

Parte IV
Relatividade Restrita

Capítulo 9

Princípios da Relatividade

Conteúdo

9.1	Breve Interlúdio	108
9.2	Relatividade da Mecânica de Newton: Transformações de Galileu	108
9.3	Princípio da Relatividade: Transformações de Lorentz	113

9.1 Breve Interlúdio



teoria da relatividade restrita está baseada sobre dois princípios simples que, como veremos, levaram a importantes conseqüências físicas: as leis da física são sempre as mesmas em todos os referenciais inerciais (princípio da relatividade); a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

A mecânica de Newton sempre foi uma teoria relativística, no sentido de que as leis da mecânica permanecem sempre as mesmas em qualquer referencial inercial, possuindo a relatividade das transformções de Galileu. Einstein introduziu a idéia revolucionária, mas que tem se mostrado correta até hoje, que toda a física é de fato relativística, possuindo a relatividade das tranformações de Lorentz.

Veremos durante essa parte do curso como esses dois princípios da Relatividade Restrita ou Especial nos levam a modificar a mecânica, de forma que ela passe a ser válida em todos os referenciais inerciais da mesma forma que o eletromagnetismo já o era, por construção.

9.2 Relatividade da Mecânica de Newton: Transformações de Galileu

Pergunta: Como dois observadores em referenciais inerciais medem um comprimento e um intervalo de tempo dados? Na mecânica newtoniana, as medidas de intervalos de tempo e espaço são absolutas, de acordo com as transformações de Galileu.

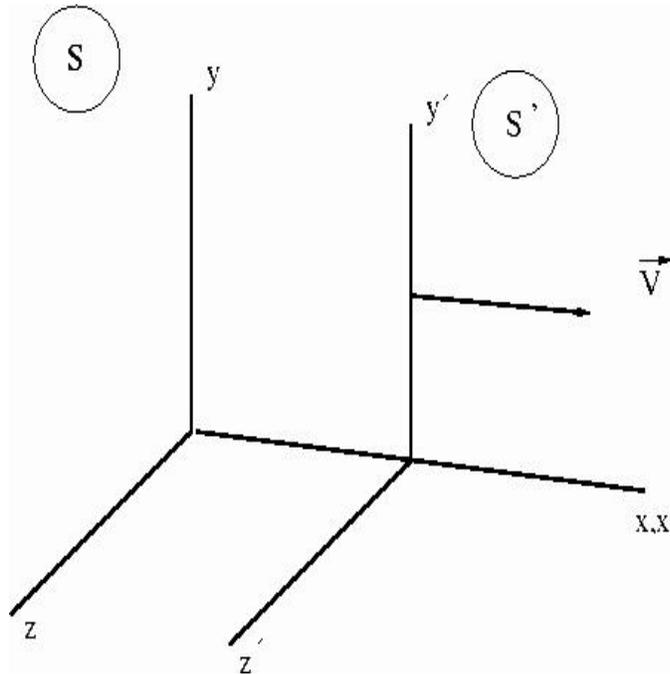


Figura 9.1: Esquema de um sistema de coordenadas Cartesiano inercial S e um sistema de coordenadas do mesmo tipo S' que se move com velocidade \vec{V} em relação a S . Referenciais padrão.

Seja S um sistema de coordenadas cartesiano inercial, e S' um outro sistema de coordenadas cartesiano do mesmo tipo, que se move com velocidade \vec{V} em relação ao primeiro (escolhemos \vec{V} na direção de x). Chamaremos esse conjunto de referenciais, descrito pela Fig. 9.1, de referenciais padrão.

Desejamos comparar as medidas de tempo e distância por um observador ligado ao sistema S' , com as de um observador em repouso no sistema S .

Suponhamos que nossos dois observadores construam relógios idênticos. O observador em S distribui seus relógios ao longo do eixo x e os ajusta de modo que todos indiquem uma mesma hora. Podemos agora comparar as leituras dos relógios em S' com os relógios 1,2,3 em S , à medida que cada um deles passa pelo relógio em S' (veja Fig. 9.2).

Se tal experiência for feita com relógios macroscópicos reais, estaremos, por razões práticas, restritos a uma velocidade $|\vec{V}| = V$ para S' da ordem de 10^6 cm/s (velocidade típica de um satélite). Neste regime, $V/c \ll 1$ e a experiência confirma que, se o relógio de S' for ajustado para concordar com o relógio 1, ele concordará com os relógios 2,3,4...

$$t' = t \quad \leftarrow \text{hipótese .}$$

Intervalos de tempo lidos em S' são iguais a intervalos lidos em S .

Considere agora dois referenciais cartesianos, como mostra a Fig. (9.3), admitindo que em $t = t' = 0$ temos $x = x' = 0$. Suponha que um **evento** * (colisão de 2 partículas por exemplo) tenha coordenadas (x, y, z, t) relativamente a um observador (parado) na origem de S e (x', y', z', t') relativamente a um observador (parado) na origem de S' . A relação entre estes dois conjuntos de coordenadas é dada pela transformação de Galileu, uma vez que vt é a distância percorrida da origem espacial.

*Um evento físico é algo que acontece num ponto do espaço e num instante de tempo, independente do sistema de referência que usamos para descrevê-lo.

