, deve-se explorar gráficos de setores e de barras. Podem ser apresentadas médias aritméticas simples, com base na leitura crítica de jornais e revistas. A partir daí pode-se começar a introduzir probabilidades discretas simples e algumas formas de levantamento de dados. Na 6ª série, já se tem condições de citar o cálculo de modas e de médias ponderadas. Gráficos de segmentos podem ser compreendidos, já que os alunos conhecem e trabalham com plano cartesiano. A coleta e organização de dados em tabelas e gráficos faz-se necessária como decodificação da linguagem estatística. Já na 7ª série, quando os cálculos percentuais já tiverem sido desenvolvidos, pode-se articular médias, modas e medianas, e noções básicas de amostragem. Na 8ª série, quando se espera os alunos estejam suficientemente seguros com cálculos aritméticos, noções de probabilidade e o trabalho com histogramas podem ser desenvolvidos.

O próprio ambiente escolar pode fornecer material rico e interessante para levantamento de dados e pesquisa estatística. Este trabalho pode ser planejado e desenvolvido junto à direção da escola, coordenação da disciplina e professores de outras disciplinas, possibilitando abordagens transdisciplinares proveitosas. Alguns possíveis temas de pesquisa são os seguintes:

• bairro de residência dos alunos;

• nível de escolaridade dos pais;

• motivo de escolha da escola;

• profissão dos pais;

• programas de televisão preferidos dos alunos;

• opção de lanches;

• jornais ou revistas mais lidos pela família.

É importante que o trabalho com tratamento da informação promova o senso crítico para interpretação de dados estatísticos veiculados em meios de comunicação de massa. Podem ser colocadas aos alunos questões tais como: o fato da média (ou moda, ou mediana) de salários em uma cidade ou um estado brasileiro ser alto não significa que todos na localidade ganhem bem. Questões como esta podem ser colocadas como ponto de partida para trabalhos de investigação interessantes.

10. O Uso da Calculadora de Bolso

O uso da calculadora em sala de aula continua sendo questionado por muitos professores. A calculadora – como qualquer recurso pedagógico – pode contribuir para a melhoria do ensino de Matemática, quando utilizada de forma criteriosa. Mesmo calculadoras simples de bolso (cujas funções sejam somente as quatro operações elementares) podem ser úteis para verificação de resultados e correção de erros, para a busca e percepção de regularidades, para a motivação e desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos e para a realização de tarefas de cálculos rotineiros e de investigação.

Podemos citar como exemplo o estudo de juros compostos. Com o auxílio da tecla de fator constante, alguns juros compostos podem ser calculados por pessoas que tenham familiaridade com números racionais e porcentagem.

Exemplo 1: Uma pessoa contraiu uma dívida sobre a qual incidem juros a uma taxa de 12% ao mês. Depois de quantos meses esta dívida vai dobrar?

Após o primeiro mês a dívida desta pessoa será 100% da quantia emprestada mais 12% desta quantia, o que é igual a 112% ou 1,12 da mesma. O fator multiplicativo 1,12 permite obter o valor final de um produto após o aumento de 12%. Para resolver este cálculo usamos a tecla do operador constante (sinal de =), que é um importante recurso da calculadora, desconhecido da muitas pessoas. Ao teclar, 1,12 × seguido do sinal de igual repedidas vezes, deve-se ficar atento ao número que aparecerá no visor para saber quando é que se atinge o dobro da dívida. Assim, descobriremos que na virada do 7º para o 8º mês a dívida dobra.

Além disso, a calculadora pode favorecer o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas pelos alunos, liberando seus esforços – que antes tinham que ser despendidos com cálculos rotineiros e maçantes – e possibilitando o trabalho com valores reais da vida cotidiana. O sucesso do uso desta tecnologia no ensino dependerá de *para que* e *como* o professor irá utilizá-la. Assim, destacamos alguns objetivos que devem ser observados no planejamento do ensino apoiado com o uso da calculadora:

• explicitar conhecer as características do visor, as teclas (numéricas, de operações, de memória, de limpeza e de operador constante) e a hierarquia das operações;

• conhecer as vantagens e, principalmente, as desvantagens do uso da calculadora;

• desenvolver as habilidades críticas de estimativa e cálculo mental;

• motivar a investigação matemática.

É fundamental chamar atenção para o fato de que, seja qual for o conteúdo abordado, a calculadora sempre deve ser utilizada de forma crítica, em conjunto com o exercício de estimativas mentais.

Exemplo 2: Para calcular 11,2% de uma certa quantia, podemos lançar mão da calculadora. Entretanto, devemos também propor aos alunos que, antes disso, façam uma estimativa do resultado que irá aparecer no visor ao calcular mentalmente 10% desta mesma quantia.

ESTRUTURA CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO

Para atingir os objetivos apresentados na introdução desta disciplina, é muito importante que os conteúdos de Matemática sejam, sempre que possível, articulados entre si, com outras disciplinas que o estudante tenha visto, esteja vendo ou vá ver na escola, e ainda com seus conhecimentos adquiridos, anteriormente, dentro e fora da escola. O primeiro passo nessa direção foi classificar os temas a serem estudados em quatro grandes campos e distribuí-los pelas três séries, de maneira que, em cada série, o estudante entre em contacto com temas de todos os campos. São os *campos numérico-aritmético*, *algébrico-simbólico*, *geométrico* e o da *informação*.

O segundo passo foi propor que alguns temas sejam revisitados, sob outro aspecto, em ocasiões distintas. E um terceiro, ainda, consiste em sugestões de entrosamento com outras disciplinas, entrosamento este que vai depender de diversas circunstâncias; dentre elas, do acordo com os professores das tais disciplinas, em cada escola.

Outro ponto importante da organização curricular aqui proposta é a inclusão, como forma de aprimoramento dos conteúdos trabalhados, de recursos computacionais (uso de calculadoras e programas de computador) para o ensino de diversos conteúdos em todas as três séries. Como já foi observado, a familiaridade com novas tecnologias é um aspecto fundamental para a formação plena da cidadania na sociedade contemporânea, o que justifica a presença de recursos computacionais para o ensino na educação básica de forma geral.

Além disso, no caso específico da Matemática, podemos ainda acrescentar a este um aspecto particular: como a estrutura dos algoritmos utilizados por computadores e calculadoras é essencialmente matemática, esta estrutura pode se converter em um recurso pedagógico em si. Em outras palavras, a exploração pedagógica dos processos computacionais para efetuar cálculos pode aprofundar a compreensão pelos alunos dos conceitos matemáticos envolvidos.

Para cada uma das séries, apresentamos uma organização curricular geral de conteúdos vinculados aos quatro campos, e, em seguida, indicações mais detalhadas de conteúdos que consideramos fundamentais, sugerindo uma ordenação, seguida de uma lista de aprimoramentos possíveis desses conteúdos. De acordo com a proposta geral feita para a área de Ciências da Natureza e Matemática, o documento de orientação curricular propõe:

• que todos os temas fundamentais sejam objeto de estudo; e

• que todos os programas de estudo incluam, necessariamente, pelo menos um dentre os aprimoramentos sugeridos em cada um dos principais temas tratados pelas disciplinas. Os aprimoramentos escolhidos serão parte integrante dos conhecimentos a serem considerados como objeto de estudo.

