UMA APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL NAS CIÊNCIAS BIOLÓGICAS: A EQUAÇÃO LOGÍSTICA E O CAOS

AN APLICATION OF DIFFERENTIAL CALCULUS IN BIOLOGICAL SCIENCES: THE LOGISTIC EQUATION AND THE CHAOS

Lilian Akemi Kato [1]
Marta Bellini [2]

[1]Universidade Estadual de Maringá/DMA/lilianakato@hotmail.com
[2]Universidade Estadual de Maringá/DFE/martabellini@uol.com.br

Resumo

O ensino de Cálculo Diferencial para estudantes do Curso de Ciências Biológicas pode se dar pela descoberta da importante e interessante relação entre a Matemática e a Ecologia. Biólogos e matemáticos podem relacionar alguns de seus objetos de estudo por meio do estudo da equação logística, pela qual é possível estimar a dinâmica das populações e suas alterações imprevisíveis. O modelo logístico discreto é um exemplo bastante simples de equação de diferenças não lineares, e que apresenta uma complexidade de resultados dependendo dos valores atribuídos ao seu parâmetro. Este trabalho apresenta uma metodologia para o ensino do Cálculo Diferencial, utilizando o tema dinâmica de populações, onde as relações estabelecidas, entre os conceitos matemáticos envolvidos e o fenômeno biológico, servem como base para uma reflexão crítica acerca do problema, bem como as respectivas implicações biológicas decorrentes do estudo da equação logística.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial, equação logística, dinâmica de populações, caos

Abstract

The teaching of Differential Calculus to students of Biological Science Course may happen through the discovery of important and interesting relation between Mathematics and Ecology. Biologists and mathematicians may relate some of their case study through the study of logistic equation, in which is possible to estimate the population dynamics and their unexpected alterations. The discrete logistic model is a quite simple example of nonlinear difference equation, and it shows a complexity of results according to the values attributed to its parameters. This assignment presents a methodology to the teaching of Differential Calculus using the population dynamics as a theme, in which the relations established between the mathematical concepts involved and the biological phenomenon serve as a basis for a critical reflection about the problem, as well as the respective biological implications decurrent from the logistic equation.

Keyword: Differential Calculus, logistic equation, population dynamics, chaos.

INTRODUÇÃO:

A disciplina Cálculo Diferencial é parte integrante da formação básica para os alunos do curso de Ciências Biológicas, e tem como objetivos o desenvolvimento das habilidades de raciocínio lógico e a utilização dos conceitos e ferramentas da Matemática no estudo de diversos fenômenos com características biológicas.

No entanto, o que se observa entre a maioria dos estudantes de Ciências Biológicas é um grande desinteresse pelo estudo do Cálculo o que acarreta em um alto índice de desistência e reprovação. Um dos fatores que contribui para o este desestímulo em relação a esta disciplina está na forma estanque e desvinculada do contexto biológico como os temas do Cálculo são tratados na sala de aula.

A área de Ciências Biológicas oferece uma riqueza de exemplos e situações reais que podem ser modelados por meio da Matemática, utilizando os conceitos do Cálculo na sua caracterização.

A interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Biologia contribui significativamente para a formação científica do estudante uma vez que a Matemática se insere no contexto biológico como uma linguagem para descrever os fenômenos naturais.

D'AMBROSIO (1986, p. 64) nos fornece algumas reflexões acerca da importância desta interação. Segundo ele:

> Como se dá esse fenômeno que distingue o homem de outros animais: a capacidade de analisar uma situação global e tirar, de uma quantidade de conhecimentos acumulados por ele e por todas as gerações que o precederam no curso de cerca de 10.000 anos de humanidade, os instrumentos de que necessita para não só compreender o fenômeno, mas, se possível, agir sobre ele? E se não puder agir sobre o contexto em que ele está inserido, pelo menos ter consciência de sua posição? Essa característica única da espécie humana deve ser cultivada, estimulada, auxiliada pelo processo educacional, e não estrangulada pela ministração de conteúdos programáticos, disciplinares, motivados pelo próprio conteúdo programático das várias disciplinas .

Destaca-se nesta citação a importância de apresentar e discutir com os estudantes as possibilidades que a Matemática oferece para um melhor entendimento do problema podendo com isso fazer inferências ou previsões.

Nos últimos anos muitas pesquisas em Ciências Biológicas estão fundamentadas e argumentadas pelas teorias matemáticas e computacionais, assim deve-se pensar em mecanismos para diminuir a barreira existente entre a Matemática e as Ciências Biológicas quando se almeja a formação qualificada de um pesquisador nesta área e principalmente um educador de Ciências.

