A HISTÓRIA DA CIÊNCIA AJUDANDO A DESVENDAR ALGUMAS DIFICULDADES CONCEITUAIS NO ENSINO DO PRODUTO VETORIAL

Cibelle Celestino Silva[a] [cibelle@ifi.unicamp.br]
Roberto de Andrade Martins[b] [rmartins@ifi.unicamp.br]

[a] Grupo de História de Teoria da Ciência, Departamento de Raios Cósmicos, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Unicamp
[b] Grupo de História de Teoria da Ciência, Departamento de Raios Cósmicos, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Unicamp

1. Introdução

A importância da história da ciência como um dos elementos do ensino de ciências é resultado das pesquisas em ensino de física dos últimos anos e é um consenso entre a maioria dos pesquisadores da área[1]. Um dos aspectos interessantes do uso da história da ciência no ensino é esclarecer conceitos ensinados em sala de aula que nem sempre são óbvios e diretos como os livros texto insistem em nos fazer crer.

O conceito de vetor é amplamente usado na física, tanto em nível universitário quanto em nível médio. O estudo histórico desenvolvido no presente artigo permite tornar claro algumas das dificuldades conceituais e pedagógicas envolvidas no ensino do conceito de vetor e das operações vetorias. O conhecimento das dificuldades envolvidas com certos conceitos ensinados em sala de aula é fundamental para a superação das barreiras epistemológicas existentes no processo de ensino-aprendizagem.

A análise histórica do desenvolvimento do cálculo vetorial é um exemplo de como a história da ciência pode fornecer elementos úteis para a estruturação da prática pedagógica, especialmente com relação à física e matemática. O ensino tradicional produz simplificações nos conteúdos apresentados, muitas vezes torna-os impossíveis de serem entendidos pelos estudantes. Vamos analisar o caso particular das dificuldades conceituais envolvidas com o produto vetorial no ensino da teoria eletromagnética.

O ensino da teoria eletromagnética apresenta muitas dificuldades. Além do caráter abstrato do campo eletromagnético, há vários conceitos matemáticos novos para serem ensinados junto

---

[1] Ver MATTHEWS 1994.

com os novos conceitos físicos. Este trabalho problematizará uma questão aparentemente simples – o produto vetorial – e analisará algumas dificuldades relacionadas com o uso do produto vetorial no eletromagnetismo, mostrando que essas dificuldades têm raízes históricas profundas que surgem da deficiente elucidação conceitual nos trabalhos dos fundadores do eletromagnetismo e da análise vetorial.

2. O produto vetorial

O produto vetorial é normalmente introduzido nos cursos fundamentais de física[2] nos capítulos sobre dinâmica da rotação. No entanto, é na teoria eletromagnética que o produto vetorial adquire um papel essencial. Como exemplo de uma questão intrigante envolvendo o produto vetorial, vamos analisar a força $\mathbf{F}$ agindo sobre uma carga elétrica q com velocidade $\mathbf{v}$ em um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. A força $\mathbf{F}$ é dada por $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$.

Isto significa que a força que age sobre a carga é perpendicular ao campo e à velocidade. Como o campo magnético e a força definem um plano, seria esperado que a carga continuasse a se mover neste plano; no entanto, não é isso que ocorre. Aparece uma força perpendicular ao plano, sem nenhum motivo aparente, que desvia a carga para fora do plano. Qualquer um poderia se perguntar: como o movimento da carga no mesmo plano do campo pode criar algo perpendicular ao plano? Alguém poderia tentar responder: "Porque o produto vetorial em $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ produz um vetor perpendicular a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$, cujo sentido é dado pela regra da mão direita." Mas essa não é uma explicação física; apenas descreve a regra matemática utilizada.

A regra da mão direita é apenas uma regra mnemônica. Por que a força $\vec{\mathbf{F}}$ tem esse sentido e não o oposto? A resposta usual para esta questão é que isso é uma "convenção". Na realidade, a direção do produto vetorial é de fato uma convenção. No entanto, por trás desta convenção há propriedades de simetria dos vetores não arbitrárias. Existem os vetores *polares* e os vetores *axiais*, e eles têm propriedades de simetria muito diferentes, como discutido anteriormente.