Apresentaremos também sugestões metodológicas para alguns tópicos selecionados. Essas sugestões visam ilustrar em linhas gerais a distribuição curricular proposta (particularmente no que diz respeito a suas características de estabelecimento de conexões diversificadas entre conteúdos, de reestruturação e aprofundamento progressivo de linhas de conteúdos). Sugerimos ainda uma breve bibliografia e uma relação de programas computacionais e de portais na Internet, que podem servir de apoio para o professor.

Os tópicos aqui listados são aqueles já usualmente desenvolvidos no Ensino Médio, com variação de ênfase num ou noutro ponto, a fim de contemplar aplicações impostas pelas condições atuais de desenvolvimento social e tecnológico. É importante que o professor observe que muitas destas sugestões já fazem parte das obras didáticas aprovadas no exame do MEC e das leituras sugeridas para o professor neste volume e que, ao lado de sugestões de acréscimos, há sugestões de cortes que promovem uma compensação no tempo gasto. Exemplos de cortes indicados são: cálculos algébricos envolvendo conjuntos, consideração excessiva de fórmulas no caso das progressões, desenvolvimento também excessivo de identidades e equações trigonométricas, um sem-fim de regras e cálculos carentes de sentido com matrizes, determinantes e números complexos. A interdisciplinaridade também está muito presente nas sugestões de acréscimos, mas sempre com a condição de que os professores das outras disciplinas trabalhem em conjunto com o professor de Matemática.

Em Resumo – Alguns Pontos Importantes

Esta estrutura curricular foi organizada de forma que todos os quatro campos fundamentais sejam abordados em todas as três séries do Ensino Médio. Assim, cada linha de conteúdos deve ser retomada e reestruturada, sempre que estiver relacionada com novos contextos matemáticos apresentados.

Além disso – considerando a grande diversidade social observada na rede do Estado do Rio de Janeiro – para permitir maior autonomia de cada professor ao adaptar a estrutura curricular a sua realidade particular, os tópicos foram organizados da seguinte forma:

• *tópicos centrais:* Estes conteúdos são obrigatórios e devem necessariamente ser abordados, mesmo que a realidade de sala de aula demande uma abordagem menos aprofundada que a sugerida neste documento.

• *abordagem e ordenação recomendadas:* Como o próprio título sugere, tratam-se de recomendações – cada professor deve planejar o detalhamento dos tópicos centrais, de acordo com sua realidade de sala de aula, tendo como objetivo que a abordagem adotada seja o mais próximo possível da recomendada.

• *aprimoramentos sugeridos:* Em um contexto pedagógico ideal, todos os aprimoramentos aqui sugeridos deveriam ser abordados e o professor poderia ainda incluir diversos outros. De forma geral, recomenda-se que pelo menos um dos ítens nas listas de aprimoramentos sugeridos seja incluído na abordagem de cada campo.

TÓPICOS CENTRAIS
(SUGERIDO COMO O CONTEÚDO MÍNIMO OBRIGATÓRIO)

↓

ABORDAGEM E ORDENAÇÃO DE CONTEÚDOS
(SÃO RECOMENDAÇÕES, E DEVEM SER ADAPTADAS À CADA REALIDADE PELAS EQUIPES NAS ESCOLAS)

↓

APRIMORAMENTOS SUGERIDOS
(ENRIQUECEM O CONTEÚDO MÍNIMO – SUGERE-SE A INCLUSÃO OBRIGATÓRIA DE PELO MENOS UM EM CADA CAMPO)

Estrutura Curricular para a 1ª Série do Ensino Médio

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• linguagem da teoria dos conjuntos e conjuntos numéricos. • seqüências, progressões aritméticas e geométricas.	• funções. • funções polinomiais do 1º e do 2º graus. • funções modulares. • equações e inequações.	• semelhança. • Teorema de Pitágoras. • trigonometria no triângulo retângulo.	• estatística: gráficos e tabelas de freqüência.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

A seguir apresentamos uma proposta de ordem para o desenvolvimento destes conteúdos, que pode ser modificada para atender a diferentes realidades. No entanto, seguindo o princípio geral da área, é importante que nenhum dos temas sugeridos fique a descoberto nesta série, e que alguns dos aprofundamentos sugeridos sejam incluídos pelos professores em seu programa de estudos. Para cada conjunto de conteúdos, oferecemos também algumas orientações gerais, além de comentários, exemplos e/ou sugestões metodológicas.

Campo Numérico-aritmético

Linguagem da Teoria dos Conjuntos e Conjuntos numéricos.

Noção de conjunto.

Inclusão e igualdade.

União, interseção, complementar.

Números naturais, inteiros e racionais.

Representação decimal de números racionais e dízimas periódicas.

Números irracionais e reais.

Orientações Gerais

A linguagem e os símbolos da Teoria dos Conjuntos facilitam alguns enunciados, com conjuntos infinitos ou mesmo aqueles finitos com muitos elementos. A maioria dos estudantes já conhece essa linguagem. Uma revisão precisa ser feita, sem, entretanto, excessos de simbologia ou de exercícios de álgebra dos conjuntos, que não encontram aplicação substantiva nesse nível de ensino.

Quanto aos números, uma especial atenção deve ser dada à representação decimal dos números e à representação dos números reais na reta.

Comentário: A representação decimal dos números reais é uma dificuldade diagnosticada pelos professores de áreas que lidam com medidas. Análises das respostas encontradas em provas do SAEB e a prática docente mostram que os estudantes, em todos os níveis da escola básica, confundem traço de fração com vírgula. A representação dos números reais na reta, quando bem explorada, vai desempenhar um papel de suma importância no esclarecimento dessas dúvidas e será amplamente utilizada durante o desenvolvimento de tópicos como funções e Estatística.

Outro ponto que merece atenção especial é a introdução dos números irracionais. Uma prova de que todo número racional tem uma representação decimal finita ou infinita periódica[3] e sua recíproca é um exemplo de demonstração fora do campo geométrico, que é simples e serve também para caracterizar os números irracionais como aqueles com representação decimal infinita e não periódica. Essa caracterização será útil, por exemplo, na extensão do conceito de potências aos expoentes irracionais.

Comentário: É importante frisar que o conhecimento de um número finito de casas decimais, por maior que seja, não é suficiente para garantir que o número seja racional ou irracional. Com efeito, o período sempre poderia aparecer mais adiante, ou uma representação aparentemente periódica poderia deixar de sê-lo mais adiante. Por isso, calculadoras e computadores não são instrumentos para essa verificação, como citam erroneamente alguns de nossos textos didáticos.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir.

