A BUSCA DA VERDADE MATEMÁTICA E O MÉTODO AXIOMÁTICO
THE SEARCH OF MATHEMATICAL TRUTH AND THE AXIOMATIC METHOD

Thiago Nagafuchi[1]
Irinéa de Lourdes Batista[2]

1Universidade Estadual de Londrina/Departamento de Matemática/tnagafuchi@uol.com.br
2Universidade Estadual de Londrina/Departamento de Física/irinea@uel.br

Resumo

O objetivo deste artigo é investigar a busca da verdade matemática, considerando-a como uma ciência, por sua natureza lógica e sistemática e destacando a importância de um estudo histórico-filosófico dos métodos matemáticos para uma melhor compreensão da ciência. Para tal fim, focamos o trabalho na demonstração em matemática como um critério para o estabelecimento da verdade em matemática.

Palavras-chave: Verdade matemática, método axiomático, demonstração em matemática.

Abstract

The aim of this paper is to investigate the pursuit of mathematical truth, regarding mathematics as a science, for its logical and systematic nature and standing out the importance of a historical-epistemological study of the mathematical methods for a best comprehension of the science. For this end, this work will focus on mathematical demonstration as a criterion for the founding of mathematical truth.

Keywords: Mathematical truth, axiomatic method, mathematical demonstration.

Introdução

Um dos papéis da Filosofia da Matemática é investigar questões como “o que é Matemática?”. Certamente esta não é uma pergunta simples e não pode ser respondida em três linhas. E se pudesse, nenhuma resposta pareceria suficiente. Mas a complexidade dessa questão aos poucos forma uma teia que a circunda, e é ali que se localizam outras tantas perguntas, como por exemplo, “o que busca a Matemática, pensada como Ciência?”, ou então “o que caracteriza a Matemática como Ciência?” ou “qual é a estrutura da Ciência Matemática?”. Localizamos aqui a nossa investigação.

Neste artigo, não iremos procurar respostas sintéticas à qualquer pergunta que possa surgir, mas buscaremos, por meio de conceitos lógicos e filosóficos, uma melhor compreensão da Matemática como Ciência.

A importância do estudo é que ainda há poucas pesquisas sobre demonstração em Matemática à luz da Educação Matemática no Brasil. Assim como as outras ciências, a

Matemática busca verdades e formas de validar estas verdades. E ainda não é somente aqui se faz fundamental tal investigação, pois ela é importante para todas as ciências matematizáveis.

Primeiramente listamos os pressupostos para estabelecer uma coerência lógica com os objetivos. À partir deles decorremos sobre alguns aspectos da Matemática. Na primeira parte caracterizamos a Matemática como uma Ciência, sob seu aspecto epistemológico de ser parte do conhecimento humano.

Em seguida fazemos um breve comentário sobre a busca da verdade, focando principalmente a concepção clássica da verdade centrada na correspondência, sem a pretensão de discorrer sobre seus diversos outros aspectos, por mais importantes que sejam, não é a intenção deste artigo.

Logo após faço uma breve construção histórico-epistemológica da demonstração em matemática. É de extrema importância entender como este objeto matemático foi construído através dos tempos. E entender como se pensava matematicamente em tempos outros, é um primeiro passo para se compreender como se pensa hoje.

Na última parte trato de prova formal e alguns conceitos que ela envolve, algo que é tão inerente ao nosso pensamento matemático.

Os Pressupostos

O objetivo principal é falar de demonstração em matemática, e para tal tarefa, começaremos listando os pressupostos para este artigo, que serão tratados no desenvolvimento do trabalho:

(i) A Matemática é uma Ciência;
(ii) A busca da verdade é a essência da atividade científica, portanto a busca da "verdade matemática" é a essência da atividade matemática.
(iii) A demonstração não deixa de ser um critério para o estabelecimento da verdade na atividade matemática.

Cabe aqui fazer alguns apontamentos. Embora não destitua a importância do conhecimento matemático como um todo, como algo inerente à qualquer ser humano que tem como um dos fundantes do pensamento a estrutura lógico-matemática, neste artigo pretendo focar a atividade matemática do matemático e do estudante de matemática (da matemática do ensino superior, pois eles são os que comumente lidam com a demonstração), dadas as devidas proporções e importâncias de cada um destes grupos.