É também necessário ressaltar a diferença entre uma quantidade vetorial e sua representação gráfica. Para representar graficamente uma quantidade vetorial polar ou axial, normalmente usamos setas, isto é, usamos o mesmo símbolo para representar coisas diferentes. Tanto a regra da mão direita quanto a representação gráfica de um vetor foram discutidas pelos fundadores do cálculo vetorial e do eletromagnetismo no final do século XIX e início do século XX.

---

[2] Como exemplo veja HALLIDAY 1997 e ALONSO&FINN 1992.

3. A natureza e simetria dos vetores

Para exibir as propriedades de simetria de um vetor, vamos considerar reflexões em planos paralelos e perpendiculares ao vetor. Um vetor simétrico não muda de sinal em uma reflexão e um antissimétrico muda. Vetores polares (como os que correspondem a deslocamento, velocidade, força e campo elétrico) são simétricos com relação a reflexões em um plano paralelo pois o vetor refletido possui a mesma direção que o vetor original (Fig. 1). Por outro lado, os vetores polares são antissimétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular pois a direção do vetor refletido é oposta ao vetor original (Fig. 2).

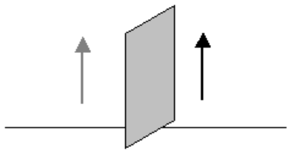

Figura 1. Um vetor polar é simétrico com respeito a uma reflexão paralela.

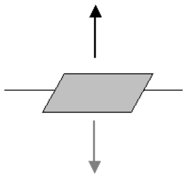

Figura 2. Um vetor polar é antissimétrico com relação a uma reflexão perpendicular.

Os vetores axiais (tais como os que correspondem a velocidade angular, torque, momento angular e campo magnético) são antissimétricos com respeito a reflexões em um plano paralelo (Fig. 3) e simétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular (Fig. 4)[3]. Tanto um vetor polar quanto um axial tem três componentes e o mesmo símbolo é usado para representar ambos, mas eles são dois objetos completamente diferentes.

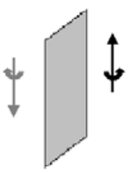

Figura 3. Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão em um plano paralelo.

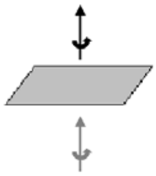

Figura 4. Um vetor axial é simétrico com relação a uma reflexão perpendicular.

Pela multiplicação de dois vetores é possível gerar novos objetos. Por exemplo: o produto vetorial de dois vetores polares é um vetor axial[4]. Para entender isso, vamos analisar um caso

---

[3] ALTMANN 1992, pp. 23-25.
[4] ALTMANN 1992, p. 63.

simples do produto vetorial **C**=**A**×**B** no qual as componentes A_z e B_z são nulas. De acordo com as regras usuais para o produto vetorial, **C** tem apenas uma componente $C_z=A_xB_y-A_yB_x$.

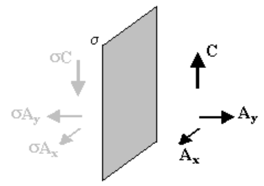

Figura 5. Um vetor polar A cuja componente z é nula. O vetor C é um vetor axial.

Vamos considerar um plano de reflexão σ paralelo ao plano *xz* (Fig. 5). As componentes A_x e B_x são simétricas quando consideramos uma reflexão paralela em σ, isto é, $\sigma A_x = A_x$ e $\sigma B_x = B_x$. Mas as componentes A_y e B_y são antissimétricas em relação a uma reflexão perpendicular em σ, isto é $\sigma A_y = -A_y$ e $\sigma B_y = -B_y$. Portanto, $\sigma\mathbf{C} = \sigma(A_xB_y - A_yB_x) = (-A_xB_y + A_yB_x) = -\mathbf{C}$ logo o vetor **C** se comporta como um vetor axial sob reflexões em um plano paralelo σ.