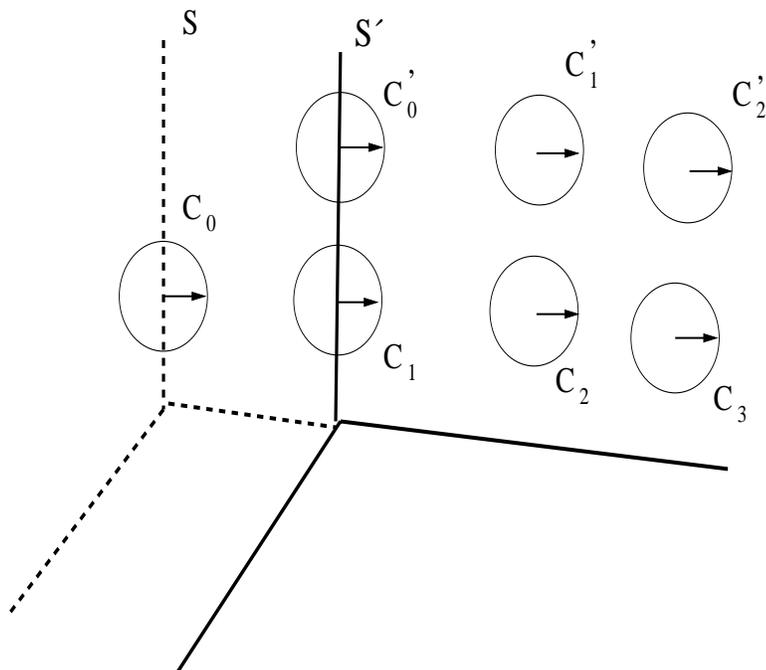


Figura 9.2: Esquema dos relógios C_i ($i = 0, 1, 2, 3$) sincronizados no referencial S e dos relógios C'_i ($i = 0, 1, 2$) sincronizados no referencial S' .

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (9.1)$$

onde a última relação expressa a universalidade do tempo, ou seja, o tempo é absoluto, independente do referencial.

Diferenciando (9.1) com relação a $t = t'$ leva imediatamente à transformação clássica de velocidades, que relaciona as componentes da velocidade de uma partícula no referencial S com suas componentes no referencial S' :

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 - v \\ u'_2 = u_2 \\ u'_3 = u_3 \end{cases} \quad (9.2)$$

Vemos que uma partícula em repouso em S tem movimento retilíneo e uniforme em S' . Uma partícula que se move com velocidade constante em S também se move com velocidade constante em S' .

Não somente a 1^a como a 2^a e a 3^a leis de Newton são válidas em todos os referenciais inerciais. Vemos que, derivando novamente a Eq. (9.2) em relação a $t = t'$, obtemos

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_2 \\ a'_3 = a_3 \end{cases} \quad (9.3)$$

Aceleração é invariante pelas transformações de Galileu. Desta forma, as leis de Newton e as equações de movimento da mecânica permanecem exatamente as mesmas em

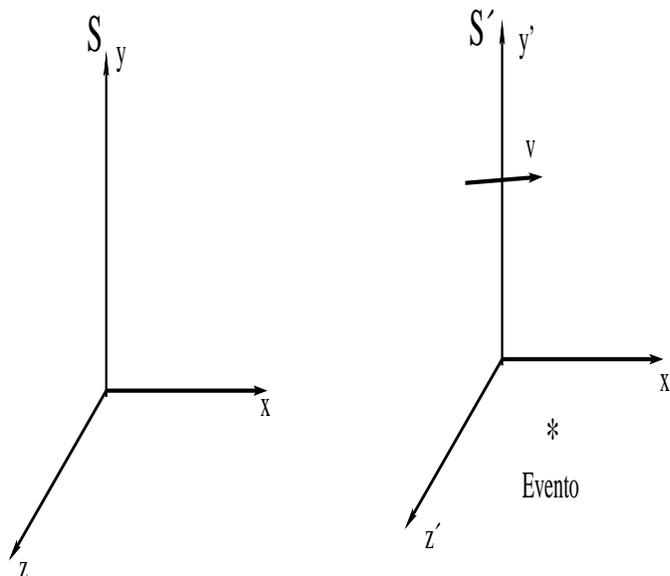


Figura 9.3: Esquema de dois referenciais Cartesianos, o referencial S e o referencial S' movendo com velocidade v na direção x em relação a S e um evento visto por estes dois referenciais.

qualquer referencial inercial. A invariância das leis da mecânica leva à *covariância* de suas equações, o que significa que as equações da mecânica terão a mesma forma em qualquer referencial inercial.

A relatividade da mecânica newtoniana significa que nenhum experimento mecânico, realizado inteiramente em um sistema de referência inercial, pode dizer ao observador qual o movimento do sistema em relação a qualquer outro sistema inercial. Comparando medidas entre dois sistemas diferentes, podemos falar da velocidade relativa de um em relação ao outro, mas não de uma velocidade absoluta do sistema.

★ **Demo:** Interferômetro de Michelson e Morley

E o resto da física? Em especial, seria o eletromagnetismo também invariante por transformações de Galileu? Na teoria eletromagnética aparece uma constante c , com dimensão de velocidade, que foi definida originalmente apenas a partir de grandezas eletromagnéticas, e que pode ser determinada por experiência de laboratório. A teoria previa a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo com velocidade c . Vejamos como as transformações de Galileu não preservam a forma da equação de onda do eletromagnetismo.

Se em S temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \quad (9.4)$$

pelas transformações de Galileu como $x = f(x', t')$, podemos escrever

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x'} \rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}.$$

Mas podemos escrever também que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t'} - v \frac{\partial F}{\partial x'}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{\partial F}{\partial t'} - v \frac{\partial F}{\partial x'} \right] \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial F}{\partial t'} - v \frac{\partial F}{\partial x'} \right] \frac{\partial x'}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} + v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial t'} \\
 &\neq \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2}!
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Constatou-se experimentalmente que a constante c coincidia precisamente com a velocidade da luz no vácuo, o que levou Maxwell a conjecturar que a luz deveria ser uma onda eletromagnética. Para servir de meio para propagação destas ondas, Maxwell ressuscitou a idéia de “éter”. O grande sucesso da teoria de Maxwell, desde 1860, colocou grande pressão para que os experimentos evidenciassem a existência do “éter”.