Também vale dizer que neste artigo, trataremos prova formal e demonstração em matemática como sinônimos. Ainda que esta se faça interessante discussão, optamos por não entrar em tal mérito. Um bom debate sobre isso pode ser encontrado em GARNICA (1995).

A Matemática é uma Ciência

Considerar a Matemática como uma ciência nos será algo inerente; situa-se no campo de não tratar as ciências como uma redução à empiria (o que mesmo assim, séculos atrás, classificaria a Matemática como uma Ciência) e portanto não aceitar que qualquer definição estreita, longe da luz da razão, faça que um agrupamento de definições adquira valor científico. Por outro lado, não é a intenção do artigo ver filosoficamente questões que insurjam com naturalidade em discussões ontológicas acerca dos temas Ciência e Matemática. Porém, cabe aqui uma ou outra explicação.

Esta é uma questão antiga, tão imbricada à questão "O que é a Matemática?" ou "O que são as matemáticas?", questões especialmente sem respostas objetivas, tão inerente à busca de fundamentos. Enumeramos alguns exemplos interessantes.

Na classificação positivista da Ciência de Comte, a Matemática era o ponto de partida das seis ciências fundamentais (Matemática, Astronomia, Física, Química, Biologia e Sociologia) e além disso:

> *a Ciência Matemática, único berço necessário da positividade racional, tanto para o indivíduo como para a espécie. (COMTE apud MACHADO, 1987)*

Temos outros exemplos da classificação das ciências, como por exemplo a de Peirce (que se aproxima muito à de Comte) e a Epistemologia Genética de Piaget (que tratava as ciências como uma atividade psicofisiológica). (MACHADO, 1987)

Porém estes exemplos trazem certas limitações à Matemática (cf. Machado, 1987; pg. 71), o que certamente não é o foco do artigo.

Não há, também, como desvincular o importante papel da Matemática das ciências ditas empíricas. Alguns conceitos matemáticos, como, por exemplo, o conceito de derivada, foram originados de fatos observados, empíricos, e possuem uma vasta aplicação. Temos, como algumas aplicações de derivadas, a noção de velocidade, o crescimento populacional, aplicações em fundos de investimento e assim por diante.

E todo o conhecimento de derivadas pode, e muitas vezes o é, ser construído por meio de teoremas e axiomas; e seu ensino, como se o modelo teórico precedesse os dados observados, obedecendo a uma perspectiva estritamente formalista.

Ou seja, há uma relação muito forte entre a matemática e as ciências empíricas. A Matemática não é somente uma abstração formal, ela também modela, esboça e descreve diversos fenômenos naturais que são objeto das ciências empíricas, o que confere relevância à discussão de seu papel no ensino dessas ciências.

Para a seqüência do trabalho, nos bastaremos em assumir a afirmação de que a Matemática é uma Ciência como um pressuposto, não ignorando que dela surgem interessantes debates no corpo da Filosofia da Ciência e da Filosofia da Matemática. Mais vale considerar qual é o papel de tais discussões: nos atemos aqui à uma hipótese que ERNEST (1991) tomou em seu livro *The Philosophy of Mathematics Education,* que diz que um dos papéis da Filosofia da Matemática é prover uma base absolutamente segura e sistemática para a verdade matemática.

Acerca da Verdade

Em seu artigo "Truth and Proof" de 1969, Alfred Tarski afirmou que a busca da verdade é a essência da atividade científica. E além disso, DA COSTA (1999) afirma que o conceito de verdade inerente às várias ciências constitui-se em uma das chaves mestras para entendê-las. Mas então o que é verdade?

Talvez uma das primeiras tentativas de definir verdade seja encontrada na Metafísica de Aristóteles: "Dizer do que não é, ou do que não é que é, é falso; ao passo que dizer do que é que é, ou do que não é que não é, é verdadeiro".(ARITÓTELES apud TARSKI, 1969)

Embora existam diversas teorias sobre a verdade, aqui trataremos basicamente do conceito introduzido por TARSKI (1969), a concepção clássica centrada na correspondência. Nesta concepção, uma sentença é verdadeira se ela reflete o real, retrate aquilo que é. Por exemplo, desta forma tratada, a sentença "neve é branca" é uma verdade.

