ESTUDO PRELIMINAR DE UM MÓDULO EDUCACIONAL SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO ATRAVÉS DA MODELAGEM COMPUTACIONAL QUANTITATIVA

Michel Rabbi [michelrabbi@bol.com.br]
Laércio Ferracioli [laercio@npd.ufes.br]

Laboratório de Tecnologias Interativas Aplicadas a Modelagem Cognitivas
Departamento de Física
Universidade Federal do Espírito Santo
[http://www.modelab.ufes.br]

1.0 INTRODUÇÃO

As ferramentas de modelagem vão desde papel e lápis até a utilização de tecnologias interativas, como o computador. Se a versão em papel e lápis de um modelo revela sua natureza estática, onde é privilegiada uma visão instantânea da realidade física, a sua versão computacional revela sua versão dinâmica, na medida que o modelo pode ser 'rodado' e os resultados desse processamento, auxiliarem na reestruturação e melhoria do modelo inicial, possibilitando, dessa forma, vislumbrar a evolução temporal dessa mesma realidade física (Ferracioli, 1997a; Camiletti & Ferracioli, 2001).

No entanto, a utilização da modelagem computacional no contexto educacional demanda o delineamento de uma investigação que inclua tanto o desenvolvimento de atividades de modelagem quanto a sua utilização em sala de aula a partir de conteúdos específicos para que se possa concluir sobre as reais possibilidades de sua integração no contexto educacional. (Ferracioli, 1997b).

Neste contexto, o presente trabalho relata o desenvolvimento e implementação de um módulo educacional baseado na modelagem computacional através da utilização do Ambiente de Modelagem Computacional STELLA sobre o conteúdo específico relacionado aos Métodos Numéricos de Integração. A notável utilidade dos métodos numéricos de integração deve-se ao fato de existir um número muito restrito de equações diferenciais cuja solução pode ser expressa sob uma forma analítica simples. No entanto, o estudo destes métodos envolve um alto grau de abstração matemática, impossibilitando, muitas vezes, seu real entendimento por parte do aluno.

Dessa forma, ao final são relatados os resultados de um estudo preliminar realizado com estudantes de graduação em Física e são apresentadas sugestões para a continuidade e implementação do estudo dos Métodos Numéricos de Integração através da modelagem computacional.

2.0 O MÓDULO EDUCACIONAL

O módulo educacional faz uma abordagem dos aspectos teóricos dos Métodos Numéricos de Integração seguida de uma apresentação do ambiente de modelagem computacional STELLA que será utilizado na realização de uma atividade experimental.

2.1 Métodos Numéricos de Integração

Considere uma equação diferencial de primeira ordem como a representada pela equação

$$dy/dx = f(x, y) \qquad (1)$$

e condição inicial

$$y(x_0) = y_0$$

cuja solução é dada pela função $y(x)$, contínua e definida no intervalo [x_0, x_f].

O que se deseja, através dos métodos numéricos, é determinar aproximações y_m, dos valores de $y(x)$ para os pontos x_m, sendo m = 0, 1, ..., n. Os pontos x_m são igualmente espaçados no intervalo $\lfloor x_0, x_f \rfloor$, ou seja:

$$x_m = x_0 + hm \qquad (2)$$

onde, m = 0, 1, ..., n e h é a distância entre cada x_m e dado por

$$h = (x_f - x_0)/n, \qquad (3)$$

sendo n o número máximo que m pode assumir. Os valores de h, x_f e x_0 geralmente são dados do problema.

O Método de Euler, Runge Kutta 2 e Runge Kutta 4, baseiam-se na expansão em Série de Taylor da função y em torno do ponto x:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + y''(x)h^2/2! + y'''(x)h^3/3!... \qquad (4)$$

Note que

$$y' = dy/dx \text{ e } y'' = d^2y/dx^2$$

E, observando a equação (1), perceber que:

$$y' = f(x, y), \; y'' = f'(x, y).$$

Desta forma, a expansão em série de Taylor torna-se:

(5)

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + h^2 f'(x, y(x))/2! + h^3 f''(x, y(x))/3! + \ldots \qquad (5)$$

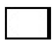
O Método de Euler utiliza os dois primeiros termos desta expansão, ou seja, até termos de primeira ordem e despreza os demais termos, ao passo que Método de Runge Kutta 2 utiliza os três primeiros, ou seja, até termos de segunda ordem. O Método de Runge Kutta 4 considera a expansão em Série de Taylor até termos onde se tem h^4, ou seja, até termos de primeira ordem. Devido ao número de termos considerados em cada método é de se esperar que a precisão da aproximação não seja a mesma em cada um deles.