• Ao estudar a linguagem e a notação da Teoria dos Conjuntos, vale a pena evidenciar a ligação que existe entre a implicação lógica e a inclusão de conjuntos.

• Ao introduzir os números irracionais, vale a pena mostrar que a raiz quadrada de 2 é irracional, provando que o quadrado de um quociente de números inteiros não pode ser igual a 2. Já a prova de que o número π é irracional exige conhecimento acima dos construídos até este nível.

• É sempre útil promover a leitura de textos sobre a história dos números, especialmente, sobre a "comoção" causada pela descoberta dos irracionais.

Sugestão: Um leitor mais exigente pode consultar o livro de Georges Ifrah, Os números, História de uma grande invenção, Editora Globo. Alguns LDs trazem notas históricas a esse respeito.

• A razão áurea é um belo exemplo de número irracional, além de promover uma articulação entre o campo numérico e o geométrico, e também com Artes e História.

• Há aqui uma oportunidade de articulação com professores de outras áreas que utilizem medidas. Eles podem propor problemas, em que seja preciso trabalhar com números racionais nas formas decimal ou fracionária. Uma outra articulação possível com os professores de História é a construção da linha do tempo, em que se colocam fatos da História geral ou da própria Matemática.

Campo Algébrico-simbólico

Funções; Função polinomial do 1º grau ou função afim; Função polinomial do 2º grau ou função quadrática; Função modular. Equações e inequações.

Introdução ao conceito de função.

Coordenadas cartesianas no plano.

Função polinomial do 1º grau ou afim: definição e exemplos, gráficos, zero, estudo do sinal.

Função polinomial do 2º grau ou quadrática: definição e exemplos, zeros, gráficos, estudo do sinal.

Funções definidas por mais de uma sentença.

Função modular.

Equações e inequações, do 1º e do 2º grau.

Orientações Gerais

Apresentar ao aluno a idéia de função de forma intuitiva, antes da simbologia e da linguagem matemática. Adotar a conceituação por correspondência entre elementos de conjuntos, ao invés de tomar a função como subconjunto do produto cartesiano desses conjuntos. Experiências têm mostrado que esse enfoque atende mais depressa à articulação com as aplicações.

O conjunto de pares surge depois, normalmente, como o gráfico da função e não como a própria função. Os gráficos das funções propiciam uma articulação com a Geometria Analítica, que pode ser introduzida aos poucos, mesmo sem a sistematização formal. Por exemplo, ao estudar o gráfico da função afim, podem ser abordados temas como a distância entre pontos, o coeficiente angular, etc.

Comentário: Aqui, é preciso destacar quais as propriedades que dependem e quais as que independem da escolha das unidades nos eixos. As coordenadas do ponto de interseção de duas retas e o paralelismo de duas retas, por exemplo, independem da particular escolha das unidades, enquanto distâncias e ângulos e, portanto, o perpendicularismo, são propriedades métricas, e sofrem a influência da escolha das unidades nos eixos. Em Matemática, é comum que se considere a hipótese, explícita ou não, de que essas unidades são as mesmas nos 2 eixos, mas nas aplicações quase sempre isso não acontece. O mesmo problema costuma surgir em gráficos obtidos em calculadoras ou por meio de softwares específicos e, se o professor não estiver atento a essa particularidade, pode estranhar alguns gráficos obtidos em computadores ou calculadoras gráficas. Por exemplo, os gráficos de retas perpendiculares apresentam ângulos não retos quando as unidades dos eixos das abscissas e ordenadas são diferentes.

Ainda quanto aos gráficos, embora nem sempre seja fácil determinar a forma do gráfico de uma função com ferramentas puramente algébricas, como as que são desenvolvidas, em geral, até essa etapa, vale a pena justificar a validade de algumas de suas propriedades. Por exemplo, vale a pena mostrar que o gráfico da função afim é, de fato, uma reta. Quando não se prove alguma das propriedades utilizadas no traçado do gráfico, que essa falha seja apontada e justificada para o estudante. O que se deve evitar a todo custo é que o aluno seja induzido a marcar alguns pontos do gráfico e "deduzir daí" qual a forma que esse gráfico deve ter.

Os gráficos devem ser lembrados, também, na resolução de equações e inequações.

Comentários: (1) O conceito de proporcionalidade é revisitado no estudo da função afim, quando for realçada a propriedade dessas funções, de que a variação dos valores da função, quando é dado um acréscimo à variável independente, não depende do ponto em que esse acréscimo é dado, mas é proporcional ao próprio acréscimo. (2) No caso da função quadrática, é importante salientar o processo de "completar quadrados".

Ao lado disso, vale a pena introduzir a idéia de taxa de variação, começando já a chamar a atenção do estudante para a "inclinação" do gráfico, em cada caso. Abre-se, desta forma, o caminho para a introdução do conceito de velocidade, feita no curso de Física. Lembremos sempre que a escolha da unidade em cada eixo tem seu papel, quando se tratar de ângulos.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• As funções constituem um tema excelente para a prática da interdisciplinaridade, já que elas são uma linguagem pela qual os fenômenos das ciências são expressos.

• Havendo possibilidade de uso de planilhas eletrônicas, o estudo de funções pode ser bastante ampliado. Por exemplo, é possível usar o processo da bissecção para o cálculo aproximado de soluções de uma gama enorme de equações.

• O estudo das funções polinomiais pode se estender a funções de grau mais alto, embora este seja um tópico que será desenvolvido na 3a série, em capítulo específico. Essa extensão pode ser feita, principalmente, se houver oportunidade de uso de programas de traçado de gráficos, ou de resolução de equações.

> Comentário: o processo da bissecção consiste na procura de intervalos, onde uma função contínua troque de sinal, para buscar aproximações de seus zeros. Se os zeros da função são isolados, como é o caso das funções polinomiais, e a função troca de sinal ao passar por esse zero, (como é o caso dos zeros de multiplicidade ímpar no caso das funções polinomiais), para encontrar aproximações de um desses zeros, é preciso considerar um intervalo em que, de início, haja um só zero. A partir daí, o processo consiste em ir refinando o intervalo, até que se chegue a intervalos cujos extremos tenham os mesmos dígitos iniciais.

Campo Geométrico

Semelhança, Teorema de Pitágoras.

Ângulos formados por uma transversal a retas paralelas.

Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Proporcionalidade e o Teorema de Tales sobre segmentos formados por transversais a retas paralelas.

Semelhança de triângulos.

Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras.

Orientações Gerais

A semelhança de triângulos deve ser revista, ligada ao conceito de proporcionalidade (que já deve ter sido retomado também no estudo da função afim). Ela é importante para a prova de que os valores das razões trigonométricas não dependem do tamanho do triângulo tomado.

Uma prova do Teorema de Pitágoras (que será muito utilizado em Trigonometria e Geometria Analítica, pelo menos) pode também ser retomada com o objetivo de desenvolver o raciocínio do estudante. Um cuidado especial deve ser dedicado à prova pela decomposição de quadrados, para que não seja uma simples constatação visual, mas que essa constatação seja confirmada a partir das propriedades das figuras formadas.