Mas esta concepção traz alguns problemas quando se trata de auto-referência como por exemplo alguns paradoxos de Russel, e o seguinte exemplo, que segue basicamente a estrutura da antinomia do mentiroso, em que não se é possível especificar se a sentença 1 é verdadeira ou não:

1) A afirmação 2 é verdadeira.
2) A afirmação 1 é falsa.

Mas para eliminar a possibilidade de paradoxos, Tarski formulou sua definição de verdade, de qualidade semântica, por intermédio de recursos da metalinguagem, e ainda

> *Não há inconveniente em se cognominar a caracterização de Tarski de definição de verdade (como correspondência), desde que se tenha em mente não se tratar de definição em sentido estrito [...], formulada via noções mais simples e fundamentais; porém consiste em artifício lógico-matemático que individualiza extensionalmente a verdade em determinados contextos, particularmente apropriados para aplicações nos domínios abstratos da lógica e da matemática. (DA COSTA, 1999)*

Porém não basta apenas definir, Tarski nos lembra que

> *O que quer que seja alcançado construindo-se uma definição adequada de verdade para uma linguagem científica, um fato parece ser certo: a definição não carrega com ela um critério executável para decidir se sentenças particulares nesta linguagem são verdadeiras ou falsas (e de fato, não é sua intenção). (TARSKI, 1969)*

Se a busca da verdade é a essência da atividade científica, então o problema é procurar critérios no mínimo parciais de verdade e desenvolver procedimentos que nos permitam averiguar ou negar uma dada afirmação, e a noção de prova é um destes procedimentos (empregado principalmente nas ciências dedutivas), e também é um elemento essencial do famoso método axiomático.

Entra aqui, portanto, o importante papel da demonstração como um critério de verdade na matemática formal, e mais ainda, OMNÈS (1995) afirma que a verdade matemática é uma conseqüência do método axiomático. Antes de entrar no mérito da demonstração (ou prova formal) em matemática, vale fazer um histórico a esse respeito.

Uma Visão Histórica sobre o Método Axiomático e Demonstração em Matemática

A Matemática nem sempre foi o "mar de formalismo" como a conhecemos hoje. Milênios passaram sem que o método axiomático tivesse uso inerente ao desenvolvimento histórico da Matemática e foi a Grécia antiga o berço de tal método. Talvez tenha sido Tales de Mileto (séc. VII a.C.) o primeiro matemático a enunciar um teorema e prová-lo, mas faltam registros do fato. O que se tem, segundo Boyer(1994), é a tradição que diz que Tales possa ter aprendido seu teorema (que diz que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto) numa de suas viagens à Babilônia, sendo-lhe atribuída uma primeira demonstração. E por isso Tales foi saudado como o primeiro matemático da história.

Mas então qual era o critério usado antigamente para o estabelecimento da verdade na Matemática? Basicamente o critério de confiabilidade de regras e procedimentos e sua concordância com a realidade a que se destinavam. Admite-se que tal conhecimento era fruto da evidência física, da tentativa e erro, da analogia, do insight, da criatividade e principalmente da resolução de problemas dos matemáticos da época.

Então com Pitágoras de Samos (532 a.C.) a Matemática começa a ter uma natureza mais dedutiva. Proclus de Alexandria (410-485) contribuiu muito para a história da matemática grega em seu *Sumario Eudemiano*, relatou inclusive que a escola pitagórica foi responsável pela criação da matemática pura. Embora a escola pitagórica ajudasse no desenvolvimento da matemática dedutiva, Hipaso de Metaponto, que por acaso era um pitagórico, colaborou com o fim da escola. De acordo com os pitagóricos, todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados em termos das propriedades dos números inteiros positivos e suas razões, os *arithmos*. Hipaso demonstrou que tal afirmação era falsa, e apesar de não haver registros de como ele o fez, Aristóteles (séc. IV a.C.) diz que foi por redução ao absurdo e dá uma demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis[1], demonstração esta que pode ter sido a encontrada por Hipaso. A demonstração de Aristóteles é essencialmente a mesma que se dá hoje para provar que é irracional. (DOMINGUES, 2002)

Ainda na proximidade do tempo de Aristóteles, um matemático, também pitagórico, pode ter introduzido o método indireto de demonstração. Tal matemático foi Hipócrates de Chios, cujo teorema sobre as áreas de círculo parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego. Se, de fato Hipócrates deu a prova de seu teorema, ele pode ter introduzido o método indireto de demonstração na Matemática. Diz-se, a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados de seus diâmetros, ou não é. Por *reductio ad absurdum* a partir da segunda possibilidade, prova-se a única alternativa. (BOYER, 1994).