No caso particular dos modelos matemáticos em dinâmica de populações, estes descrevem a quantidade de indivíduos de uma população ao longo do tempo, para tanto eles são construídos a partir das informações biológicas que são transformadas em hipóteses matemáticas que alimentam o modelo.

A equação logística, bastante conhecida no meio acadêmico da Biologia, oferece inúmeras oportunidades para o desenvolvimento de ações tanto do professor quanto do estudante, que favorecem a construção de significados de conceitos biológicos e matemáticos.

O conceito matemático utilizado nesta equação é o de equação de diferenças e por meio das ferramentas matemáticas, existentes para o estudo deste assunto, é possível identificar algumas complexidades do fenômeno até então não detectadas experimentalmente: o fenômeno do caos.

A EQUAÇÃO LOGÍSTICA E SUAS APLICAÇÕES EM DINÂMICA DE POPULAÇÕES:

Em Ciências Biológicas o tema dinâmica de populações é um assunto bastante amplo e complexo por envolver diversos aspectos inerentes à própria espécie, que se está estudando, ou ao meio no qual ela vive. Nesse sentido, uma espécie sobrevive e propaga por conseqüência de inúmeros fatores bióticos ou abióticos que agem sobre o seu processo reprodutivo. Dependendo das mudanças em alguns desses fatores, ou ainda por outra interferência externa, uma espécie pode ir à extinção ou tornar-se superpopulosa.

Uma representação matemática de todos esses diversos elementos que influenciam na taxa de crescimento de uma população, tornaria este modelo inviável de ser trabalhado pela quantidade numerosa de parâmetros e variáveis envolvidos.

Assim a construção de um modelo matemático parte da premissa do que se deseja observar e consequentemente do que é preciso observar para a determinação dos parâmetros e variáveis que são essenciais para a descrição do problema (FERREIRA JR.).

A equação logística apresentada por Pierre François Verhulst no seu trabalho, "Notice sur la loi que la population suíte dans son accroissement", parte do argumento de que o crescimento de uma população está sujeita as flutuações causadas por diversos fatores, bióticos ou abióticos. Assim, as taxas de natalidade e mortalidade variam em função da própria densidade populacional. Em termos biológicos, isto significa que se a população aumentar acima de um nível sustentável, a própria espécie se utiliza de mecanismos próprios que faz com que a população reduza a taxa de reprodução; e se a população estiver num nível abaixo deste limite, então ela aumenta a taxa de reprodução.

Já no século XIX, Verhulst avaliava que a taxa de crescimento de uma população deve ser proporcional ao desvio entre a população atual e o valor máximo que a população pode alcançar. Em termos qualitativos: populações próximas do máximo prenunciavam uma redução e, populações distantes do máximo significavam a chegada de muitas "caras" novas. Nesse sentindo, a taxa de crescimento intrínseca da população, r, para Verhulst, não poderia ser constante, mas passa a ser dado em função de N_t : $r = r\,(1- N_t/K)$, onde K é a população máxima suportável, N_t a população atual e r é um número entre zero e quatro.

$$N_{t+1} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \qquad (1)$$

Em termos biológicos, a equação logística apresenta duas características importantes em dinâmica de populações: o termo rN_t que representa o crescimento populacional quando esta se encontra em condições totalmente favoráveis para sua reprodução, ou ainda quando a densidade populacional está abaixo da sua capacidade suporte; e o termo $\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$ que representa o efeito da superpopulação na regulação da densidade populacional. Quando N_t torna-se maior do que K teremos que $\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$ torna-se negativa o que implica que a população diminui.

Em termos geométricos, a segunda expressão do lado direito da equação (1) é representada por uma parábola com concavidade para baixo, com zeros em $N_t = 0$ e $N_t = K$, e que atinge seu máximo no ponto $\left(\frac{K}{2}, \frac{rK}{4}\right)$ como podemos ver na Figura 1. Neste caso, como $N_{t+1} < 0$ para $N_t >$ K devemos impor a condição de que $0 \leq r \leq 4$ para que se tenha sempre $N_t < K$.