O experimento mais conhecido, o de Michelson e Morley (1887), assim como outros, tentou determinar a velocidade da Terra através do “éter”, à medida que a Terra gira em torno do Sol. Um sinal luminoso é dividido por meio de um separador de feixes, sendo parte enviada a um espelho (com o sinal se propagando na direção do movimento), e outra parte enviada a outro espelho (na direção perpendicular). Os sinais são recombinados no separador de feixes e o objetivo da experiência era medir uma diferença de tempo entre a volta dos dois sinais, pelo método de interferência.

Admitamos que o experimento de interferência tenha a disposição descrita pela Fig. 9.4, onde supomos que toda a aparelhagem está sendo carregada para a direita com velocidade u , a velocidade da Terra relativa ao éter. Seja t_1 o tempo que a luz leva para ir de B a E . Nesse tempo, o espelho em E moveu-se de $u t_1$, logo

$$ct_1 = L + ut_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{c - u},$$

enquanto t_2 é o tempo que a luz leva para voltar de E para B . Nesse tempo, o aparelho moveu-se de $u t_2$, logo

$$ct_2 = L - ut_2 \Rightarrow t_2 = \frac{L}{c + u}.$$

Assim, o tempo para a luz ir para E e voltar para B é

$$t_1 + t_2 = \frac{L}{c - u} + \frac{L}{c + u} = \frac{2L/c}{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

enquanto que o tempo para a luz ir para C e voltar para B é $2t_3$, onde

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2 \Rightarrow 2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

A diferença entre os tempos de ida e volta entre os braços perpendiculares do interferômetro deveria causar uma diferença na posição das franjas de interferência, muito pequena, mas observável.

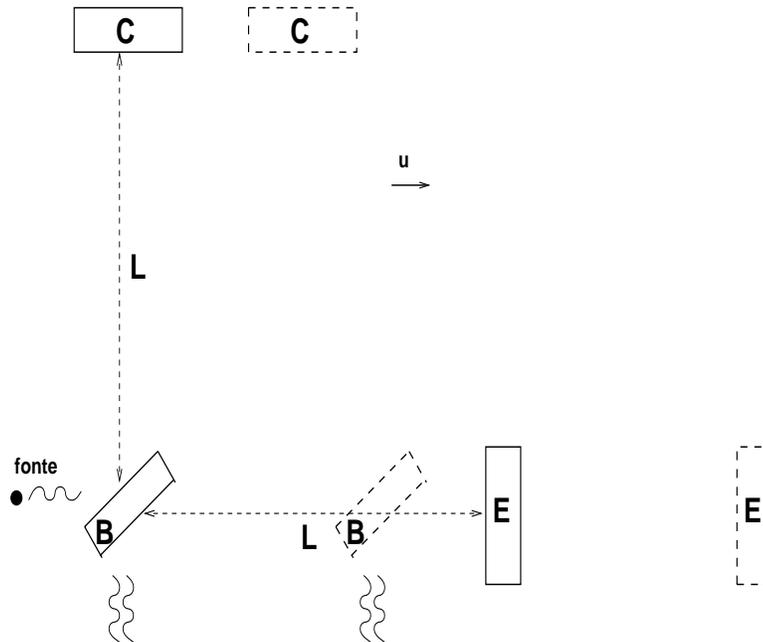


Figura 9.4: Esquema para o experimento de Michelson e Morley.

Como a diferença esperada dependia de u^2/c^2 , e não era possível ter uma precisão desta ordem na igualdade de comprimento dos braços do interferômetro, o aparato era girado de forma a inverter a posição dos braços e cancelar qualquer diferença devida à imprecisão na medida de L . Não foram observadas mudanças nas franjas de interferência devidas à velocidade da Terra em relação ao éter. Seria uma conspiração da natureza? Para Poincaré tratava-se de uma conspiração tão completa da natureza que só poderia ser uma lei. A velocidade da luz deveria ser constante ... contrariamente o esperado usando as transformações de Galileu para a velocidade.

Experimentos modernos já conseguiram estabelecer a constância da velocidade da luz em 1,7 partes em 10^{15} !

9.3 Princípio da Relatividade: Transformações de Lorentz

Lorentz descobriu que as seguintes transformações de coordenadas deixavam as equações de Maxwell, e logo o eletromagnetismo, com a mesma forma nos dois referenciais inerciais S e S' :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \end{aligned} \tag{9.6}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c}, \tag{9.7}$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \gamma \geq 1, \quad (9.8)$$

ou inversamente,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x'). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Observamos que as Transformações de Lorentz (TL):

1. são lineares em t e x ;
2. para a configuração padrão de S e S' não afetam as coordenadas y e z ;
3. não afetam a velocidade da luz, conforme veremos mais adiante (c é uma constante nas equações de Maxwell);
4. se reduzem às transformações de Galileu para $v \ll c$.

Vejamos o que acontece com a equação de onda, Eq. (9.4), se utilizarmos as transformações de Lorentz no lugar das de Galileu

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\partial F}{\partial t'},$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\partial F}{\partial t'} \right] \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\partial F}{\partial t'} \right] \frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= \gamma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} - 2 \frac{\gamma^2 \beta}{c} \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial F}{\partial t'} + \frac{\gamma^2 \beta^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

mas podemos escrever também que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial F}{\partial t'} - \gamma\beta c \frac{\partial F}{\partial x'}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \frac{\partial F}{\partial t'} - \gamma\beta c \frac{\partial F}{\partial x'} \right] \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma \frac{\partial F}{\partial t'} - \gamma\beta c \frac{\partial F}{\partial x'} \right] \frac{\partial x'}{\partial t} \\ &= \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2} + \gamma^2 \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} - 2 \frac{\gamma^2 \beta}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial t'}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

Usando Eqs.(9.10) e (9.11) vemos que

$$[\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2] \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = \left(\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\gamma^2 \beta^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial t'^2}$$

onde usando a Eq. (9.8) no primeiro parêntesis acima vemos que

$$\gamma^2(1 - \beta^2) \equiv 1, \quad (9.12)$$

e no segundo que

$$\frac{1}{c^2} \gamma^2(1 - \beta^2) \equiv \frac{1}{c^2}.$$

Vemos que a equação de onda é realmente invariante por TL ! Einstein então postulou um novo *Princípio da Relatividade*: toda a física (logo também a mecânica) deveria ser invariante sob as TL entre referenciais inerciais. Podemos assim enunciar o princípio da relatividade de Einstein:

“As leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial”. Isso quer dizer que não é possível distinguir referenciais inerciais (saber “qual se move”) através de qualquer experimento físico.