Os gregos já usavam a idéia de utilizar encadeamentos de propriedades articuladas por meio de raciocínio lógico para desenvolver a sua Matemática, porém nenhum dos matemáticos havia proposto algo parecido com o método axiomático, ou o próprio método. Até que no século III a.C., surge *Os Elementos* de Euclides, um compêndio de treze livros tratando de diversos assuntos da Matemática. Euclides utilizou um método dedutivo em que todos os objetos eram definidos, e ainda

> *o objetivo de Euclides não era apenas apresentar formalmente os objetos iniciais de seu discurso, mas também garantir que eles correspondiam a uma realidade ligada à experiência e expectativa do leitor. Os postulados que se seguiam, por sua vez, tinham um caráter de auto-evidência. (DOMINGUES, 2002)*

Cabe colocar a nota do autor de que, em especial, o postulado V (“Se uma reta corta duas outras de um plano formando, em um dos lados, ângulos interiores cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas indefinidamente, cortar-se-ão no lado em que isso acontece”) não tinha esse caráter de auto-evidência (*ibidem*, 2002).

Este tipo de axiomática, que tinha um sentido prático, é feita para que se faça o outro crer, calcada de certa forma na evidência e na experiência, são conhecidas como *axiomáticas materiais*.

Mas a obra de Euclides não era perfeita, ele algumas vezes usou de postulados que não foram definidos anteriormente, o que de alguma maneira violava os princípios do método axiomático por ele proposto. O que não tira a grandiosidade da obra de quatrocentas e sessenta e cinco proposições, que pode ter sido o livro mais estudado do mundo, depois da Bíblia. Como diz Domingues, é um grande monumento matemático e o primeiro grande testemunho do poder do método dedutivo na Matemática.

As demonstrações passaram por um período obscuro de transição na Idade Média e no Renascimento, com a Matemática passando por um surto de desenvolvimento, mas as novas áreas, sob o ponto de vista do rigor, não satisfaziam nem mesmo seus criadores (por exemplo, Descartes (1596-1650) que valorizava o método axiomático-dedutivo não o usou em sua única obra matemática, *A geometria*).

E não foi só Descartes, podemos também citar um dos criadores do cálculo, Isaac Newton (1643-1727), que fez três tentativas de passar suas idéias a limpo, sem ser convincente rigorosamente. Não que estejamos tirando o crédito de tais cientistas, eles foram importantíssimos para o desenvolvimento da Matemática que hoje conhecemos. O que faltava ainda era uma solidificação dos fundamentos da Matemática, algo que servisse de alicerce.

A visão da Matemática que foi predominante no começo do século XIX era a do filósofo Immanuel Kant (1711-1776), que acreditava no apriorismo matemático (principalmente do conhecimento geométrico), ou seja, argumentava que as proposições geométricas tratavam de um conhecimento universal que não comportava exceção, e além disso, são independentes da experiência e se fundamentam na razão.

1 Os *atithmos* não bastavam, por exemplo, para comparar um lado de um quadrado com a sua diagonal, e por isso os segmentos eram chamados de incomensuráveis. (BOYER, 1994)

Ainda no séc. XIX, a demonstração deixa de ter um caráter material (que a caracterizava como uma atividade intelectual com o objetivo de convencer racional e psicologicamente) com Frege, que conceituou a demonstração formal.

No final do mesmo século, surgem a geometria não euclidiana e as álgebras não convencionais, e ainda antes deste período, noções como a álgebra linear já haviam sido axiomatizadas. Houve então a necessidade de buscar fundamentos para a geometria, e de todas as tentativas, a mais bem sucedida foi a do matemático alemão David Hilbert (1852-1943) em seu *Grundlagen der Geometrie* de 1899. Neste trabalho, Hilbert desenvolveu toda a teoria assumindo três conceitos primitivos; ponto, reta e plano, definindo as relações entre eles única e exclusivamente por meio de axiomas. Ou seja, com ele, os axiomas deixaram de representar apenas traços auto-evidentes. Segundo DA COSTA (1992), neste método axiomático de Hilbert "escolhe-se certos números de noções e de proposições primitivas, suficientes para sobre elas edificar a teoria, aceitando-se outras idéias ou outras proposições só mediante, respectivamente, definições e demonstrações."