É importante se ter em mente que se a expansão em série não convergir rapidamente, os termos de segunda, terceira e de quarta ordem são significativos no resultado final, e é possível se verificar a diferença entre os métodos. Se a expansão em série converge rapidamente esses termos passam a ser desprezíveis e o Método de Euler passa a ter algum sentido. Não será discutido em detalhes a questão da convergência de séries para não fugir do objetivo desse trabalho.

2.2 O STELLA

O Ambiente de Modelagem Computacional STELLA – *STRUCTURAL THINKING EXPERIMENTAL LEARNING LABORATORY WITH ANIMATION*- (Ferracioli & Camiletti,1998) é um ambiente baseado nos Princípios de Sistemas (Forrester, 1968) e projetado para o estudo e construção de modelos através de uma representação gráfica baseada em ícones. O Quadro 01 apresenta um resumo dos ícones básicos da metáfora do STELLA (Camiletti & Ferracioli, 2001).

Quadro 01: *Ícones básicos de construção de modelos do STELLA.*

Ícone	Descrição
	**Nível**: representa uma variável que pode ser alterada ao longo do tempo por uma variável do tipo taxa.
	**Taxa**: representa uma variável que promoverá a mudança da variável tipo Nível ao longo do tempo. Pode ser Unidirecional ou Bidirecional.
	**Conversor**: representa o mecanismo para estabelecer constantes, definir entradas externas para o modelo e realizar cálculos algébricos.
	**Conector**: representa uma relação de causa-efeito entre variáveis, significando que uma variável é afetada por outra dependendo da orientação da seta.
	**Plataforma de Gráficos**: é usada para traçar o gráfico de uma ou mais variáveis de um modelo em simulação.
	**Plataforma de Tabelas**: é usada para visualizar a saída numérica de uma ou mais variáveis de um modelo em simulação.

Após a construção do modelo é possível visualizar as equações matemáticas geradas pelo STELLA que governam o comportamento dinâmico das variáveis do modelo ao longo do tempo. Também é possível visualizar as saídas gráficas.

2.3 A Atividade Experimental

A possibilidade de se utilizar o ambiente de modelagem STELLA na realização da atividade experimental sobre os métodos numéricos de integração se deve ao fato do ambiente utilizar estes métodos para a simulação dos modelos construídos. Em cada simulação se pode mudar parâmetros do modelo e imediatamente observar mudanças ocorridas tornando o estudo dos métodos mais dinâmico. Para isso, foram analisados dois problemas físicos discutidos em forma de atividades.

2.3.1 Atividade 1

Na Atividade 1 foi fornecido o modelo que melhor representa o M*ovimento Retilíneo Uniforme* no ambiente STELLA sendo impostas as condições iniciais. O modelo está representado na Figura 01.

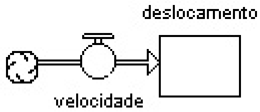


Figura 01: *Modelo Representando o Movimento Retilíneo Uniforme.*

Para o desenvolvimento dessa atividade foram utilizadas duas estratégias:

1. Inicialmente foi feita uma comparação entre os métodos numéricos de integração mantendo-se o passo de integração que no ambiente STELLA é representado pela caixa Dt e na discussão teórica por h. A comparação foi feita através da simulação do modelo com a obtenção das saídas gráficas das variáveis, conforme mostrado na Figura 02, escolhendo-se ora o Método de Euler, ora o Método de Runge Kutta 2 e ora o Método de Runge Kutta 4.
2. Na seqüência simulava-se o modelo mantendo-se o mesmo Método de Integração enquanto o passo de integração era alterado. Através das saídas gráficas era observado o que acontecia com a precisão da simulação.

A figura 02 mostra uma das saídas gráficas representando a variação das grandezas Posição e Velocidade para o Movimento Retilíneo Uniforme. Nesse caso, não faz sentido mostrar as outras saídas gráficas já que elas diferem somente na duração de simulação.