Aprimoramentos Sugeridos

O aprofundamento deste tema fica por conta da sua utilização a seguir, no estudo da Trigonometria, o que, por si, já é suficiente para amadurecer e aprofundar tal conceito e resultado. É muito importante, entretanto, a articulação com o professor de Física, que utilizará estes resultados, por exemplo, no estudo da Ótica.

Campo Geométrico

Trigonometria no triângulo retângulo.

As razões seno, cosseno e tangente.

Lei dos senos e dos cossenos.

Orientações Gerais

A trigonometria no triângulo retângulo tem várias aplicações no cálculo de distâncias a pontos inacessíveis. A semelhança de triângulos permite mostrar que as razões definidas são funções do ângulo, independentemente do tamanho do triângulo que se tome.

O teorema de Pitágoras tem papel importante na verificação da igualdade (ou identidade) fundamental: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

As razões cotangente, secante e cossecante, podem ser citadas para efeito de completar o vocabulário do estudante, mas seu papel nos cálculos é completamente dispensável.

> Sugestão: Os textos didáticos costumam dedicar muitas de suas páginas a identidades e cálculos algébricos envolvendo estas razões, o que deve ser evitado para que o tempo do estudante seja melhor aproveitado.

Aprimoramentos Sugeridos

O aprofundamento deste tema fica por conta da sua retomada na próxima série, quando for desenvolvida a trigonometria na circunferência. A qualquer tempo, no entanto, é muito importante a articulação com o professor de Física.

Campo Numérico-aritmético

Seqüências, progressões aritméticas e progressões geométricas.

Seqüências: definições e exemplos.

Fórmulas de recorrência.

Progressões aritméticas.

Progressões geométricas.

Orientações Gerais

A definição de seqüência merece uma atenção especial porque há uma recorrente confusão entre os conceitos de seqüência e de conjunto ordenado.

Exemplo: Com efeito, uma seqüência numérica pode ser considerada como uma função definida no conjunto dos números naturais, com valores reais, enquanto um conjunto ordenado é um conjunto onde está definida uma relação de ordem, ou seja, é possível comparar quaisquer dois de seus elementos. Por exemplo, a seqüência (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1) não faria sentido como conjunto ordenado: afinal, seriam só dois elementos ou sete? E que elemento seria maior, o 1 ou o 2?

O estudo de seqüências não deve se restringir ao das progressões. Esta é uma oportunidade para apresentar questões de busca de padrões ou regularidades.

Quanto às progressões, vale a pena fazer a ligação da progressão aritmética com a função afim, que reproduz a progressão aritmética se a variável independente for tomada só com valores naturais. Quanto à relação análoga entre a progressão geométrica e a função exponencial, ela pode ser anunciada agora para ser retomada por ocasião do estudo da exponencial.

Vale aproveitar a oportunidade para ressaltar a distinção entre o crescimento aritmético e o geométrico.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• Uma história que sempre atrai o interesse do estudante deste nível é a do menino de 7 anos que calculou a soma dos 100 primeiros números naturais em poucos minutos. Esse menino veio a ser o grande matemático alemão, Carl F.Gauss (1777 – 1855). Além da informação histórica, trata-se de apresentar um exemplo que se generaliza para o cálculo da soma dos termos de qualquer progressão aritmética finita.

• Esta é uma oportunidade para comparar média aritmética e média geométrica.

• O estudo de uma dízima periódica como soma de uma progressão geométrica infinita, de razão igual a uma potência de 10 com expoente negativo e, portanto, menor que 1, fornece um processo para encontrar a geratriz dessa dízima. Este é um exercício importante, pois permite um novo modo de encarar um problema já conhecido de nossos alunos, mas nem sempre compreendido. Cria-se, naturalmente, uma nova oportunidade de trabalhar com a representação decimal infinita, que é um problema delicado.

Campo da Informação

Estatística: gráficos e tabelas de freqüência

Estatística: o que é e a que se propõe.

Freqüências, freqüências relativas, freqüências percentuais.

Gráficos cartesianos: de barras, colunas, pontos, linhas.

Gráficos setoriais.

Orientações Gerais

Um problema no estudo da Estatística é que os livros, em geral, se restringem a definições e cálculos dos diversos índices. Cálculos estes que podem ser feitos por um pequeno número de toques de teclas em qualquer planilha eletrônica. É muito importante que seja destacado o objetivo da Estatística de fazer previsões a partir de dados numéricos e de cálculos com estes dados. Daí, a importância também de seu instrumento de comunicação, os gráficos.

Comentário: No traçado e leitura de gráficos, vale a pena chamar a atenção para a possibilidade da ocorrência de deformação de alguns gráficos, por meio de deturpação de escalas, veiculados nos meios de comunicação.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• Se for possível o uso de planilhas eletrônicas, vale a pena trabalhar com elas, o que estimula a conferência de dados obtidos manualmente e facilita a sua utilização além do simples cálculo.

• Uma atividade importante neste campo é a procura de gráficos e informações estatísticas veiculados na mídia. É comum que estas informações apresentem erros grosseiros, por manipulação proposital ou pura dificuldade de lidar com números.

Comentário: O uso de tabelas no ensino da Matemática costuma se restringir às tabelas de freqüência, em Estatística, e ao trabalho com funções, principalmente, como apoio para o traçado de gráficos. As tabelas são, entretanto, um instrumento precioso na organização de dados em geral e seu uso deve ser estimulado em outras circunstâncias, por exemplo, na resolução de problemas. Se for possível, vale a pena introduzir, também, o uso de grafos, do tipo árvore, e outros, úteis na resolução de problemas, na sua formalização e na tomada de decisões.

Estrutura Curricular para a 2ª Série do Ensino Médio

Tópicos Centrais

<table>
<tr><th>CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO</th><th>CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO</th><th>CAMPO GEOMÉTRICO</th><th>CAMPO DA INFORMAÇÃO</th></tr>
<tr><td rowspan="3">• análise combinatória.</td><td>• funções exponenciais;
• funções logarítmicas;
• equações e inequações.
• binômio de Newton.</td><td>• geometria de posição;
• poliedros;
• corpos redondos.</td><td rowspan="3">• probabilidades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TRIGONOMETRIA</td></tr>
<tr><td colspan="2">funções trigonométricas
circunferência trigonométrica</td></tr>
</table>

Abordagem e Ordenação Recomendadas

A seguir apresentamos uma proposta de ordem para o desenvolvimento destes conteúdos, que pode ser modificada para atender diferentes realidades. No entanto, seguindo o princípio geral da área, é importante que nenhum dos temas sugeridos fique a descoberto nesta série, e que alguns dos aprofundamentos sugeridos sejam incluídos pelos professores em seu programa de estudos. Para cada conjunto de conteúdos, oferecemos também algumas orientações gerais, além de comentários, exemplos e/ou sugestões metodológicas.