Veremos a seguir várias conseqüências para a cinemática e a dinâmica desse princípio.

Capítulo 10

Conseqüências Cinemáticas

Conteúdo

10.1 Relatividade da simultaneidade	116
10.2 Contração de Lorentz	117
10.3 Dilatação do tempo	117
10.4 Transformação de velocidades	120
10.5 Invariância da Causalidade	121
10.6 Conseqüência Algébrica das Transformações de Lorentz . . .	123

Veremos aqui algumas das conseqüências para a cinemática do princípio da relatividade de Einstein.

10.1 Relatividade da simultaneidade

Se dois eventos ocorrem ao mesmo tempo em S , mas em lugares diferentes, eles não ocorrem ao mesmo tempo em S' .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Evento 1 : } (x_1, t_1) \\ \text{Evento 2 : } (x_2, t_2) \end{array} \right\} S$$

Mas $t_1 = t_2 \Rightarrow \Delta t = 0$. Usando as relações abaixo:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left(t_1 - \frac{\beta}{c} x_1 \right), \\ t'_2 &= \gamma \left(t_2 - \frac{\beta}{c} x_2 \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$t'_1 - t'_2 = \frac{\gamma \beta}{c} (x_2 - x_1).$$

10.2 Contração de Lorentz

Suponha que uma barra esteja deitada no eixo x' , em repouso no referencial S' :

$$\begin{aligned}x'_2 - x'_1 &= L_0 \\ &\equiv \gamma (x_2 - x_1) + \underbrace{\gamma \beta c (t_1 - t_2)}_{=0}\end{aligned}$$

onde o último termo da expressão acima é nulo, pois medimos a posição no mesmo instante. Portanto, temos:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} .$$

Objetos em movimento são sempre menores (mais curtos) por um fator $1/\gamma$ comparado com seu comprimento em repouso L_0 . Direções perpendiculares à direção do movimento não serão afetadas.

10.3 Dilatação do tempo

★ **Demo:** Detetor de múons

Suponha que um relógio na origem S' marque um intervalo T_0 , por simplicidade de $t' = 0$ a $t' = T_0$. Qual será o intervalo de tempo correspondente medido por um observador em S ? O intervalo de tempo começa em $t' = t = 0$ e termina em $t' = T_0$ em $x' = 0 \Rightarrow$, pelas TL

$$T = \gamma T_0 .$$

S marca um intervalo mais longo por um fator γ : o mecanismo de relógios em movimento avança mais lentamente. Todas as partículas instáveis, como, por exemplo, n , $\nu\pi$, têm uma espécie de relógio próprio (tempo de vida média), e estes relógios realmente correm mais devagar quando a partícula está em movimento.

Como entender a medida de tempo entre dois referenciais?

(Veja pg. 79 do livro “O que é a Teoria da Relatividade?”, L. Landau e Y. Rumer)

Um passageiro viaja no trem de Einstein ao longo de uma estrada de ferro sem fim. A distância entre duas estações é $8,64 \times 10^8$ km. O trem que move-se a uma velocidade de $2,4 \times 10^5$ km/s levará 1 h (3.600 s) para vencer esta distância.

Há um relógio em ambas as estações (sincronizados). O passageiro que embarca na primeira estação acerta seu relógio com o da estação. Chegando à segunda estação observa que seu relógio está atrasado. Há um paradoxo aqui?

Para entender melhor o que acontece admitamos o seguinte. O passageiro no trem constroeu um relógio com uma lanterna e um espelho no teto da cabine. Para isso ele envia com a lanterna colocada no assoalho do vagão um feixe de luz em direção ao teto. O espelho colocado no teto reflete a luz de volta à lanterna. Cada vez que ela volta

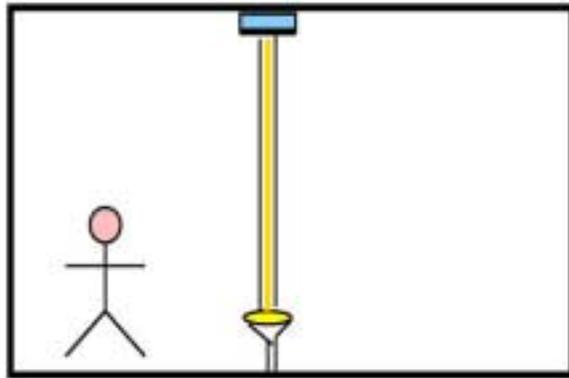


Figura 10.1: Relógio de luz segundo o passageiro do trem.

à lanterna um dispositivo registra este evento marcando assim o tempo decorrido. A trajetória da luz, vista pelo passageiro é mostrada na Fig. 10.1.

A trajetória da luz do relógio, vista por um observador parado na plataforma da estação no entanto é bem diferente. Enquanto o feixe sai da lanterna ao espelho, este se desloca devido ao movimento do trem. Enquanto o feixe volta do espelho à lanterna esta se desloca de uma distância igual a anterior. Veja a Fig. 10.2.