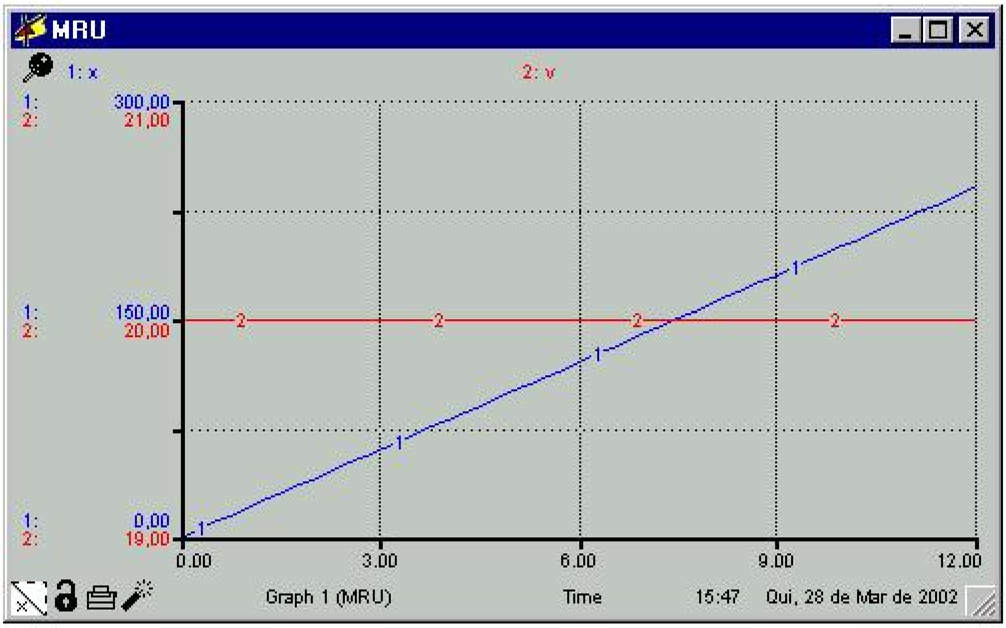


Figura 02: Saída Gráfica representando a variação das grandezas Posição e Velocidade para o Modelo do Movimeno Retilíneo Uniforme

2.3.2 Atividade 2

Na Atividade 2, foi fornecido o modelo que melhor representa o *Movimento Harmônico Simples*, no ambiente STELLA sendo também impostas as condições iniciais. O modelo está representado na Figura 03.

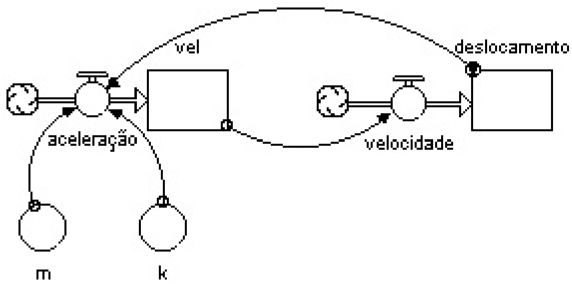


Figura 03 : *Modelo Representando o Movimento Harmônico Simples.*

Para o desenvolvimento dessa atividade, assim como na Atividade 01, foram utilizadas duas estratégias:

1. Inicialmente foi feita uma comparação entre os métodos numéricos de integração mantendo-se o passo de integração que no ambiente STELLA é representado pela caixa Dt e na discussão teórica por h. A comparação foi feita através da simulação do modelo com a obtenção das saídas gráficas das variáveis, conforme mostrado na Figura 04, escolhendo-se os Métodos de Euler, de Runge Kutta 2 e Runge Kutta 4 sequencialmente.

2. Na seqüência simulava-se o modelo mantendo-se o mesmo Método de Integração enquanto o passo de integração era alterado. Através das saídas gráficas era observado o que acontecia com a precisão da simulação.

A primeira estratégia foi desenvolvida utilizando-se passo de integração Dt = 0.2 e as Figuras 04, 05 e 06 apresentam as saídas gráficas para os diferentes métodos de integração:

A figura 04 mostra o resultado da simulação do modelo do Movimento Harmônico Simples com Método de Euler, a Figura 05 o resultado com Método de Runge Kutta 2 e a Figura 06 com Método de Runge Kutta 4.