Campo Algébrico-simbólico

Funções Exponencial e Logarítmica.

Potências com expoentes irracionais.

Função exponencial: definição, propriedades, gráficos.

Função composta, função inversa.

Função logarítmica: definição, propriedades, gráficos.

Equações e inequações exponenciais e logarítmicas.

Orientações Gerais

A definição de potências com expoentes irracionais merece um tratamento cuidadoso, o que não se dá em vários dos livros didáticos. O estudo gráfico também deve ir além da união de pontos e estes gráficos podem ser utilizados na resolução aproximada de algumas equações. É importante destacar que se a variável independente for tomada só com valores naturais na função exponencial, obtém-se uma progressão geométrica. Vale aproveitar a oportunidade para voltar a comparar o crescimento aritmético com o geométrico, o crescimento linear e o exponencial.

A articulação com outras disciplinas como Química e Biologia é também importante.

Comentário: As funções exponenciais e logarítmicas têm várias aplicações na Química (cálculo do pH), na Biologia (crescimento populacional de culturas), na Matemática financeira (montantes no regime de juros compostos), etc. A escolha das aplicações a serem desenvolvidas vai depender das condições específicas de cada escola quanto às possibilidades de articulação com professores das outras áreas.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva algum tópico, dentro das seguintes circunstâncias:

É interessante utilizar a história dos logaritmos para mostrar como as descobertas tecnológicas podem interferir na importância de uma ferramenta matemática. E como, neste caso, a ferramenta manteve sua importância de modo completamente diferente daquele que motivou sua criação. Nos tempos atuais, em que o desenvolvimento tecnológico segue a uma velocidade crescente, vale a pena alertar nosso estudante para tais possibilidades.

Sugestão: Alguns livros didáticos reproduzem textos históricos a esse respeito e uma referência histórica para este e muitos outros temas é o livro de Carl Benjamin Boyer, História da Matemática, Editora Edgard Blucher.

Campo Geométrico

Geometria de posição no Espaço.

Noções primitivas e axiomas.

Paralelismo e perpendicularismo.

Posições relativas de retas, de retas e planos, de planos.

Simetrias e projeções.

Ângulos e distâncias.

Orientações Gerais

Este é um tema tradicionalmente utilizado para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Este aspecto deve ser mantido, embora o emprego de demonstrações não deva se restringir à Geometria. É preciso apresentar os conceitos primitivos (ponto, reta, plano e espaço) alguns axiomas e fazer algumas provas a partir deles. O importante é que sejam provas de resultados significativos. Por exemplo, no estudo de perpendicularismo, mostrar que uma reta que seja perpendicular ou ortogonal a 2 retas concorrentes de um plano será perpendicular ao plano, isto é, será perpendicular ou ortogonal a qualquer outra reta desse plano. As projeções ortogonais são importantes nas definições de distâncias.

Comentário: Algumas escolhas podem ser feitas em relação às definições, neste tema. Por exemplo, há livros que consideram como paralelas também as retas coincidentes (têm a mesma direção), outros que chamam de retas perpendiculares aquelas que são concorrentes e fazem um ângulo reto, reservando o termo ortogonais para as reversas, paralelas a retas perpendiculares. Em geral, é uma questão de gosto ou de acompanhar o texto adotado. Em qualquer situação, é preciso, entretanto, ser coerente com a definição escolhida, levar tais discordâncias em conta, na proposição de problemas retirados de outras obras ou concursos e, principalmente, prevenir o aluno da possibilidade de outras definições, com pequenas diferenças.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• Um exercício interessante é definir já alguns sólidos e trabalhar os conceitos de perpendicularismo e paralelismo com faces e arestas de alguns deles. O corte de alguns destes sólidos por planos também dá lugar a exercícios interessantes, que desenvolvem a capacidade de visualização no espaço e permitem, por exemplo, a introdução das cônicas.

• Alguns problemas de Ótica, que os estudantes devem trabalhar em Física, podem servir como aplicação de simetrias e projeções.

Campo Geométrico

Poliedros e Corpos redondos.

Poliedros: definições, exemplos e classificação.

Relação de Euler.

Áreas e perímetros de figuras planas: revisão.

Áreas e volumes de paralelepípedos.

Princípio de Cavalieri.

Áreas e volumes de prismas e de pirâmides.

Corpos redondos: cilindros, cones e esferas.

Áreas e volumes dos corpos redondos.

Orientações Gerais

Este é um assunto em que nem sempre os livros didáticos apresentam coerência entre definições e exemplos. Portanto, é interessante fazer comparações entre obras diferentes.

A relação de Euler merece também um cuidado especial. Ela é sempre válida para poliedros convexos, mas vale também em outros sólidos não convexos. Além disso, dada uma terna de números que satisfazem à condição de Euler, pode não existir um poliedro com aquele número de faces, vértices e arestas.

Comentário: De fato, encontra-se na RPM 47 o seguinte resultado:

Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se, e somente se:

$$A \geq 6$$

$$V - A + F = 2$$

$$A + 6 \leq 3F \leq 2A$$

$$A + 6 \leq 3V \leq 2^{a}$$

Este é um resultado de interesse para o professor, na proposição de exercícios e problemas, mas acima da maturidade da maioria de nossos estudantes desse nível escolar.

É muito provável que, antes de entrar na definição e no cálculo das áreas e volumes dos poliedros, seja preciso fazer uma revisão sobre áreas e perímetros de figuras planas. A revisão destes temas permite reforçar a distinção entre área e perímetro (uma dificuldade comum dos alunos), além de abrir espaço para uma explicação sobre a validação da fórmula da área do retângulo com medidas irracionais.

Cabe observar que em vários livros do Curso Fundamental, o número π aparece simplesmente como 3,14. Esta é a oportunidade para que se anuncie que esse número é irracional e que, portanto, não tem um desenvolvimento decimal finito. Na prática, ele exige alguma aproximação, daí a "popularidade" do 3,14.

Uma ferramenta necessária para o cálculo de volumes é o princípio de Cavalieri, que já vem sendo utilizado em grande parte dos livros didáticos, com justificativas, às vezes, bastante razoáveis.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir:

• A Geometria tem sido um instrumento precioso em cálculos astronômicos ao longo da História. Vale a pena levar os estudantes a conhecerem alguns deles.

• Se for possível uma articulação com a área de Educação artística, os alunos poderão construir modelos de sólidos, trabalhar com planificações, investigar interseções, todas estas, atividades que servem para ilustrar propriedades dos sólidos ou desenvolver a visão espacial.

• Se houver oportunidade de usar softwares de Geometria, o estudante terá a oportunidade de visualizar melhor algumas figuras em 3 dimensões, além de poder contar com a possibilidade de fazer eletronicamente o que se faz com os instrumentos de desenho. Os softwares de Geometria dinâmica, permitem ainda ao estudante usar o movimento.