Quando se representa um vetor polar $\vec{\mathbf{A}}$ como $\vec{\mathbf{A}} = A_x\vec{\mathbf{i}} + A_y\vec{\mathbf{j}} + A_z\vec{\mathbf{k}}$, os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ são entendidos como vetores polares unitários e as componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ (isto é, A_x, A_y e A_z) são escalares. Mas se tentarmos representar um vetor axial $\vec{\mathbf{C}}$ como $\vec{\mathbf{C}} = C_x\vec{\mathbf{i}} + C_y\vec{\mathbf{j}} + C_z\vec{\mathbf{k}}$ surge um problema: se os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ forem entendidos como vetores unitários *polares*, então $\vec{\mathbf{C}}$ também deveria ser entendido como um vetor polar pois a adição de vetores polares produz vetores polares.

O produto entre um vetor polar e um pseudo-escalar é um vetor axial e vice-versa. Portanto, se assumirmos que $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores *polares*, é possível representar um vetor *axial* como $\vec{\mathbf{C}} = C_x\vec{\mathbf{i}} + C_y\vec{\mathbf{j}} + C_z\vec{\mathbf{k}}$, desde que C_x, C_y, C_z sejam pseudo-escalares.

Também seria possível considerar $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores *axiais*. Neste caso, no entanto, seria impossível, à primeira vista representar um vetor polar (tal como posição) como $\mathbf{r} = a i + b j + c k$. No entanto há uma solução para este problema. A resposta está em C_x, C_y, C_z. A resposta está em interpretá-los como *pseudo-escalares*. Se um número real A é uma função do vetor posição **r** de tal modo $A(\mathbf{r}) = \pm A(-\mathbf{r})$, então A é ou um escalar ou um pseudo-escalar, se o sinal + ou – prevalecer.

É possível representar um vetor polar **A** como $\vec{\mathbf{A}} = A_X \vec{\mathbf{i}} + A_Y \vec{\mathbf{j}} + A_Z \vec{\mathbf{k}}$, com $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores axiais, se A_x, A_y, A_z forem entendidos como pseudo-escalares. Assim **A** é um vetor polar pois é a soma de pseudo-escalares multiplicados pelos vetores axiais[5]. Contrariamente, se considerarmos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores *polares*, é possível representar um vetor *axial* como **C** = a*i* + b*j* + c*k* desde que C_x, C_y, C_z sejam pseudo-escalares. Isto está pressuposto implicitamente na álgebra vetorial usada pelos físicos, embora os livros-texto não discutam esses conceitos.

No início do século XX, alguns autores com Paul Langevin e Woldemar Voigt discutiram assuntos conceituais e a melhor notação para representar os diferentes tipos de vetores. Paul Langevin propôs[6] em 1912 uma seta arredondada para identificar vetores axiais, uma seta reta para identificar vetores polares e um ponto abaixo da letra usada para representar uma grandeza pseudo-escalar. Os símbolos propostos são $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ and $\underset{\cdot}{\alpha}$. Woldemar Voigt propôs[7] em 1910, o uso de símbolos diferentes para representar os vetores polares e axiais sem propor nenhum símbolo especial para representar as grandezas pseudo-escalares:

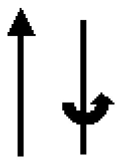

Figura 6: Os símbolos propostos por Voigt para representar vetores polares e axiais.

Estas propostas nunca foram aceitas e atualmente ainda se usa o mesmo símbolo (uma seta) para representar grandezas com propriedades matemáticas diferentes.

4. Um paradoxo interessante

Entre as várias leis físicas associadas com o produto vetorial, vamos considerar a expressão da força magnética $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Alguém pode se perguntar como pode ser possível o produto entre o vetor polar $\vec{\mathbf{v}}$ e o vetor axial $\vec{\mathbf{B}}$ produza o vetor polar $\vec{\mathbf{F}}$. Isto não é óbvio e devemos olhar com mais atenção para a natureza destes vetores para obtermos uma resposta.