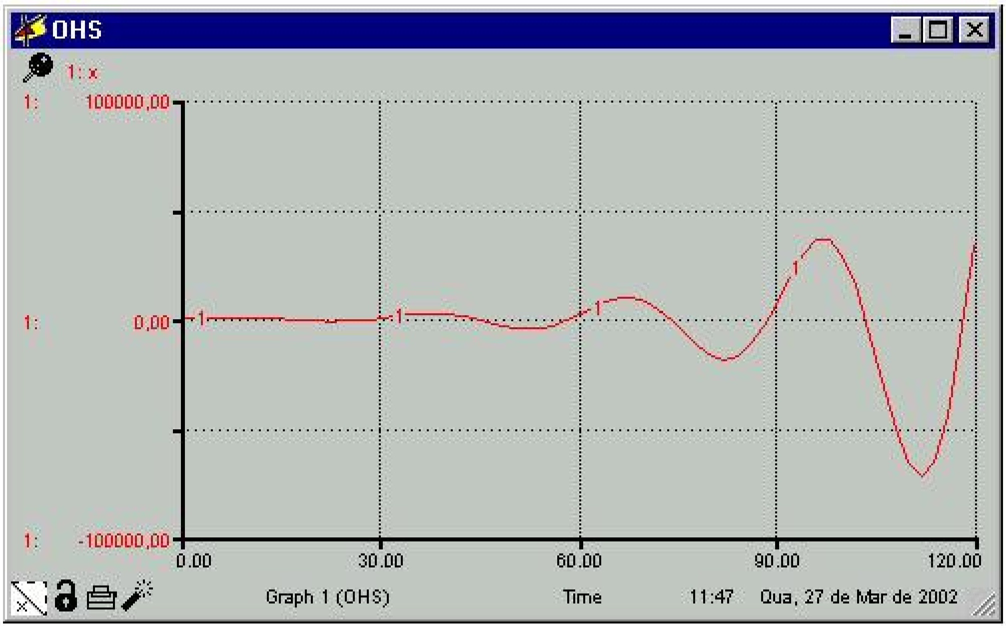


Figura 04: *Saída Gráfica representando a variação da grandeza Posição para o modelo do Oscilador Harmônico Simples com Dt = 02 e utilizando o Método de Euler.*

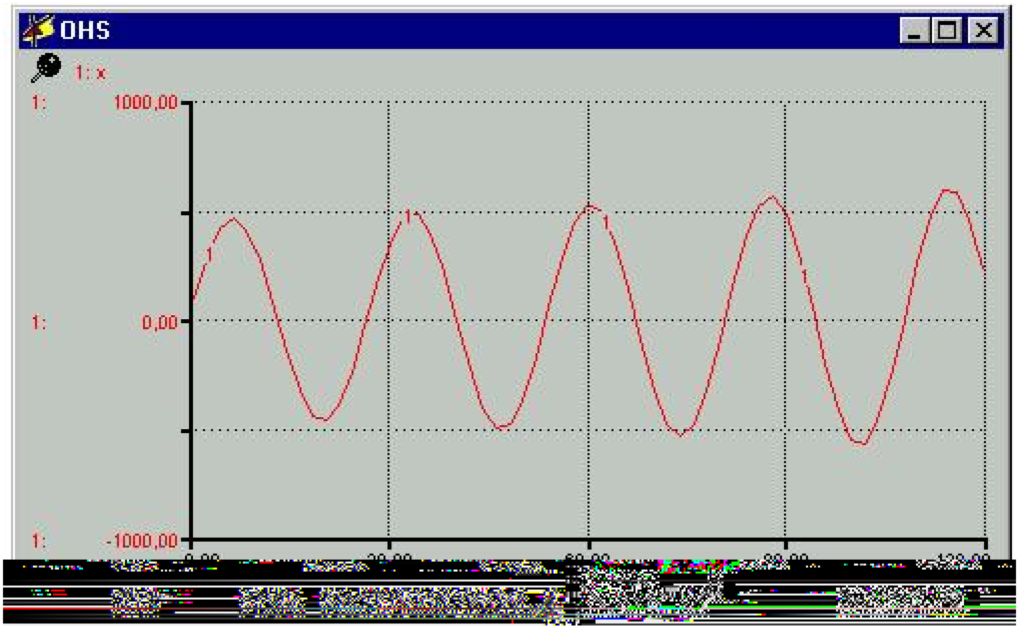


Figura 05: *Saída Gráfica representando a variação da grandeza Posição para o modelo do Oscilador Harmônico Simples com Dt = 02 e utilizando o Método de Runge Kutta 2.*