Campo Numérico-aritmético

Análise combinatória.

Contagem: Princípio fundamental (multiplicativo), princípio aditivo.

Fatorial.

Arranjos, permutações e combinações.

Orientações Gerais

A análise combinatória pode ser descrita como a arte de contar. Problemas de contagem podem parecer simples, mas exigem bastante organização. O uso de esquemas gráficos de organização, do tipo árvore, por exemplo, (ver RPM 33, p. 26) ou de tabelas deve ser estimulado.

A ênfase deve ficar sobre os princípios aditivo e multiplicativo da contagem, mais do que no uso de fórmulas prontas.

Aprimoramentos Sugeridos

A prática da contagem, tem uma vasta utilização no cálculo de probabilidades em espaços finitos. Esse é um assunto que será retomado, portanto, naquele capítulo.

Campo Algébrico-simbólico

Binômio de Newton.

Orientações Gerais

Este é um produto notável que terá aplicação no cálculo de probabilidades e em Genética. Um entrosamento com a área de Biologia pode ser feito a partir do conhecimento deste tema.

Aprimoramentos Sugeridos

A importância deste assunto, no momento, fica restrita a algumas aplicações dentro da própria Matemática ou a outras áreas. Um exemplo, de apelo histórico, é o Triângulo de Pascal.

Aqui, também, o professor deve evitar exercícios que demandem tão somente manipulações, puramente, mecânicas, e dar preferência a exercícios de aplicações que façam sentido.

Campo da Informação

Probabilidades.

Probabilidades: Definições e objetivos.

Probabilidade em espaço amostral finito.

Probabilidade condicional e independência de eventos.

Orientações Gerais

Um cuidado especial dever ser dado à distinção entre a definição abstrata de probabilidade em espaços finitos e sua aproximação a partir de um certo número de experiências. Por maior que seja o número de experiências feitas, o que se sabe é que a freqüência relativa deve tender ao valor da probabilidade e não se tem nenhuma garantia de que ela seja o valor da probabilidade.

Aprimoramentos Sugeridos

Este é um assunto próprio à articulação com outras áreas, notadamente, com a Biologia.

Campo Algébrico-simbólico/Campo Geométrico

Trigonometria e funções trigonométricas.

Circunferência trigonométrica. Visualização das propriedades de periodicidade das funções trigonométricas, interpretação geométrica dos valores das funções trigonométricas associados a um ângulo.

Medidas de arcos e ângulos.

Funções seno e cosseno: definição, propriedades e gráficos.

Função tangente: definição, propriedades e gráficos.

Orientações Gerais

Trabalhar especialmente com as funções seno, cosseno e tangente (as outras três, podem ser definidas por questões históricas, mas são desnecessárias para os cálculos.) Ressaltar a característica da periodicidade dessas funções, que por isso, são associadas ao estudo de fenômenos de natureza periódica, como por exemplo, batimentos cardíacos, som, corrente elétrica, vibrações, etc.

Um ponto delicado nos textos didáticos é a definição de comprimento de arco. Novamente aqui reaparece o conceito de proporcionalidade entre o comprimento do arco de uma circunferência subtendido por um determinado ângulo e o raio dessa circunferência.

Identificar e salientar a equação $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ como uma identidade trigonométrica. Evitar, entretanto, o exagero de manipulação de identidades e fórmulas, usualmente encontradas em nossos livros didáticos, nestes capítulos.

Aprimoramentos Sugeridos

O estudo de movimentos harmônicos, em articulação com a Física, é uma oportunidade para confirmar a importância de tais funções.

Estrutura Curricular para a 3ª Série do Ensino Médio

Tópicos Centrais

CAMPO NUMÉRICO-ARITMÉTICO	CAMPO ALGÉBRICO-SIMBÓLICO	CAMPO GEOMÉTRICO	CAMPO DA INFORMAÇÃO
• matemática financeira.	• matrizes, sistemas lineares e determinantes • números complexos; • polinômios e equações algébricas.	• geometria analítica.	• estatística; • tmedidas de centralidade e de dispersão.

Abordagem e Ordenação Recomendadas

A seguir apresentamos uma proposta de ordem para o desenvolvimento destes conteúdos, que pode ser modificada para atender diferentes realidades. No entanto, seguindo o princípio geral da área, é importante que nenhum dos temas sugeridos fique a descoberto nesta série, e que alguns dos aprofundamentos sugeridos sejam incluídos pelos professores em seu programa de estudos. Para cada conjunto de conteúdos, oferecemos também algumas orientações gerais, além de comentários, exemplos e/ou sugestões metodológicas.

Campo Algébrico-simbólico

Matrizes, sistemas lineares e determinantes.

Sistemas lineares com duas incógnitas.

Matrizes: definições, operações.

Sistemas lineares: escalonamento.

Sistemas lineares: discussão.

Determinantes e regra de Cramer.

Orientações Gerais

Os sistemas de equações lineares têm um papel importante não só dentro da Matemática, mas também como modelo algébrico de muitas situações das ciências e da tecnologia. A exploração de alguns destes exemplos, na introdução do assunto, pode atrair o interesse do estudante para o tema. O estudo dos sistemas pode começar pelos sistemas de 2 equações a 2 incógnitas, com interpretação geométrica no plano, passando para o espaço, sempre acompanhado da interpretação geométrica. Na discussão de sistemas lineares, é preciso dar significado à classificação, tanto no sentido geométrico quanto, se possível, num outro contexto.

A resolução pelo método de escalonamento da matriz do sistema deve ter a primazia, em detrimento do emprego dos determinantes e da Regra de Cramer. É o processo de escalonamento que se utiliza na resolução de sistemas nos computadores, enquanto a Regra de Cramer fica mais restrita a aplicações teóricas, em Geometria Analítica, por exemplo.

O emprego da notação matricial surge em outros campos. Deve ser feita referência a eles e o desenvolvimento da álgebra das matrizes deve se restringir ao mínimo necessário para essas aplicações. À esta altura, impõe-se a comparação entre as operações algébricas que forem definidas com matrizes e aquelas com números reais, já conhecidas do estudante.

O determinante de uma matriz quadrada é definido aqui e será retomado em algumas aplicações em Geometria Analítica.

Campo Geométrico

Geometria analítica.

Plano cartesiano.

Distância entre dois pontos.

Equações da reta.

Ângulos, perpendicularismo e paralelismo de retas.

Distância entre ponto e reta.

Equação da circunferência.

Equações da elipse, hipérbole e parábola.