---

[5] ALTMANN 1986, p. 205.
[6] LANGEVIN 1912, p. 3.
[7] VOIGT 1910, p. 130.

Vamos adotar a interpretação usual para os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores unitários *polares*. Como discutido acima, as componentes de $\vec{\mathbf{F}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ devem ser escalares e as componentes de $\vec{\mathbf{B}}$ devem ser pseudo-escalares para que sejam vetores polares e axiais respectivamente.

Temos então $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores polares; $\breve{B}_x, \breve{B}_y, \breve{B}_z$[8] como pseudoescalares; e v_x, v_y, v_z como escalares. A força $\vec{\mathbf{F}}$ é obtida pelo produto vetorial $q\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{B}$ e de acordo com o método usual de cálculo, pode ser escrita como

$$\vec{\mathbf{F}} = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{B} = q.(v_x \vec{\mathbf{i}} + v_y \vec{\mathbf{j}} + v_z \vec{\mathbf{k}}) \times (\breve{B}_x \vec{\mathbf{i}} + \breve{B}_y \vec{\mathbf{j}} + \breve{B}_z \vec{\mathbf{k}}) \therefore$$

$$\therefore \vec{\mathbf{F}} = q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\vec{\mathbf{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\vec{\mathbf{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\vec{\mathbf{k}}\,. \qquad (1)$$

A carga elétrica **q** é um escalar. Na expressão final, cada quantidade entre parênteses é um pseudo-escalar pois o produto e o quociente entre dois números da mesma classe é um escalar puro, enquanto que o produto e o quociente entre dois números de classes diferentes são um pseudo-escalar.

Portanto, o produto vetorial $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ deveria ser um vetor axial pois é a soma de produtos entre um pseudo-escalar e vetores polares, isto é, é uma soma de vetores axiais. Desta forma, um paradoxo emerge: como a força $\vec{\mathbf{F}}$ é um vetor polar e o lado direito da equação parece ser um vetor axial? Este paradoxo surge porque interpretamos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como sendo vetores polares desde o início.

Além disso, como discutimos na seção 3 o produto vetorial de dois vetores é um vetor axial, então os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ que aparecem na equação (1) são vetores axiais pois são o os produtos $\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}$. Esta nova propriedade de simetria trazida pelo produto vetorial não aparece explicitamente pois usamos o mesmo símbolo para representar vetores polares e axiais. Se no entanto usarmos uma seta arredondada, teremos $\overset{\circlearrowleft}{i} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ etc. Porém isso é uma inconsistência pois escolhemos no começo que $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ são vetores polares e é impossível termos $\overset{\circlearrowleft}{i}$ e $\vec{\mathbf{i}}$ formando uma base ao mesmo tempo, então é impossível construir uma álgebra vetorial fechada.

---

[8] Nós estamos propondo o uso de uma barra arrendondada para representar uma grandeza pseudo-escalar pois este símbolo é mais simples tipograficamente.

Uma solução para o paradoxo seria interpretar $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores axiais e usar setas arredondadas para representá-los, isto é, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$. Neste caso, as componentes da velocidade $\breve{v}_x, \breve{v}_y, \breve{v}_z$ deveriam ser pseudo-escalares e as componentes do campo magnético B_x, B_y, B_z deveriam ser escalares para que possamos ter a velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ como um vetor polar e o campo magnético $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$ como um vetor axial. Portanto, teríamos $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$, etc., e a força $\vec{\mathbf{F}}$ poderia ser calculada como $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$:

$$\vec{\mathbf{F}} = q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\,\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\,\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\,\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}. \qquad (2)$$

No entanto, notemos que agora temos um novo conjunto de vetores unitários $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$ e que isso é inconsistente com a interpretação usual de $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores polares.