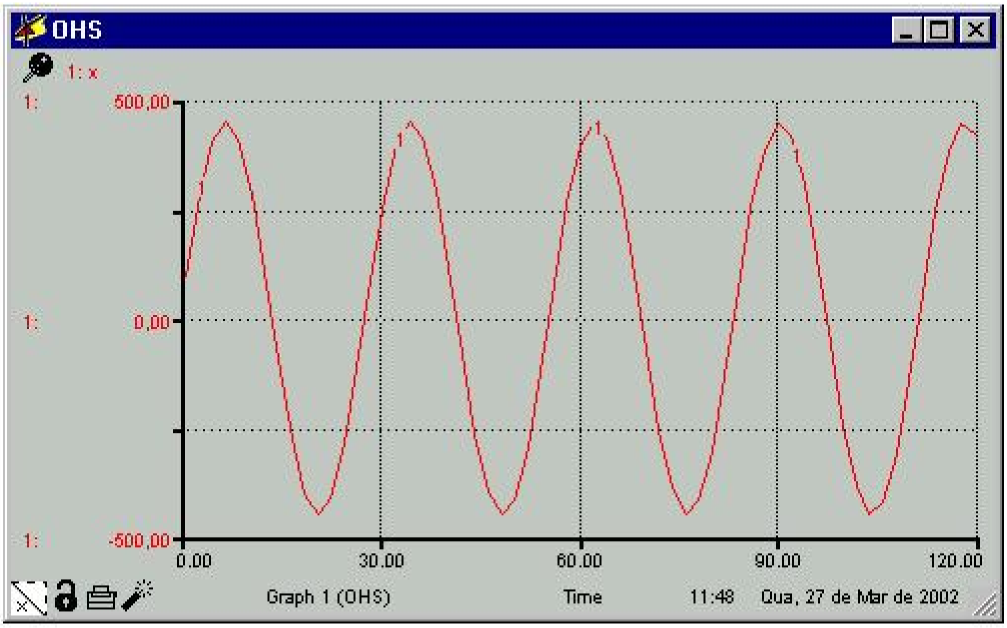


Figura 06: *Saída Gráfica representando a variação da grandeza Posição para o modelo do Oscilador Harmônico Simples com Dt = 02 e utilizando o Método de Runge Kutta 4.*

A Segunda estratégia foi desenvolvida fixando-se um método de integração, como por exemplo, o Método de Runge Kutta 2 e as Figuras 07 e 08 apresentam as saídas gráficas para dois passos de integração diferentes:

A figura 07 mostra o resultado da simulação do modelo do Movimento Harmônico Simples para Dt = 3, a figura 08 mostra a simulação para Dt = 1.

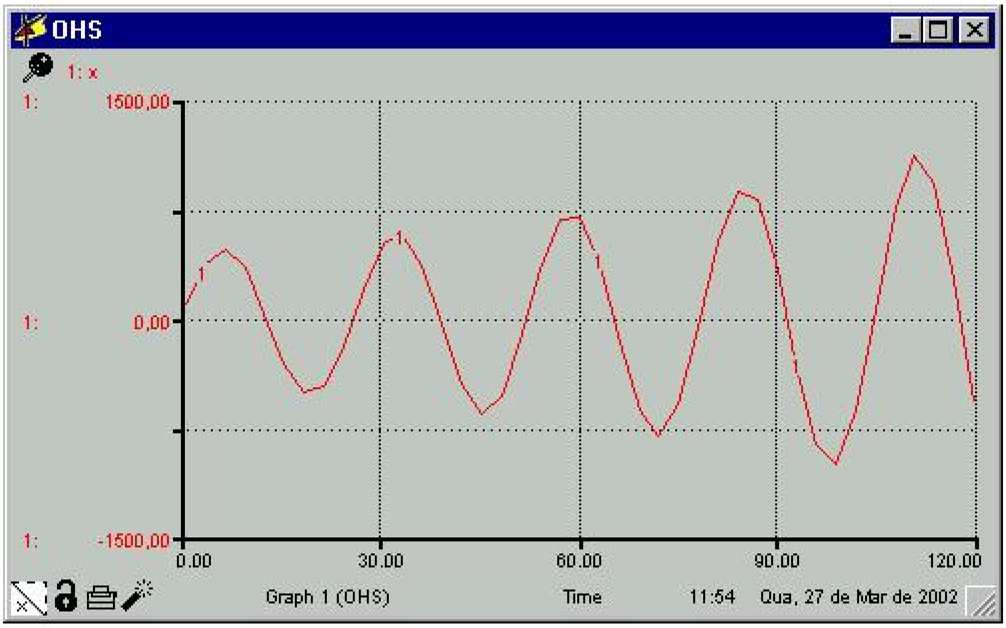


Figura 07: *Saída Gráfica representando a variação da grandeza Posição para Oscilador Harmônico Simples com Método de Runge Kutta 2 e utilizando Dt = 3.*