Orientações Gerais

O tratamento da Geometria Analítica por meio de vetores, que seria desejável nesse momento, ainda não se encontra em nossos livros didáticos, apesar do fato de que nossos alunos já usam vetores em Física. Também o estudo de Geometria Analítica, em quase todos os textos didáticos, encontra-se isolado na última série. Apesar disso, o aluno já trabalha, desde o curso Fundamental, com coordenadas, e no nível médio, já deve ter usado coordenadas, traçado gráficos, já conhece (ou, pelo menos, deveria conhecer) a parábola e algumas de suas propriedades, já usou gráficos estatísticos, de funções, já resolveu equações e inequações por meio desses gráficos. Enfim, já teve uma certa convivência com objetos e ferramentas de Geometria Analítica. Esta é a ocasião de consolidar e sistematizar tais conhecimentos, provar algumas propriedades, utilizar processos algébricos para estudar propriedades geométricas e reconhecer curvas, como as circunferências e as cônicas, por exemplo.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• Leituras sobre cálculos astronômicos, desenvolvidos ao longo da História, costumam empolgar estudantes deste nível. Se possível, a articulação com professor de Geografia ou de História pode ser pertinente.

• Alguns softwares podem ser usados para traçado de gráficos, ou na busca de propriedades.

Campo Numérico-aritmético

Matemática financeira.

Revisão de porcentagem.

Juros simples.

Juros compostos.

Orientações Gerais

O conceito de proporcionalidade volta à cena, pois é fundamental para o entendimento de porcentagem. Os temas de Matemática financeira estão sempre presentes na vida em sociedade nos dias atuais.

Comentário: Um cuidado especial deve ser tomado no cálculo de prestações iguais, de acordo com o tipo de juro considerado, pois são freqüentes os enganos em livros didáticos a esse respeito, provavelmente, influenciados por práticas comerciais, nem sempre suficientemente claras.

O uso de calculadoras, mesmo as mais simples, são de grande utilidade neste tópico. Aqui, o professor tem a oportunidade de explorar os benefícios desse instrumento, bem como, mostrar suas limitações e evidenciar a necessidade das avaliações e do cálculo mental para detectar eventuais erros de digitação.

É a oportunidade também de considerar a progressão aritmética formada por montantes relativos ao regime de juros simples e a progressão geométrica quando o regime seja o de juros compostos.

Aprimoramentos sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• A comparação entre o que é anunciado e o que, de fato, é cobrado em situações do cotidiano, como compras a prazo, rendimento de investimentos, tributos, etc. é um exercício valoroso na formação do cidadão consciente. Por exemplo, instituições financeiras, como bancos, cartões de crédito, etc. anunciam uma taxa de juros, mas, na hora da cobrança, juntam outras taxas ou impostos, o que aumenta consideravelmente a taxa anunciada.

• A extensão dos tópicos à atualização monetária, com estudo de descontos, previdência, é desejável e proveitosa para o melhor entendimento dos conceitos ora introduzidos.

• Se for possível o uso de calculadoras mais sofisticadas ou de softwares específicos, a começar por planilhas eletrônicas, vale a pena utilizá-los na análise de situações reais. Algumas dessas situações exigem a resolução de equações algébricas de grau alto, conforme o número de parcelas. Os processos de resolução aproximada fazem parte de alguns desses softwares, mas as planilhas eletrônicas podem também fornecer uma aproximação da solução. O professor que dispuser de tais recursos pode escolher se trabalha aqui com equações de grau mais alto ou se retorna a problemas de Matemática financeira, lá no tópico específico das equações algébricas.

Campo de Informação

Estatística: medidas de centralidade e de dispersão.

Médias, moda e mediana.

Desvios absolutos, desvio absoluto médio.

Desvios quadráticos, variância e desvio padrão.

Orientações Gerais

Esta é uma oportunidade de retomar alguns temas de Estatística e relembrar seu objetivo de fazer previsões. Um passo nessa direção é, certamente, o conhecimento destas medidas.

Além da definição e do cálculo das medidas de tendência central e de dispersão, é essencial que se explore o significado e a comparação entre elas.

Comentário: Uma distinção que só pode ser anunciada, pois não está ao alcance da quase totalidade dos estudantes deste nível, é aquela entre o desvio absoluto médio e a variância, pois se trata da diferenciabilidade da segunda. Com efeito, a função modular (usada no cálculo dos desvios absolutos e, portanto, no cálculo do desvio absoluto médio) não é derivável na origem, enquanto a função quadrática (usada no cálculo dos desvios quadráticos e, portanto, no cálculo da variância) é derivável em toda a reta.

Campo Algébrico-simbólico

Números complexos, polinômios e equações algébricas.

Números complexos: definição, forma algébrica, operações.

Representação geométrica.

Forma trigonométrica.

Polinômios de uma variável: operações, divisão de um polinômio por $x - a$.

Regra de Briot- Ruffini.

Equações algébricas: Teorema fundamental da Álgebra; raízes múltiplas, número de raízes.

Raízes racionais e raízes complexas.

Orientações Gerais

Neste tópico, vale a pena apresentar o fato histórico ligado à resolução da equação do 3º grau, em que o processo para determinação de uma raiz real passa pelo cálculo com números imaginários. Em vários livros didáticos, há uma certa confusão na denominação de *número imaginário*. Em geral, chama-se de imaginário um número complexo diferente do zero, cuja parte real seja nula. Alguns livros, entretanto, usam a expressão número imaginário como sinônimo de número complexo. A introdução destes números neste nível de ensino encontra uma justificativa na necessidade de enunciar o teorema fundamental da Álgebra. Isso, entretanto, não justifica um tratamento minucioso da álgebra dos números complexos, no momento em que não se tem aplicação significativa para ela.

Na determinação das raízes de uma equação polinomial de grau maior do que 2, excluídas algumas que podem ser resolvidas através de fatoração ou de outro artifício, destaca-se a importância de estimar uma ou mais raízes, com a finalidade de determinar todas as outras.

O trabalho com gráficos de funções polinomiais facilita a compreensão de tópicos como multiplicidade de uma raiz, complementando de maneira satisfatória o estudo de algumas funções polinomiais feito na 1ª série.

Algum processo de resolução aproximada pode ser dado, pelo menos como exemplo.

Aprimoramentos Sugeridos

Professor, para dar mais sentido aos conceitos introduzidos, desenvolva pelo menos um dos tópicos a seguir

• Neste momento, caso possível, cabe a utilização de algum software para resolução de equações em geral, como um valioso instrumento no processo de aprendizagem.

• Problemas corriqueiros de Matemática financeira, como o cálculo da taxa de juros compostos, a partir do conhecimento do prazo, capital e montante, podem levar a equações algébricas de grau bastante alto. Na ausência de softwares ou processos de aproximação para a resolução destas equações, pelo menos exemplos de construção da própria equação em alguns destes casos, podem ser apresentados aos estudantes nessa articulação de assuntos dentro da própria Matemática e com temas pertinentes à vida atual em sociedade.

REFERÊNCIAS DE APOIO

Livros

O títulos relacionados na lista a seguir são sugestões de leitura apoio para o professor. Cabe destacar que estes não são livros para uso em sala de aula, mas referências para a formulação de metodologias de ensino, de atividades e assim por diante.