Foi então que surgiu o formalismo para destituir de vez qualquer conotação material da matemática. Hilbert, o pai do movimento, queria, da mesma forma que fez com a geometria, encontrar axiomática para as outras partes da matemática. Chegou a criar, juntamente com sua escola, a teoria da demonstração para estabelecer a consistência de qualquer sistema formal. Porém em 1931, Kurt Gödel (1906-1978) provou que esta era uma tarefa impossível.

Hoje, prevalece soberanamente a visão formalista da Matemática, com o sistema Z-F sendo seu principal alicerce (um sistema axiomático que possibilitou a construção dos números naturais e de toda a análise clássica, Z de Zermelo e F de Freankel). Mas, como diz DOMINGUES (2002), para o constrangimento dos mais puristas, eis que surge um estranho no ninho no terreno da demonstração matemática: o computador.

O computador trouxe uma vasta possibilidade de desenvolvimento da matemática, sob a ótica de diversas aplicações e novos processos de investigação. E não tardaria que este entrasse no campo das demonstrações, quando na década de cinquenta, um computador foi programado para provas alguns teoremas do *Principia Mathematica* de Russel.

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, publicaram uma demonstração para a conjectura das quatro cores[2], em que os cálculos essenciais foram feitos por computador. Um trabalho que gerou controvérsias, pois se a demonstração depende da crença de que os computadores fazem o que supostamente devam fazer, o que aproxima o conhecimento matemático do conhecimento vulgar, podendo parecer que há uma certa degradação do grau de certeza, que viola a própria natureza da matemática. (PONTE *et al*., 1997).

Vale acrescentar aqui que, no final das contas, o ápice do pensamento lógico-formal não pode se abster de olhar para o empírico, e isso mostra que a linguagem matemática está muito relacionada com as ciências empíricas.

A Prova Formal

Mas afinal de contas, o que é a prova formal? Segundo TARSKI (1969), uma prova formal de uma sentença dada consiste na construção de uma seqüência finita de sentenças tal que (i) a primeira sentença é um axioma, (ii) as sentenças consecutivas são ou axiomas ou são dedutíveis diretamente das precedentes da seqüência, e (iii) a última sentença é o que se pretende demonstrar.

2 O problema das quatro cores consiste em demonstrar que qualquer mapa, numa superfície plana ou numa esfera, pode ser colorido sem utilizar mais de quatro cores diferentes. A única exigência, é a de que quaisquer dois países com uma fronteira comum não tenham a mesma cor. (DAVIS e HERSH *apud* PONTE *et al*., 1997)

Uma metáfora interessante é feita por OMNÈS (1996). Imaginemos que o universo e discurso das teorias formais da matemática seja um campo imenso repleto de inúmeras árvores que são outras tantas proposições possíveis. A água da verdade tem sua fonte exatamente onde ficam algumas árvores principais, os axiomas. As regras da lógica estabelecem uma malha de inúmeros canais que vão de uma árvore a outra, irrigando-as.

> *Como o cálculo das proposições permite combinar de múltiplas maneiras as proposições, para, a partir delas, formas um grande número de outras, e como a lógica permite deduzir o valor de verdade de certas proposições é conhecida, a verdade vai brotar da fonte dos axiomas para ir aos outros regando o campo das proposições. Uma proposição cuja verdade é estabelecida dessa maneira é chamada de teorema. É preciso admitir que esse talvez seja um nome belo e imponente demais para proposições cuja maior parte é carente de qualquer interesse para nós, mas, de qualquer forma, estão entre elas os teoremas que julgamos dignos do nome que têm. Só o que importa é que possamos dizer que são verdadeiros. Temos certeza disso a partir do instante em que balizamos uma cadeia de deduções lógicas, um canal que recebe a verdade na fonte dos axiomas e a transporta até esse teorema. O estabelecimento de uma tal verdade é uma demonstração. (*OMNÈS*, 1996)*

Mas não basta permanecer somente na esfera da definição de prova formal, ou demonstração. Devemos também considerar outros fatores. Por exemplo, DA SILVA (2002) enumera três aspectos da demonstração em matemática: o retórico, o lógico-epistemológico e o heurístico.