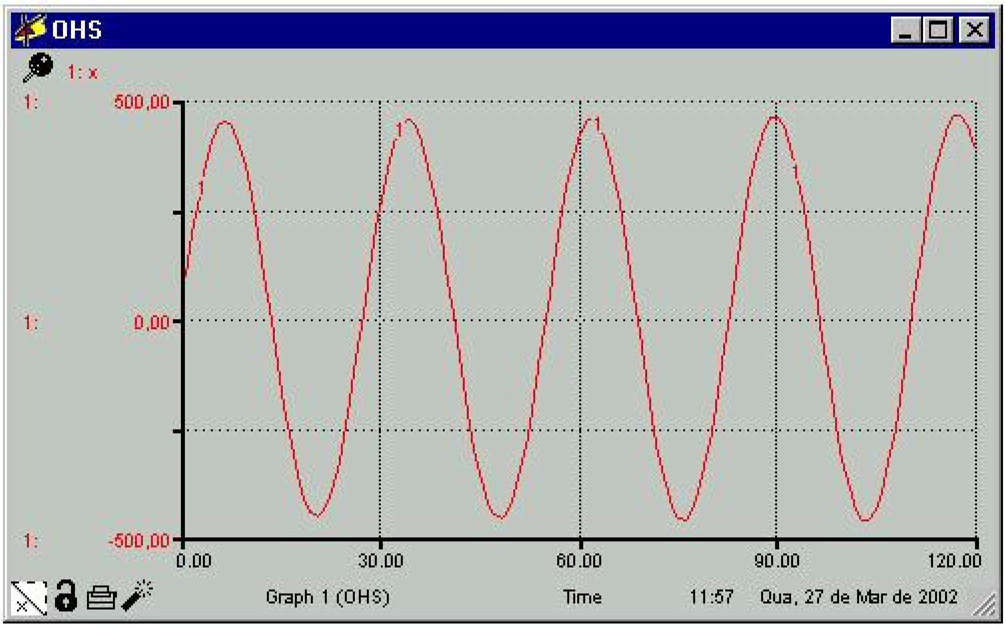


Figura 08: *Saída Gráfica representando a variação da grandeza Posição para Oscilador Harmônico Simples com Método de Runge Kutta e utilizando Dt = 3.*

Para acompanhar as atividades desenvolvidas pelos estudantes foram incluídas perguntas abertas ao longo do Módulo Educacional, tanto sobre os Métodos de Integração quanto sobre as atividades experimentais com o STELLA.

3.0 O ESTUDO PRELIMINAR

Passamos agora a descrever o estudo preliminar que teve o objetivo de testar o módulo educacional buscando subsídios para sua re-estruturação para a continuidade da pesquisa sobre a utilização da modelagem computacional no estudo de Métodos Numéricos de Integração.

Assim sendo, o estudo preliminar foi realizado através de um curso de duas horas de duração com 7 estudantes da Graduação e Pós-Graduação em Física que já tinham noção tanto dos métodos de integração quanto do ambiente computacional STELLA. O curso foi estruturado de forma que os trinta primeiros minutos foram dedicados ao estudo teórico dos métodos numéricos de integração, os próximos trinta minutos destinados a uma apresentação do ambiente STELLA e nos sessenta minutos restantes foi realizada a atividade experimental através da modelagem computacional utilizando o ambiente STELLA.

Para avaliação do módulo, como já foi mencionado, foram utilizadas perguntas em aberto incluídas no próprio módulo educacional e um questionário, em separado, aplicado ao final do curso. O questionário além de questões que também avaliavam o módulo continha perguntas para a avaliação da estruturação do curso e uma questão em aberto. Dos 7 participantes, 5 responderam tanto as questões discursivas do módulo como o questionário.

Apesar de 2 participantes não terem respondido as questões solicitadas durante a realização do estudo, os resultados obtidos com a amostra final de 5 participantes foram considerados relevantes para serem relatados neste artigo e serão descritos a seguir.

4.0 Avaliação do Curso

Da questão em aberto do questionário aplicado ao final do curso, respondida por 5 dos participantes, foi possível obter comentários importantes para a reestruturação e melhoria do curso.

Os comentários feitos em relação à parte teórica e sobre a apresentação do STELLA revelam a necessidade do aumento do tempo de duração do curso para que seja possível explorar mais a fundo a teoria dos Métodos Numéricos de Integração e obter uma maior familiarização com o ambiente de modelagem utilizado: Dessa forma, exemplos de comentários foram:

"A parte Teórica deve ser mais explorada".

"Gastar mais tempo com os exemplos que envolvem os Métodos Numéricos...."

"Faltaram exercícios...."

"Mais ênfase sobre o ambiente STELLA e sua utilização, assim como a montagem de modelos".

"... gastar mais tempo com a apresentação do STELLA".

Apesar da necessidade de maior aprofundamento no STELLA e nos métodos de integração pode se observar, de modo geral, comentários que se mostraram positivos:

"O módulo é simples e objetivo".

"A apresentação foi, também, muito interessante e me levou a um entendimento claro dos métodos".