Se quisermos manter apenas o conjunto antigo $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ de vetores unitários polares, é necessário usar um pseudo-escalar unitário $\breve{1}$ e introduzir as novas regras $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \breve{1}\vec{\mathbf{i}}$, etc. Neste caso, ao invés da equação (2) podemos escrever:

$$\vec{\mathbf{F}} = \breve{1}\,[q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\vec{\mathbf{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\vec{\mathbf{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\vec{\mathbf{k}}] \qquad (3)$$

É impossível construir uma álgebra vetorial fechada usando apenas vetores polares (ou axiais) e grandezas escalares pois o produto vetorial gerará vetores axiais dos vetores polares (e vice-versa). Portanto, quando se representa vetores por suas componentes, há duas possibilidades: ou se usa vetores polares e axiais junto com escalares e regras de multiplicação apropriadas (tais como $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ etc.) ou se usa apenas vetores polares ou axiais junto com escalares e pseudo-escalares com regras de multiplicação convenientes (tais como $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \breve{1}\vec{\mathbf{i}}$, etc.). Qualquer que seja a escolha, será útil usar símbolos diferentes para representar escalares, pseudo-escalares, vetores polares e vetores axiais.

Suponha, por exemplo, que escolhemos usar apenas vetores unitários axiais, isto é, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$. Neste caso, as componentes da velocidade $\breve{v}_x, \breve{v}_y, \breve{v}_z$ devem ser pseudo-escalares e as componentes do campo magnético B_x, B_y, B_z deve ser escalares para que a velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ seja um vetor polar e o campo magnético $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$ um vetor axial. A força $\vec{\mathbf{F}}$ pode ser calculada como $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$. Esta força é a soma de termos vetoriais polares tais como $(\breve{v}_y B_z - \breve{v}_z B_y)\,\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$.

A notação tradicional de setas para representar os vetores polares e axiais dificulta que se perceba que a força e a velocidade são grandezas físicas com simetria polar enquanto que o campo magnético tem simetria axial. Esta tradição começou no final do século XIX com a invenção do sistema vetorial atual por Gibbs e Heaviside a partir do sistema de quaternions.

5. A invenção do cálculo vetorial a partir do sistema de quaternions

O desenvolvimento da teoria eletromagnética no século XIX trouxe consigo o conceito de campo, novas grandezas vetoriais relacionadas com o campo e também a necessidade de uma análise vetorial para lidar com tantas grandezas de uma forma mais prática[9].

Na última década do século XIX houve um grande debate para saber qual seria o melhor formalismo matemático para representar as novas grandezas vetoriais no espaço tridimensional. De um lado estavam Peter G. Tait, Cargil Knott, e Alexander MacFarlane, que defendiam o uso da álgebra de quaternions como a melhor ferramenta para lidar com as novas grandezas vetoriais. De outro lado, estavam Willard Gibbs e Oliver Heaviside que defendiam o uso da análise vetorial[10]. Ambos os grupos foram influenciados por James Clerk Maxwell que usou o cálculo de coordenadas e também o cálculo de quaternions em seu *Treatise on Electricity and Magnetism* publicado em 1873[11]. Maxwell teve um importante papel para o desenvolvimento do cálculo vetorial, tendo introduzido o uso do símbolo ∇, os nomes divergente e rotacional e também a interpretação atual dessas operações vetoriais. Um dos aspectos mais importantes que torna este debate interessante é fato de que todos os debatedores eram importantes físicos importantes da época com interesses matemáticos[12].

Quaternions[13] são entes matemáticos formados por quatro componentes inventados por Willian Hamilton em 1843 a partir de suas tentativas de generalização dos números complexos ($z = a + bi$). Um quaternion pode ser escrito como $q = \mathrm{a} + \mathrm{b}i + \mathrm{c}j + \mathrm{z}k$, onde i, j, k obedecem às seguintes regras:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ ji = -k,\ jk = i,\ kj = -i,\ ki = j,\ ik = -j.$$

[9] WHITTAKER 1973.
[10] CROWE 1967.
[11] MAXWELL 1954.
[12] STEPHENSON 1966 e BORK 1966.
[13] HAMILTON 1969.

Um quaternion $q = a + bi + cj + zk$ contém uma parte escalar (a) e uma parte vetorial ($bi + cj + zk$). Um quaternion da forma $q = bi + cj + zk$ é chamado 'quaternion puro' e se parece com um vetor comum – mas esta é apenas uma similaridade superficial, como mostraremos a seguir.