Para o observador na plataforma o feixe percorreu uma distância maior do que para o passageiro do trem. Por outro lado, sabemos que a velocidade da luz é absoluta e a mesma para o observador na plataforma e para o passageiro dentro do trem. Concluímos então que na estação se escoou mais tempo entre a partida e a volta do feixe de luz do que no trem! Vamos agora quantificar isso.

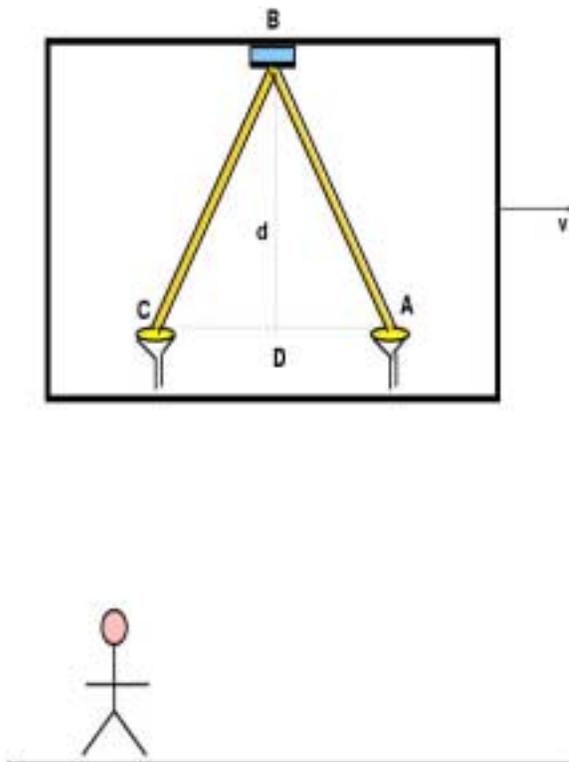


Figura 10.2: Relógio de luz segundo o observador na plataforma.

Para o passageiro do trem

$$2d = \Delta t_p c \rightarrow \Delta t_p = 2d/c$$

Δt_p é o tempo que a luz levou de D até B e de volta até D para o passageiro do trem.

Assim se $\Delta t_p = 6$ s, $d = 9 \times 10^5$ km.

Para um observador na plataforma

$$AB \equiv BC \equiv \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t_o}{2}\right)^2}$$

Δt_o é o tempo que a luz levou de A até C para o observador na plataforma

$$AB + BC = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t_o}{2}\right)^2} = \Delta t_o c \rightarrow \Delta t_o = \frac{2d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\Delta t_p!$$

Para $v = 2,4 \times 10^5$ km/s, $\gamma = \frac{5}{3}$. Logo $\Delta t_o = 6$ s. Entre a partida e a chegada do trem os dois observadores medem tempos diferentes:

Para um observador na plataforma

O tempo escorrido foi

$$\Delta t = 1 \text{ h} = 60 \text{ min} .$$

A distância entre as estações é

$$L_0 = v\Delta t = 2,4 \times 10^5 \text{ km/s} \times 3.600 \text{ s} = 8,64 \times 10^8 \text{ km} .$$

Como ele vê o trem em movimento, o intervalo de tempo medido por ele corresponde a um intervalo de tempo $\Delta t'$ medido pelo passageiro no trem

$$\Delta t = \gamma\Delta t' \rightarrow \Delta t' = \frac{3}{5}\Delta t = 36 \text{ min} .$$

Para o passageiro do trem

A distância entre as estações é

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = 8,64 \times 10^8 \text{ km}/(5/3) = 5,184 \times 10^8 \text{ km} ,$$

pois para ele as estações estão em movimento. Assim o tempo escorrido entre as duas estações é

$$\Delta t = L'/v = 5,184 \times 10^8 / 2,4 \times 10^5 \text{ s} = 36 \text{ min} .$$

Relógios em movimento andam mais devagar!

Mas a plataforma está em movimento do ponto de vista do passageiro do trem. Por que então não é o relógio da plataforma que atrasa e sim o dele? Não são os dois pontos de vista equivalentes? Em princípio sim, mas de fato não. A razão é que inicialmente a comparação dos relógios é feita no mesmo referencial de repouso do trem e da estação, em seguida o trem precisa sofrer aceleração para atingir a velocidade v , finalmente o trem precisa desacelerar para parar na outra estação e comparar seu relógio novamente com o da estação no mesmo referencial de repouso inicial. Neste caso fica claro quem está em repouso, quem está em movimento. Lembre que, em geral, comparando dois referenciais inerciais, não há como saber quem está em movimento!

10.4 Transformação de velocidades

Um dado importante e fundamental é que as TL contêm o fato experimental que a velocidade da luz não depende da velocidade da fonte: é sempre igual a c !

Consideremos uma partícula movendo-se com velocidade $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$

$$u_x = \frac{dx}{dt},$$

como vista por um observador na origem do referencial S . Um observador na origem do referencial S' verá a mesma partícula com velocidade $\vec{u}'_x = (u'_x, 0, 0)$, onde usando as TL

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{\beta}{c} u_x}, \quad (10.1)$$

de onde se deduz que, se a partícula em questão for um fóton, isto é, uma partícula com velocidade $u_x = c$ em S , então em S' o fóton será visto com velocidade

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \beta} = c \quad (!)$$

Um corolário é que nenhuma partícula pode mover-se mais rápido do que a luz! De fato isso nunca foi observado experimentalmente.