5.0 Avaliação do Módulo (Conteúdo)

A avaliação do conteúdo do módulo foi feita a partir das questões em aberto incluídas ao longo do mesmo. Em diferentes momentos do módulo o entendimento dos alunos sobre o tópico abordado era testado através dessas questões. Assim, o módulo continha um total de 8 questões descritas abaixo.

Questão	Enunciado	Localização no Módulo
01	Que conclusões você pode tirar a respeito do módulo das diferenças entre a solução exata e aproximações mostradas para o método de Euler, Runge Kutta 2 e Runge Kutta 4?	Ao final da apresentação teórica sobre os métodos numéricos.
02	Existiu alguma diferença entre as simulações com método de Euler, Runge Kutta 2 e Runge Kutta 4 ?	Após comparação dos métodos de integração na atividade sobre MRU para um Dt fixo.
03	Observando as saídas gráficas, o que você percebeu ao diminuir o valor de DT? Como você explicaria o que aconteceu?	Após comparação dos métodos de integração na atividade sobre MRU para diferentes Dt.
04	Baseado em suas observações descreva suas conclusões a respeito da precisão dos métodos.	Após comparação dos métodos de integração na atividade sobre OHS para um Dt fixo.
05	Escolha o Passo de Integração DT = 5. Simule o modelo e observe a saída gráfica. O que você percebeu na saída gráfica?	Comparação dos métodos de integração na atividade sobre OHS para diferentes Dt.
06	Escolha o Passo de Integração DT = 3. Simule o modelo e observe a saída gráfica. O que você percebeu na saída gráfica?	
07	Escolha o Passo de Integração DT = 1. Simule o modelo e observe a saída gráfica. O que você percebeu na saída gráfica?	
08	Observando que o valor do Passo de Integração é razoavelmente pequeno, o que você conclui com este resultado?	Após comparação dos métodos de integração na atividade sobre OHS para diferentes Dt.

O desenvolvimento dos alunos com a utilização do módulo educacional foi positivo no que diz respeito ao grau de entendimento em relação aos métodos numéricos de integração, sobretudo nos seguintes aspectos:

- Entendimento da diferenciação entre os Métodos de Euler, Método de Runge Kutta 2 e Método de Runge Kutta 4, quanto à precisão;
- Esclarecimento do fato de que uma diminuição no valor do passo de integração, representado por Dt na atividade experimental e por h na parte teórica, proporciona um aumento na precisão da simulação.

Estes resultados podem ser explicitamente observados nas respostas de 2 alunos, sendo que as respostas dos demais não apresentaram discrepância em relação aos tópicos abordados, embora tenham manifestado que o módulo os levou a um maior esclarecimento sobre os métodos. Dessa forma, somente as respostas desses dois alunos serão apresentadas abaixo.

5.1 Aluno 01 (Estudante de Graduação)

No Módulo Educacional, depois de discutir a teoria do Método de Euler, foi apresentada uma tabela mostrando o módulo da diferença entre a solução exata e aproximações para algumas interações. O mesmo foi feito para o Método de Runge Kutta 2 e Método de Runge Kutta 4. Na seqüência foi perguntado aos estudantes:

> *"Que conclusões você pode tirar a respeito do módulo das diferenças entre a solução exata e aproximações mostradas para o método de Euler, Runge Kutta 2 e Runge Kutta 4?"*

A resposta do Aluno 01, foi:

> *"O Método de Runge Kutta 4 é mais preciso por envolver mais interações (mais termos da expansão)".*

A análise desta resposta revela uma confusão de linguagem por parte do Aluno 01 ao associar o número de interações com os número de termos da expansão. O número de interações: está relacionado com o passo de integração, denotado por Dt na atividade experimental e por h na parte teórica.

Na atividade experimental do Módulo Educacional o aluno é solicitado a fazer simulações considerando o modelo do Oscilador Harmônico Simples com condições iniciais pré-fixadas no material desenvolvido. O aluno deveria manter o passo de integração e simular o modelo com cada Método Numérico de Integração: Método de Euler, de Runge Kutta 2 e de Runge Kutta 4. Na seqüência os alunos foram solicitados a responder:

> *"Baseado em suas observações, descreva suas conclusões a respeito da precisão dos métodos".*

O Aluno 01 respondeu:

> *"Mesmo com o passo grande, o Método de Runge Kutta continua sendo o mais preciso. No Método de Euler as oscilações de forma crescente, são devido ao pequeno número de cálculos".*

Percebe-se novamente a mesma confusão. Não se sabe ao certo o que o aluno quer dizer quando fala em "número de cálculos".

Na seqüência da atividade experimental os alunos são solicitados a fazer várias simulações mantendo um dos métodos de integração e diminuindo o passo de integração, começando com um passo razoavelmente grande até que fique consideravelmente pequeno.