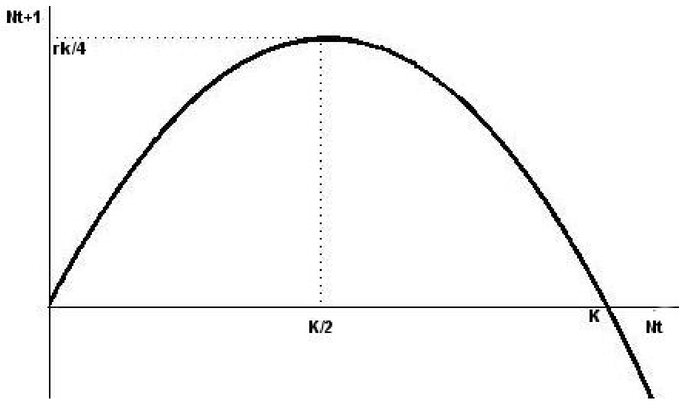

Figura 1: Gráfico da função $rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$

Observa-se também que para $N_t < K$ existe uma diferença qualitativa quanto a $Nt < K/2$ e $N_t >$ K/2, isso decorre do fato que a parábola é crescente para $N_t < K/2$ e decrescente para $N_t > K/2$. Considerando a equação (1) e tomando-se $0 \leq r \leq 4$, pode-se observar fatos bastante interessantes em relação à variação da densidade populacional.

O CAOS NA EQUAÇÃO LOGÍSTICA:

Uma experiência importante na história da equação logística foi realizada por Alexander John Nicholson (1895 - 1969), entomólogo australiano, que trabalhou como Chefe da Divisão de Entomologia Econômica no Conselho para Pesquisa Científica e Industrial - CSIR - entre 1936 a 1960. Sua reputação deveu-se às atividades com controle biológico, taxonomia, ecologia, fisiologia, bioquímica e toxicologia. Tornou-se um sério pesquisador na área de dinâmica das populações de insetos.

Nicholson trabalhou com moscas-varejeiras, *Lucilia cuprina*, cujo ciclo é de 38 dias. Alimentou suas moscas com uma dieta de proteínas, uniforme e restrita. Quando a população estava muito grande, o alimento tornava-se insuficiente para que a procriação continuasse normal: poucos ovos eram postos e a população caía drasticamente. A população resultante, bastante reduzida, tinha alimento com fartura e voltava a crescer.

Para explicar a dinâmica dessa população estabeleceu três fases distintas: regularidade, periodicidade (oscilações previsíveis) e caos (neste experimento as oscilações tornaram-se caóticas após 450 dias). De início, com população pequena, o crescimento é regular até atingir um ponto de saturação (população máxima suportável). Num segundo momento ela passava a oscilar com regularidade e, finalmente, a dinâmica passa a ser caótica.

Se tomarmos a equação: $N_{t+1} = rN_t (1 - N_t /K)$, podemos supor, por exemplo, que o limite suportável (espaço + alimentação) fosse uma população de K=1000 moscas-varejeiras. O termo N/K representa a relação entre população atual e o limite suportável (isto é, o resultado da divisão da população atual pelo limite). Considerando-se uma população de 790 moscas, divide-se 790 por 1000, o resultado é 0,79: isto é, o termo N/K vai ser substituído por 0,79.

Se pensarmos do ponto de vista qualitativo ou lógico a população, cuja dinâmica populacional é governada por uma equação de diferenças, estará em equilíbrio quando $N_{t+1} = N_t$ o que significa que a população não está variando. Para a equação (1) temos que isto ocorre quando $N_t = K/2$, como pôde ser observado na Figura 1.

Assim, quando a população se aproxima de K/2 o termo (1 – N/K), na equação (1), se aproxima de 1/2. Assim teremos que N_{t+1} se aproxima de $(r/2)N_t$. Portanto a população fica sendo governada pelo valor de r que caracteriza a reprodução.

Para valores de r entre 0 e 3, considerando este experimento de Nicholson, iniciando com um número pequeno (200) de moscas: a população vai crescendo até encontrar um nível de estabilização. Por exemplo, para r = 2 tem-se a seguinte seqüência de para a densidade populacional: 200, 320, 435, 491, 509, 499 (ficando na vizinhança de 500), conforme pode ser visualizado na Figura 2.