Caso Geral:

Uma partícula com velocidade $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, segundo um observador na origem do referencial S , tem velocidade $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ para um observador na origem do referencial S' , que se move com velocidade $\vec{v} = (v, 0, 0)$ em relação a S , tal que

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta c dt}{dt - \frac{\beta}{c} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{\beta}{c} u_x}, \quad (10.2)$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c} u_x)}, \quad (10.3)$$

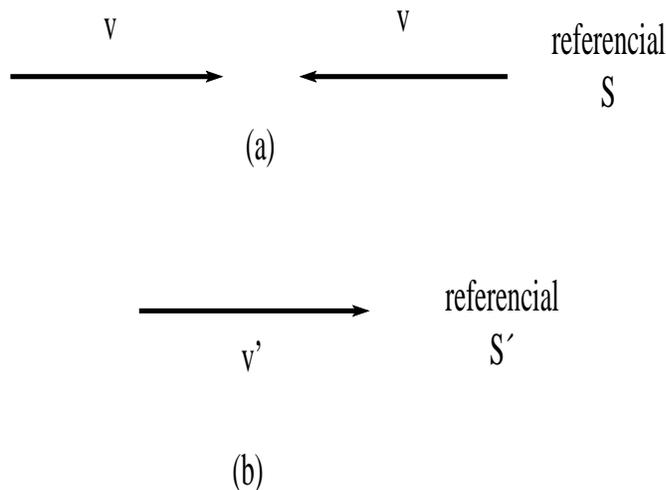


Figura 10.3: Esquema de uma partícula no referencial S movendo-se com velocidade v na direção x e com velocidade v' no referencial S' .

e

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}. \quad (10.4)$$

Vemos que, embora as coordenadas transversais ao movimento não sofram alteração pelas TL, as velocidades transversas *são modificadas*. Esse resultado é completamente diferente daquele obtido pelas Transformações de Galileu e tem implicações importantes no cálculo de velocidades (e acelerações) relativas. Para entender fisicamente o resultado, consideremos o exemplo do relógio de luz, dado acima. Para um observador fora do trem, a luz tem velocidade transversa diferente de c , dada pela projeção da velocidade ao longo desse eixo. Suponhamos que uma partícula massiva sofra reflexões num espelho, de modo que, para cada n reflexões da luz, temos uma reflexão da partícula. Ora, a velocidade transversa dessa partícula *tem que* sofrer modificação pois, caso contrário, a coincidência de n reflexões da luz para cada reflexão da partícula seria perdida. Ou seja, poderíamos, através dessa experiência, saber qual referencial se move...

10.5 Invariância da Causalidade

Considere que um evento P causa um evento Q a uma velocidade U relativamente a um referencial S . Por simplicidade, escolhamos S de forma que P e Q ocorram no eixo x , segundo a Fig. 10.5.

Temos assim, que em S ,

$$\Delta x = x_Q - x_P > 0, \quad \Delta t = t_Q - t_P > 0,$$

com

$$U \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Calculemos agora o intervalo de tempo $\Delta t'$ entre os mesmos eventos de acordo com S' , que se move com velocidade v em relação a S . Usando as TL temos

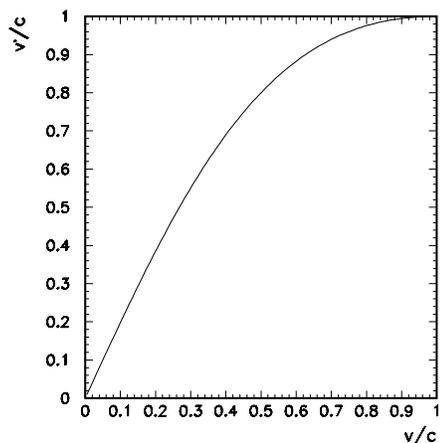


Figura 10.4: Gráfico do comportamento assintótico da velocidade de uma partícula v no referencial S e v' no referencial S' , mostrando na medida em que S' se aproxima da velocidade da luz, a partícula tem velocidade próxima a c

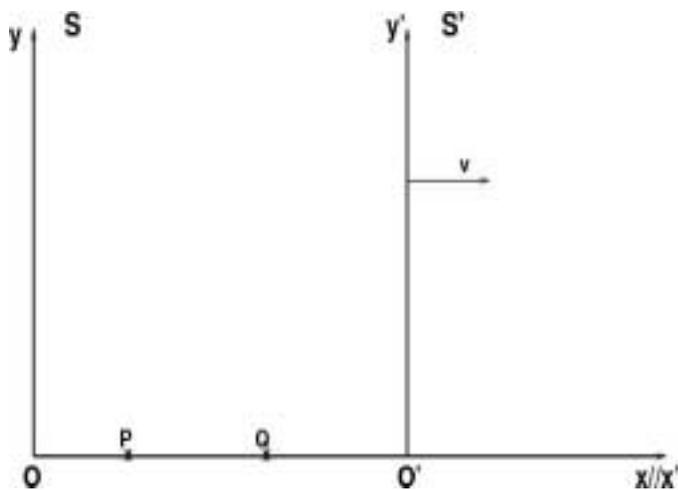


Figura 10.5: Esquema do sistema de coordenadas S e S' para os eventos P e Q ao longo do eixo x .

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v \Delta x}{c^2 \Delta t} \right) = \gamma \Delta t = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v}{c^2} U \right) .$$

Para que $\Delta t' \leq 0 \rightarrow (1 - vU/c^2) \leq 0 \rightarrow v \geq c^2/U$. Mas $U_{\max} = c \rightarrow v \geq c$!

Logo, a inversão de causa e efeito não se realiza nunca, o que é garantido pelo fato de que consideramos c como sendo a maior velocidade para transporte de informação. A igualdade só se realiza se $v = c$, em um referencial à velocidade da luz.

10.6 Conseqüência Algébrica das Transformações de Lorentz

As transformações de Galileu deixam a norma de um vetor (no espaço 3-D ao qual estamos habituados) invariante. Existe algo equivalente na relatividade? Conforme veremos, podemos definir uma generalização de vetor, cuja norma permanece invariante por uma TL.