Hamilton definiu operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação e divisão) entre dois quaternions de modo que o resultado dessas operações também é um quaternion. A maioria das propriedades aritméticas ordinárias continuam válidas para o cálculo de quaternions, exceto a propriedade comutativa da multiplicação.

O produto quaterniônico, ou produto completo, entre dois quaternions puros $\alpha = (ix+jy+kz)$ e $\beta = (iu+jv+kw)$ é obtido usando as regras acima para multiplicação de i, j, k:

$$\alpha\beta = [-(xu + yv + zw)] + [i(yw - zv) + j(zu - xw) + k(xv - yu)]$$

Portanto, na teoria de quaternions, o produto completo entre dois quaternions puros é composto por duas partes. A parte escalar $S\alpha\beta = -(xu + yv + zw)$ que possui sinal negativo e a parte vetorial $V\alpha\beta = i(yw - zv) + j(zu - xw) + k(xv - yu)$ que é um quaternion puro. Portanto,

$$\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta,$$

Os quaternions foram estudados e aplicados na física intensivamente durante a segunda metade do século XIX e começo do século XX. Atualmente são estudados pelos matemáticos como um exemplo interessante de álgebras não comutativas e raramente são usados pelos físicos – que preferem usar vetores ou tensores.

Os vetores (no espaço tridimensional) têm três componentes espaciais (X, Y, Z) e podem ser representados como $V = Xi + Yj + Zk$. É possível definir adição e subtração para vetores e há dois tipos de produtos, que são análogos às partes escalar e vetorial do produto quaterniônico. A operação de divisão não é definida para vetores.

Alguns autores atuais interpretam um quaternion puro como um vetor em R^3. Jack Kuipers, por exemplo, define um quaternion como "a soma de um escalar e um vetor"[14]. Ele considera óbvia a identificação de vetor com um quaternion puro:

---

[14] KUIPERS 1999, p. 105.

Como pode um quaternion, que vive no R^4, agir como um vetor, que vive no R^3? Há uma resposta para esta questão que pode parecer óbvia para alguns: Um vetor $\mathbf{v} \in R^3$ pode simplesmente ser tratado como se fosse um quaternion $q \in R^4$ cuja parte real é zero[15].

Claro que há uma correspondência entre o conjunto de vetores e o conjunto dos quaternions puros pois ambos são tripletos. No entanto, nem todo tripleto pode ser considerado como vetor pois um vetor é um tripleto que tem *propriedades específicas*.

A notação usada para vetores e quaternions também ajuda a aumentar a confusão. Em ambos o caso, se usa *i*, *j*, *k* e isso induz a uma identificação entre quaternions puros e vetores. No entanto no caso dos vetores *i*, *j*, *k* são vetores unitários nas três direções perpendiculares. No caso dos quaternions, *i*, *j*, *k* são unidades imaginárias (da mesma forma que $i = \sqrt{-1}$).

Simon L. Altmann mostra, de um ponto de vista moderno, o quanto é perigoso identificar diretamente um quaternion puro com um vetor[16]. Um quaternion puro e um vetor não têm as mesmas propriedades de simetria. O quaternion puro se comporta com respeito a transformações de coordenadas como um *vetor axial*, enquanto que um vetor comum se comporta como um *vetor polar*[17].

Do ponto de vista histórico, a álgebra vetorial surgiu a partir da álgebra de quaternions. No entanto, entender como isso ocorreu já que ambas entidades têm propriedades tão diferentes e por que elas são tão similares em alguns aspectos é assunto para um outro trabalho[18].

Do ponto de vista educacional, o não esclarecimento das propriedades de simetria dos vetores, principalmente os gerados pelo produto vetorial, pode dificultar bastante o entendimento de alguns conceitos fisicos

6. Conclusão

A notação tradicional de setas para representar tanto vetores polares quanto axiais, dificulta muito a compreensão dos estudantes de que a força e a velocidade são grandezas físicas com simetria polar enquanto que o campo magnético tem simetria axial. Esta tradição começou no final do século XIX com a invenção do sistema vetorial por Gibbs e Heaviside a partir do sistema de quaternions.