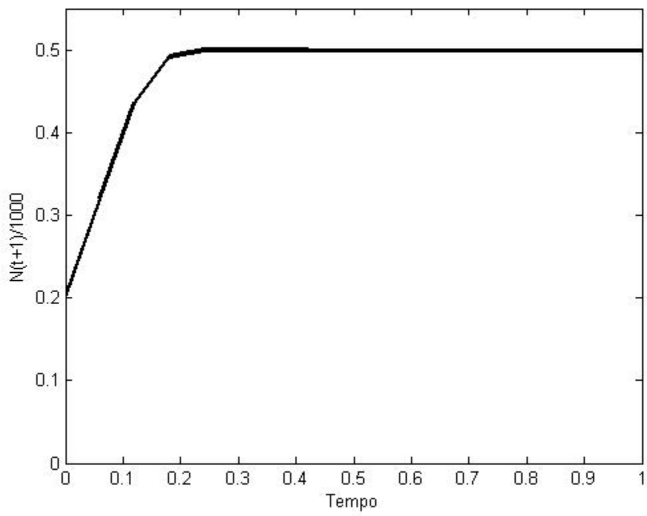

Figura 2: Solução da equação logística para r = 2, K = 1000 e N_0 = 200

Quando r é maior que 3, a dinâmica do sistema muda. Por exemplo, se r = 3,2 a população oscila entre dois números: 512 e 800, ou seja, a densidade populacional repete, de duas em duas temporadas. A Figura 3 ilustra a solução obtida neste caso começando com 200 moscas.

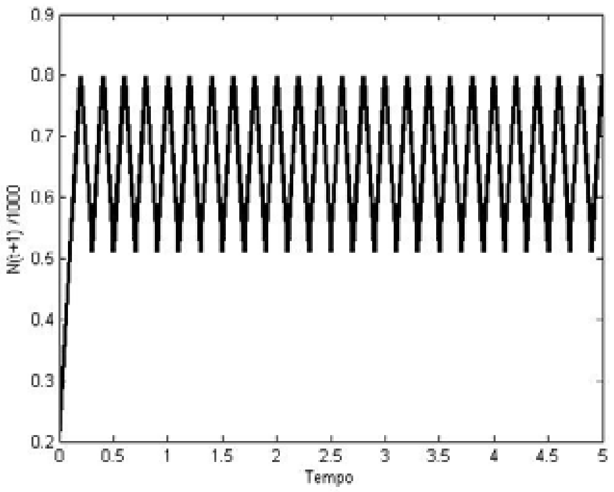

Figura 2: Solução da equação logística para r = 3,2, K = 1000 e N_0 = 200

Para r = 3,5 a população agora vai oscilar entre 4 números: 383, 827, 500 e 875, ou seja, de quatro em quatro temporadas, a densidade populacional repete novamente, como pode-se observar na Figura 3.

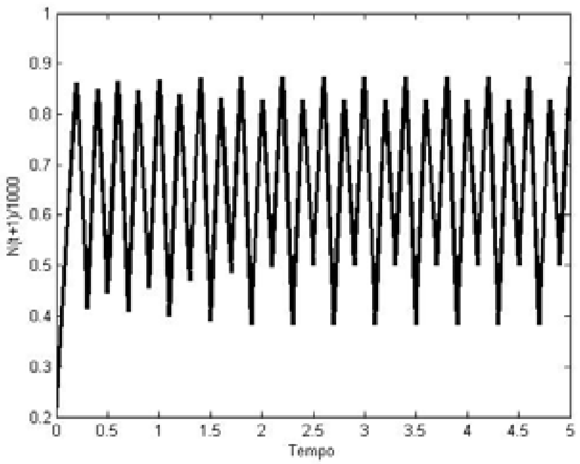

Figura 3: Solução da equação logística para r = 3,5, K = 1000 e N_0 = 200

Quando r alcança valores próximos de 4 o sistema entra em regime caótico. Por exemplo, se considerar r = 3,8 e novamente 200 moscas: a seqüência ficaria assim: 200, 608, 906, 324, 832, 531, 946, 194, 594, ou seja, não temos uma seqüência previsível, o sistema comporta-se de maneira caótica, como pode ser observado na Figura 4.

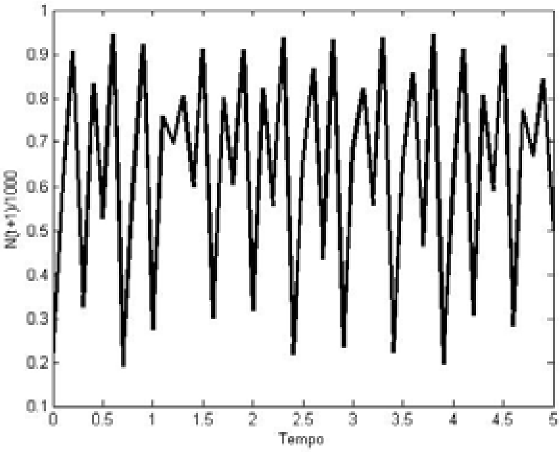

Figura 4: Solução da equação logística para r = 3,8, K = 1000 e N_0 = 200

Esta análise matemática da equação logística nos apresenta um modelo para a dinâmica populacional complexo e muito abstrato e que, no entanto, está mais próximo da realidade empírica que qualquer modelo linear.