Ao realizar essas simulações o aluno 01 percebeu que ao diminuir o valor do passo de integração, mantendo o mesmo método a aproximação torna-se cada vez melhor. Este fato pode ser observado quando ele é perguntado:

> *"A partir de suas observações descreva por que isto aconteceu?"*

O Aluno 01 respondeu:

> *"Como se toma um passo menor, o número de cálculos é maior, logo a aproximação é grande e o gráfico está quase perfeito".*

Neste ponto, parece que o Aluno 01, quando escreveu "número de cálculos", se referia ao número de interações e, sendo assim, pode ter acontecido uma elucidação das confusões feitas anteriormente. O Aluno 01 parece ter entendido que o número de interações está relacionado com o passo de integração, uma vez que a ele foi perguntado o que acontecia ao manter o método e *diminuir o Dt* e ele ter respondido corretamente que quanto menor o passo maior o número de cálculos.

5.2 Aluno 02 (Estudante de Graduação)

Na atividade experimental do Módulo Educacional, em um certo ponto, foi utilizado o modelo do Movimento Retilíneo Uniforme com condições iniciais pré-fixadas no material desenvolvido. As simulações foram feitas mantendo um dos métodos de integração porém, diminuindo o passo de integração: inicialmente foi utilizado um passo razoavelmente grande até que ficasse consideravelmente pequeno. Em seguida, foi feita a seguinte pergunta:

> *"Observando as saídas gráficas, o que você percebeu ao diminuir o valor de Dt? Como você explicaria o que aconteceu?"*

O Aluno 02 respondeu:

> *"O gráfico ficou mais refinado e consequentemente mais preciso. Quanto maior o Dt, maior a precisão envolvida, pois diminui o intervalo de aproximação".*

Percebe-se uma confusão quando ele diz que quanto maior o valor de Dt, maior a precisão: sabe-se que quanto menor o Dt maior a precisão.

Em outro ponto do módulo, quando o mesmo procedimento anterior foi utilizado com o modelo do Oscilador Harmônico Simples, parece que houve uma elucidação desta confusão inicial. Isto pode ser observado pela resposta do aluno à pergunta:

> *"Ao diminuir o valor de Dt, o que você percebeu na saída gráfica?"*

a qual o Aluno 02 respondeu:

> *"Quanto menor o valor de Dt sem deformidade fica o gráfico".*

6.0 Comentários Finais

Através das constatações feitas no estudo preliminar pode-se afirmar que a pesquisa sobre a utilização da modelagem computacional no estudo de Métodos Numéricos de Integração parece ser promissora na medida em que é promovida uma discussão teórica sobre os métodos de integração aliada a uma familiarização do estudante com o ambiente de modelagem computacional utilizado.

Desta forma, sugere-se a estruturação um novo curso suprindo as necessidades mencionadas anteriormente que poderá, eventualmente, ser oferecido como curso de extensão para estudantes da área de Ciências Exatas bem como ser incluído como atividade da disciplina Calculo Numérico onde se estuda Métodos Numéricos de Integração.

7.0 AGRADECIMENTO

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq, CAPES e pelo FACITEC/CMT/PMV - Fundo de Apoio à Ciência e Tecnologia do Conselho Municipal de Ciência e Tecnologia do Município de Vitória, ES.

8.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMILETTI, G. G. & FERRACIOLI, L. (2001) A Utilização da Modelagem Computacional Quantitativa no Aprendizado Exploratório de Física. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 18(2): 214-228.

FERRACIOLI, L e CAMILLETI, G.G. (1998). Introdução ao Ambiente de Modelagem Computacional STELLA. *Série Modelos,* nº 2. Publicação Interna do ModeL@b, Vitória, ES.

FERRACIOLI, L. (1997a) As Novas Tecnologias nos Centros de Ciências, nos Centros de Formação Profissional e na Formação de Professores. In: *Atas do XII Simpósio Nacional de Ensino de Física.* Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais. 27-31/Janeiro/1997. p.127-33.

FERRACIOLI, L. (1997b) A Área de Concentração Ensino de Física do Programa de Pós-Graduação em física da Universidade Federal do Espírito Santo. http://modelab.ufes.br

HUMES, A. et al. Noções de Calculo Numérico. São Paulo: McGraw-Hill, 1984. 201p.

MASSARANI,G. Introdução ao Calculo Numérico. 2. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro técnico S.A., 1970. 130p.

RUGGIERO, M., LOPES, V. Cálculo numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.2ª ed. São Paulo: Makron Books,1997.406p.