---

[15] KUIPERS 1999, p. 114.
[16] ALTMANN 1986, p. 9.
[17] ALTMANN 1986, 201-19.
[18] SILVA&MARTINS 2002.

Uma análise das propriedades de simetria mostra que é errado identificar um quaternion puro como um vetor (polar) comum, como Gibbs e Heaviside fizeram quando desenvolveram sua álgebra vetorial e como alguns autores ainda fazem hoje em dia.

Gibbs e Heaviside, no final do século XIX, desenvolveram a álgebra vetorial contemporânea em R^3 a partir do sistema de quaternions, embora tivessem negado qualquer influência dos quaternions sobre seu sistema. Eles interpretaram um quaternion puro como um vetor e introduziram novas definições para o produto entre dois. Um quaternion puro não é equivalente a um vetor polar no R^3 pois dentro da teoria de quaternions, as unidades *i, j, k* são versores isto é, vetores *axiais* bem como o quaternion puro. Mas o vetor comum no espaço euclidiano é um vetor *polar*.

Finalmente, a raiz do mal entendido entre quaternions puros e vetores comuns pode ser encontrada nos significados conflitantes atribuídos a *i, j, k* por Hamilton e Tait e no uso do mesmo símbolo para representar o que chamamos atualmente de vetores polar e axial.

No início do século XX, alguns autores com Paul Langevin e Woldemar Voigt propuseram novos símbolos para representar os diferentes tipos de vetores. No entanto, eles não conseguiram fazer suas sugestões aceitas e incorporadas na notação usada pelos físicos e matemáticos.

O assunto discutido neste trabalho surgiu de um estudo histórico dos fundamentos da análise vetorial. Neste caso específico, o estudo histórico nos permite rever as raízes de dificuldades conceituais que permeiam o ensino do produto vetorial, permitindo com isso uma melhor compreensão destes conceituais pelos estudantes. No entanto, a solução para essas dificuldades não é puramente histórica: ele requer uma profunda discussão das propriedades de simetria dos dois tipos de vetores e o uso de uma nova notação.

7. Bibliografia

ALONSO, Marcelo & , FINN, Edward J. *Physics*. Wokingham : Addison-Wesley, 1992.

ALTMANN, Simon L. *Icons and symmetries*. Oxford : Clarendon Press, 1992.

ALTMANN, Simon L. *Rotations, quaternions, and double groups*. Oxford: Clarendon Press, 1986.

CROWE J. M. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. London: Universty of Notre Dame Press, 1967.

GIBBS, Josiah Willard. *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, vol 2. New York: Dover, 1961

HALLIDAY, David, RESNICK Robert & WALKER, Jearl. *Fundamentals of physics*. New York ; Chichester : Wiley,1997.

HAMILTON, William Rowan. *Elements of quaternions*. New York: Chelsea Publishing Company, 1969.

KUIPERS, Jack B. *Quaternions and rotations sequences, a prime with applications to orbits, aerospace, and virtual reality.* Princeton: Princeton University Press, 1999.

LANGEVIN, Paul. Notions Géométriques Fondamentales. *Encyclopédie des sciences mathematiques*, Vol V, Paris: Gauthier Villars, 1912.

MATTHEWS, M. R. *Science Teaching – The role of History and Philosophy of Science.* New York: Routledge, 1994.

MAXWELL, James. C. *Treatise on Electricity and Magnetism*, New York: Dover, 1954.

SILVA, Cibelle Celestino & MARTINS, Roberto de A. Polar and axial vectors versus quaternions. *American Journal of Physics* **70:** 2002 (no prelo).

VOIGT, Woldemar. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Druck und Verlag, 1910.

WHITTAKER, E. T. *A History of the Theories of Aether and Alectricity*. Humanities Press: New York, 1973, Vol. 1.