Coleção Tópicos de História da Matemática (Editora Atual)

[01] Baumgart, John K. *Álgebra.*

[02] Boyer, Carl. *Cálculo.*

[03] Davis, Harold. *Computação.*

[04] Eves, Howard. *Geometria.*

[05] Kennedy, Edward S. *Números e Numerais.*

Publicações do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (do Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo)

Contato:
CAEM/IME/USP
Rua do Matão, 1010, sala 167B
CEP 05508-900, São Paulo, SP
Tel/Fax: (11) 3091-6160
Correio eletrônico: caem@ime.usp.br
Sítio: www.ime.usp.br/caem

[06] Barufi, Maria Cristina B.; Lauro, Maira Mendias. *Funções Elementares, Equações e Inequações: uma Abordagem Utilizando Microcomputador.*

[07] Borin, Julia. *Jogos e Resolução de Problemas: uma Estratégia para as Aulas de Matemática.*

[08] Cardoso, Virginia Cardia. *Materiais Didáticos para as Quatro Operações.*

[09] Diniz, Maria Ignez; Smole, Katia Cristina S. *O Conceito de Ângulo no Ensino de Geometria.*

[10] Gomide, Elza Furtado; Rocha, Janice Cássia. *Atividades de Laboratório de Matemática.*

[11] Ochi, Fusako H.; Paulo, Rosa M. ; Yoshioka, Joana H.; Ikegami, João K. *O Uso de Quadriculados no Ensino de Geometria.*

[12] Smole, Katia Cristina S.; Rocha, Glauce H. R. ; Cândido, Patricia T.; Stancanelli, Renata. *Era uma Vez na Matemática: uma Conexão com a Literatura Infantil.*

[13] Souza, Eliane Reame de; Diniz, Maria Ignez. S. V. *Álgebra: das Varáveis às Equações e Funções.*

[14] Souza, Eliane Reame de; Diniz, Maria Ignez S. V.; Paulo, Rosa M.; Ochi Fusako H. *A Matemática das Sete Peças do Tangram.*

Publicações do Projeto Fundão (Instituto de Matemática, U.F.R.J.)

Contato:
Projeto Fundão
Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68530
CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ
Tel: (21) 2562-7511
Fax: (21) 2260-1884
Correio eletrônico: pfundao@im.ufrj.br

[15] Leite Lopes, Maria Laura (coordenadora). *Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade.*

[16] Leite Lopes, Maria Laura (coordenadora). *Tratamento da Informação – Explorando Dados Estatísticos e Noções de Probabilidade nas Séries Iniciais.*

[17] Leite Lopes, Maria Laura (coordenadora). *Tratamento da Informação – Atividades para o Ensino Básico.*

[18] Leite Lopes, Maria Laura e Nasser, Lilian (coordenadora). *Geometria na Era da Imagem e do Movimento.*

[19] Nasser, Lilian (coordenadora). *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiel*e.

[20] Nasser, Lilian; Tinoco, Lucia (coordenadoras). *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.*

[21] Nasser, Lilian; Tinoco, Lucia (coordenadoras). *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático*, Módulo I.

[22] Nasser, Lilian; Tinoco, Lucia (coordenadoras). *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático*, Módulo II.

[23] Nasser, Lilian; Tinoco, Lucia (coordenadoras). *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático*, Módulo III.

[24] Santos, Vania M.P. (coordenadora). *Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos.*

[25] Santos, Vania M.P.; Rezende, Jovana (coordenadoras). *Números: Linguagem Universal.*

[26] Tinoco, Lucia (coordenadora). *Razões e Proporções.*

[27] Tinoco, Lucia (coordenadora). *Construindo o Conceito de Função.*

[28] Tinoco, Lucia com colaboração de Elizabeth Belfort e Victor Giraldo. *Geometria Euclidiana por Meio da Resolução de Problemas.*

Publicações da Sociedade Brasileira de Matemática

Contato:
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina 110
CEP 22460-320, Rio de Janeiro, RJ
Fax: (21) 2259-4143
Correio eletrônico: vendalivros@sbm.org.br
Site: www.sbm.org.br

[29] Aaboe, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática.*

[30] Barbosa, João Lucas M. *Geometria Euclidiana Plana.*

[31] Carmo, Manfredo Perdigão; Morgado, Augusto César; Wagner, Eduardo; com notas históricas de João Bosco Pitombeira. *Trigonometria e Números Complexos*.

[32] Carvalho, Paulo Cezar Pinto de. *Introdução À Geometria Espacial*.

[33] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*.

[34] Lima, Elon Lages. *Isometrias*.

[35] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*.

[36] Lima, Elon Lages. *Matemática e Ensino*.

[37] Lima, Elon Lages. *Temas e Problemas*.

[38] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto de; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1.

[39] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto de; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2.

[40] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto de; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 3.

[41] Morgado, Augusto César; Pitombeira, João Bosco; Carvalho, Paulo Cezar Pinto de; Fernadez, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade*.

[42] Morgado, Augusto César, Wagner, Eduardo, Zani, Sheila C. *Progressões e Matemática Financeira*.

[43] Wagner, Eduardo com colaboração de José Paulo Q. Carneiro. *Construções Geométricas*.

Publicações da Universidade Federal Fluminense

Contato:
Rua Miguel de Frias 9, anexo, sobreloja
CEP 24220-000, Icaraí, Niterói, RJ
Tels: (21) 2621-6426 / (21) 2704-2117

[44] Kaleff, Ana Maria M. R. *Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas*.

[45] Kaleff, Ana Maria M. R.; Rei, Dulce Monteiro; Garcia, Simone dos Santos. *Vendo e Entendendo Poliedros*

Programas de Computador

• Barbastefano, R., Guimarães, L. C. et al. *Tabulæ* © by the authors, Rio de Janeiro: UFRJ.

• Hertser, K.; Malaca, C. *Graphmatica para Windows*, versão 2003 p. Informações no site: www.angelfire.com/ca/cammac ou por correio eletrônico: graphmat@dumercatus.com.

• Jackiw, Nicholas. *The Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press.

• Laborde, Jean-Marie; Bellemain, Franck. *Cabri Gèomètre II*. Texas Instruments. Informações no site: www.ti.com/ca/calc ou por correio eletrônico: ti-cares@ti.com.

Publicações Periódicas

• Boletim do GEPEM (gepem@altavista.net)

• Educação Matemática em Revista (www.sbem.com.br)

• Revista do Professor de Matemática (rpm@ime.usp.br)

Endereços de Interesse na Internet

• www.mec.gov.br

• www.see.rj.gov.br

• www.nterio3.rj.gov.br/

• www.terra.com.br/matematica/ (Universidade Cidade de São Paulo)

• www.somatematica.com.br (Só Matemática - Portal Matemática)

• www.olm.org.br (Olimpíadas de Matemática, atualizado em 18/10/2004)

• www.supermatematica.com.br (Super Matemática)

• www.reniza.com/matematica (Matemática Divertida)

• matematicahoje.com.br