Este modelo não nos dá as respostas que gostaríamos de obter: simplesmente fornece um mapa de possibilidades, um mapeamento. Trata-se de uma população em condição (quase) natural que podemos pensar como um sistema aberto que tem uma história. O que estamos dizendo é que o modelo matemático criado por Verhulst e utilizado por MAY (1992) e sua modelagem matemática em sistemas talvez fique sempre em nível de mapeamentos teóricos, porém nos conduz a uma série de indagações importantes a cerca de um fenômeno que a princípio não pode ser observado naturalmente..

Disso decorre um problema próprio da nossa cultura científica. Nossa cultura científica enxerga a matematização como ferramenta que nos fornece respostas – de preferência únicas – para situações quantificáveis. No entanto, a equação logística tem um caráter absolutamente diferente: ela permite fazermos mapeamentos em um território imenso.

O r funciona, nas palavras de STEWART (1991), como uma espécie de botão de uma caixa preta. Conforme fazemos r variar vamos descobrindo facetas do comportamento possível do sistema. Quando r está entre zero e três o sistema permanece estacionário e, no entanto, para r entre 3 e 4 o sistema pode ou oscilar entre 2, 4, 8, 16, ... valores ou tornar-se caótico, e o mais impressionante disso é que pequenas variações, da ordem de 10^{-2}, em r podem provocar mudanças abruptas na dinâmica populacional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A compreensão da não-linearidade dos fenômenos que nos cercam é hoje uma ferramenta intelectual de suma importância. STEWART (1991, p.28) diz que é difícil esta compreensão porque em nosso mundo científico prevalecem as previsões, as certezas e um consenso cognitivo:

[...] tudo isso me deixa muito desgostoso com os cosmólogos que afirmam já conhecerem as origens do Universo, tudo bem arrumadinho... E com os políticos, que não apenas nos asseguram que uma boa dose de monetarismo nos fará bem, como estão tão convencidos disso que pensam que alguns milhões de desempregados representarão apenas um inconveniente insignificante. O ecologista matemático Robert May expressou sentimentos similares em 1976. “Não apenas em pesquisas, mas no dia-a-dia da política e da economia, estaríamos todos em melhor situação se um maior número de pessoas se desse conta de que sistemas simples não possuem necessariamente propriedades dinâmicas simples”.

Isto significa que, para nós, a equação logística é também uma ferramenta filosófica, é um modo para passar por outros mundos, para se fazer perguntas, para se descobrir mais sobre dinâmicas não-lineares. É uma renúncia ao mundo simplificado quando, por exemplo, tratamos de populações com a solução simplista de um crescimento regular e sempre previsível.

Em síntese, o tema dinâmica das populações, por ser constituído por uma teia de variáveis (próprias de um sistema aberto) é um objeto bastante complexo que pode ser interpretado e analisado com ferramentas básicas do Cálculo Diferencial que é do conhecimento dos alunos do curso de Ciências Biológicas.

Todos esses questionamentos levam o estudante à reflexão e, consequentemente, à construção de significados dos conceitos matemáticos, vistos no Cálculo Diferencial, com ênfase nos problemas da natureza. Esta análise crítica requer uma outra postura tanto do aluno quanto do professor no que se refere à abordagem do tema.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. São Paulo: Editora Interciência, 1978.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e Matemática**. Campinas-SP: Editora Summus, 1996.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. New York: Random House, 1988.

FERREIRA JR. W. Dinâmica de populações: de angstroms a quilômetros, de ions a “sapiens”. Disponível em: ‹http://www.comciencia.br/reportagens/modelagem/mod16.htm>. Acesso em: 30 jul. 2007.

MAY, R. Revista Ciência Hoje. Sociedade Brasileira Para o Progresso da Ciência. Edição e tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Março/abril de 1992.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**. New York: Springer,1989.

STEWART, I. **Os problemas da matemática**. Portugal: Gradiva, 1991.

WADDINGTON, C. H. **O homem e a Ciência:** instrumental para o pensamento. São Paulo: Ed. Itatiaia, 1979.