Consideremos as TL para intervalos de espaço e de tempo

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma (\Delta x - v \Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta z' &= \Delta z \\ \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) .\end{aligned}$$

Podemos definir uma generalização de intervalo, combinando os intervalos espaciais e temporais de maneira apropriada. Há outras definições que poderiam ser adotadas e que são encontradas em alguns livros texto. Seja Δs^2 definido como abaixo

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 .$$

Verifica-se explicitamente que

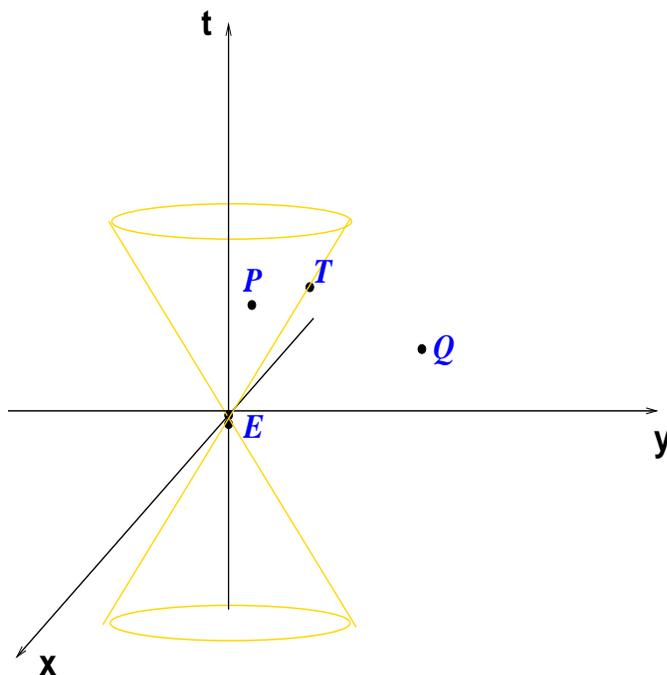
$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2 .$$

Δs^2 portanto é um invariante de Lorentz. Uma definição natural para a norma de vetor invariante que buscamos é $\sqrt{\Delta s^2}$. As componentes do vetor são $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$ e sua norma é calculada como

$$\|\mathbf{x}\|^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 .$$

Como Δs^2 tem caráter absoluto, podemos usar seu sinal para classificar os intervalos. O espaço usual 3-D pode ser generalizado para um espaço-tempo 4-D, conhecido como espaço de Minkowski, onde os eventos físicos serão designados por quatro coordenadas e onde as distâncias ou intervalos entre dois eventos são calculados como definido acima. A cada evento físico corresponde um conjunto de direções preferenciais definidas pelos caminhos da luz através desse ponto. Para um evento $E = (ct, x, y)$ em um referencial inercial S , todos os eventos vizinhos em $(ct + c\Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y)$ podem ser divididos em três classes:

- $\Delta s^2 < 0$: se um evento Q satisfizer esta condição, então não há referencial em que a separação espacial entre E e Q seja nula, pois $\Delta s^2 = c^2(t_Q - t_E)^2 - (x_Q - x_E)^2 - (y_Q - y_E)^2 < 0$. De fato, o valor absoluto da separação espacial entre estes dois

Figura 10.6: Cone de luz para o evento E .

eventos nunca poderá ser menor que $\sqrt{-\Delta s^2}$. No entanto, a separação temporal entre E e Q pode ter qualquer valor $-\infty \leq \Delta t \leq +\infty$; Δs^2 , nesse caso, é chamado de intervalo do tipo espaço;

- $\Delta s^2 > 0$: se um evento P satisfizer esta condição, então não há referencial em que a separação temporal entre E e P seja nula (em que eles sejam simultâneos), pois $\Delta s^2 = c^2(t_P - t_E)^2 - (x_P - x_E)^2 - (y_P - y_E)^2 > 0$. De fato, a separação temporal entre estes dois eventos nunca poderá ser menor que $|\Delta s|/c$. No entanto, a separação espacial entre E e P pode ir de $-\infty$ a $+\infty$; $\Delta s^2 > 0$ é um intervalo do tipo tempo. A seqüência temporal é absoluta: passado e futuro não dependem de referencial!
- $\Delta s^2 = 0$: se um evento T satisfizer esta condição, $c^2(t_T - t_E)^2 = (x_T - x_E)^2 + (y_T - y_E)^2$, então o intervalo é do tipo luz, a seqüência temporal também é absoluta, mas $0 \leq |\Delta t| \leq +\infty$ e a separação espacial absoluta entre eles pode variar também de 0 até $+\infty$.

Os eventos do passado ou do futuro de uma partícula estarão sempre no passado ou no futuro da partícula, independentemente do referencial inercial.

Capítulo 11

Efeito Doppler

Conteúdo

11.1 Efeito Doppler Relativístico	125
11.2 Limite de baixas velocidades	128
11.3 Dedução Alternativa	128
11.4 Efeito Doppler Transverso	129
11.5 Alguns Exemplos	130

Vimos em §2.10 que a frequência das ondas sonoras depende das velocidades da fonte e do observador. Para deduzir as relações para o efeito Doppler encontradas naquele capítulo usamos as transformações de Galileu que, como vimos aqui, não são válidas para referenciais inerciais com velocidades próximas à da luz.

Como a luz visível é de fato uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c no vácuo, é de se esperar que ela, assim como o som, também sofra um desvio Doppler de sua frequência. No entanto, já sabemos que c não depende da velocidade da fonte ou do observador. Como fica então o efeito Doppler para a luz visível e as demais ondas eletromagnéticas que se propagam à velocidade c ?