Segundo o autor, o aspecto lógico-epistemológico mostra as demonstrações como objetos lógicos ideais, árvores ou seqüências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou conseqüência lógica. Ainda diz que este modo privilegia exclusivamente seu aspecto lógico, que depende da forma, não do conteúdo.

De acordo com o aspecto retórico, as demonstrações "aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas" (DA SILVA, 2002). Este depende essencialmente do sujeito, pois cabe a ele a decisão de que a prova foi convincente, ou não.

O aspecto heurístico classifica as demonstrações como potenciais indutoras de descoberta matemática, considerando principalmente a perspectiva do falibilismo matemático, que concebe que "apenas quando abre o flanco a contra-exemplos, uma demonstração pode induzir ao progresso matemático." (*ibidem.*, 2002). E além disso, considera que só é possível representar tal aspecto com a explícita participação do sujeito, fazendo com que ele se mova a reagir a ela, aceitando seu desafio.

O autor enumera estes aspectos, concluindo que se as demonstrações são entidades que existem objetivamente no espaço lógico de um sistema formal determinado, ou estruturas ordenadas existentes em si de proposições logicamente encadeadas, então não há espaço para um sujeito. E o sujeito é justamente aquele que deve ser convencido por ela.

CONCLUSÃO

BICUDO (2002) aponta que existem dois significados para a demonstração matemática: o significado 1, prático (informal, impreciso, que se faz para o outro crer nos teoremas, que ninguém pode dizer o que é) e o significado 2, que a demonstração matemática é formal. Surgem então alguns problemas:**Problema A**: O que o significado 1 tem a ver com o significado 2? **Problema B**: Por que tão poucos notam o Problema A? É desinteressante? Embaraçante? **Problema C**: Isso Importa?

> *O problema C é mais fácil do que A e do que B. Importa, moralmente, psicologicamente e filosoficamente. Quando se é estudante, os professores e os livros demonstram coisas. Porém, não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que aprender. Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa. Depois, o indivíduo torna-se um*

professor e passa o mesmo know-how, sem o saber o quê, que o professor ensinava. (BICUDO; 2002)

No mesmo artigo ele destaca que definir o que é a demonstração matemática é um problema epistemológico difícil. Se conhecemos o seu desenrolar à partir da História da Matemática, conhecemos sua estrutura formal e lógica, convivemos intensamente com muitas demonstrações, mas em nenhum momento nos preocupamos com a questão "o que é demonstração em matemática?". É por esta razão que achamos imprescindível o estudo histórico-filosófico dos métodos matemáticos para uma compreensão tão plena quanto se possa da Ciência que se estuda. E mais importante, o ensino da matemática não pode se render aos dogmatismos, como um fim em si mesmo, pois a atividade matemática, segundo KLINE *apud* GARNICA (2002), tem um primado que "é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas."

Referências

BICUDO, I., Demonstração em Matemática, *Bolema*, Ano 15, n°18: 79-90,2002

DA COSTA, N.C.A., *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. São Paulo: EDUSP, 1992.

DA COSTA, N.C.A., *O Conhecimento Científico*, 2a. ed., São Paulo: Discurso Editorial, 1999.

DA SILVA, J.J., Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. *Bolema*, Ano 15, nº 18: 68-78, 2002.

DA SILVEIRA, L.F.B., Peirce e a Matemática, *Bolema*, Ano 9, especial 3: 55-65, 1994.

DOMINGUES, H.H., A Demonstração ao Longo dos Séculos, *Bolema*, Ano 15, n° 18: 55-67, 2002.

ERNEST, P., *The Philosophy of Mathematics Education.* London, New York, Philadelphia: The Falmer Press 1991.

GARNICA, A.V.M.G., As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, Ano 15, nº 18: 91-122, 2002.

GARNICA, A.V.M.G., *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. Rio Claro: Unesp, 1995. (Tese de Doutorado)

MACHADO, N.J., *Matemática e Realidade*, São Paulo: Cortez Editora, 1987.

OMNÈS, R., *Filosofia da Ciência Contemporânea*, tradução de Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Ed. Unesp, 1996.

PONTE, J.P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M. ABRANTES, P. *Didáctica da Matemática*. DES do ME. Lisboa, 1997

TARSKI, A., Truth and Proof, *Scientific American*, 220: 63-70, 75-77, 1969.