Veremos aqui que a Relatividade adiciona uma correção ao *Efeito Doppler ótico* clássico, um relógio afastando-se de nós aparecerá ainda mais lento, um átomo aparecerá ainda mais desviado para o vermelho graças à dilatação temporal! Em princípio isto também ocorre com o som (*Efeito Doppler acústico*) mas, enquanto átomos vibrando facilmente movem-se a velocidades grandes, os emissores de som dificilmente encontram-se neste caso, o que pode fazer com que essa correção não seja necessária na prática.

11.1 Efeito Doppler Relativístico

Vamos supor que uma fonte, por exemplo um transmissor de radar, esteja localizada na origem do sistema de referência S , e que um observador O' , se mova relativamente a S com velocidade v , de forma que ele esteja em repouso no referencial S' .

Cada pulso transmitido pelo radar move-se com velocidade c . Um primeiro pulso é enviado em $t = 0$, quando o observador está em $x = x_0$. Um segundo pulso, após um período de vibração, é enviado em $t = \tau$. A frequência de vibração da fonte, medida em

S é $\nu = 1/\tau$.

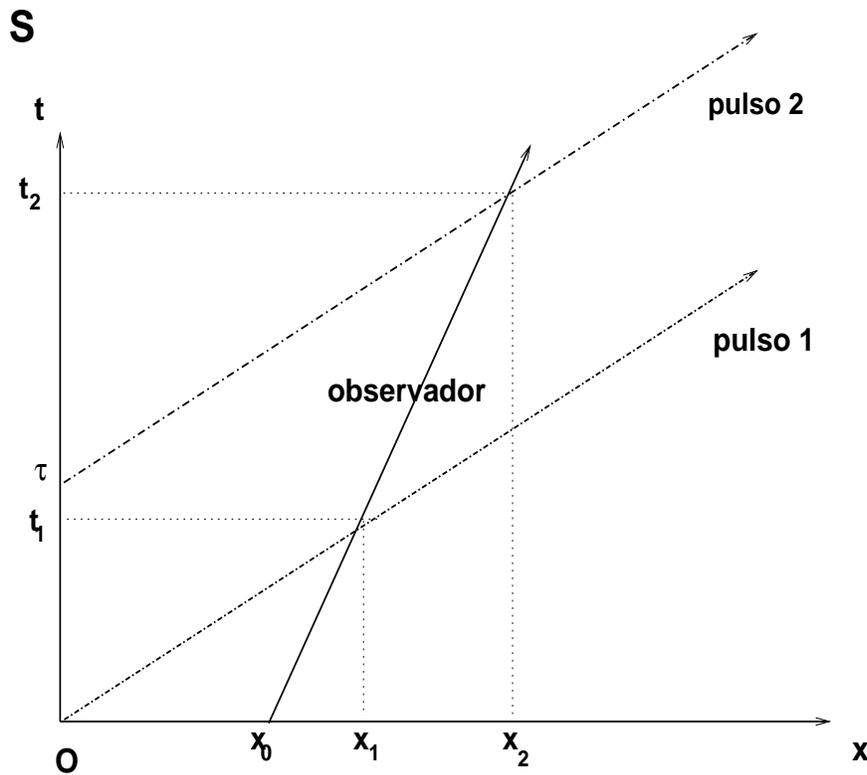


Figura 11.1: Esquema: Efeito Doppler Relativístico.

Segundo S :

Admitiremos aqui que o observador esteja afastando-se do radar. Nesse caso, o observador intercepta o primeiro pulso em (t_1, x_1) e o segundo pulso em (t_2, x_2) , conforme a Fig. 11.1. Vemos que

$$x_1 = ct_1 = x_0 + vt_1 \rightarrow t_1 = \frac{x_0}{c - v}$$

e

$$x_2 = c(t_2 - \tau) = x_0 + vt_2 \rightarrow t_2 = \frac{x_0}{c - v} + \frac{c\tau}{c - v}.$$

Logo o intervalo entre o O' observar o primeiro e o segundo pulso é, segundo o referencial S ,

$$t_2 - t_1 = \frac{c\tau}{c - v},$$

e a distância percorrida pelo observador O' entre as duas observações é naturalmente:

$$x_2 - x_1 = \frac{vc\tau}{c - v}.$$

Segundo S' :

Para o observador O' o intervalo entre os dois pulsos é

$$t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] = \gamma \left(\frac{c\tau}{c - v} - \frac{v}{c^2} \frac{vc\tau}{c - v} \right),$$

logo o período aparente τ' é simplesmente

$$\tau' = \frac{\gamma c\tau}{c - v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\gamma(1 - \beta^2)}{(1 - \beta)} \tau = \gamma(1 + \beta)\tau.$$

Mas

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta)(1 + \beta)}},$$

logo

$$\tau' = \sqrt{\frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)}} \tau.$$

Em termos da frequência observada ν'

$$\nu' = \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}} \nu.$$

Se o observador O' em S' estivesse aproximando-se de S , no lugar de estar se afastando como no cálculo acima, o resultado que teríamos obtido para a mudança de frequência seria análogo ao apresentado acima, apenas o sinal do numerador e do denominador seriam trocados! Assim a mudança de frequência seria

$$\nu' = \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}} \nu \quad \text{p/ fonte ou observador afastando-se,} \quad (11.1)$$

nesse caso a frequência seria menor que a frequência emitida ν , dizemos que temos um desvio para o vermelho (comprimento de onda maior), ou

$$\nu' = \sqrt{\frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)}} \nu \quad \text{p/ fonte ou observador aproximando-se.} \quad (11.2)$$

nesse caso a frequência seria maior que a frequência emitida ν , dizemos que temos um desvio para o azul (comprimento de onda menor).

Perceba que o efeito só depende da velocidade relativa entre os referenciais: não é possível saber quem está em movimento! Uma manifestação dramática deste efeito é o desvio para o vermelho das galáxias distantes.

11.2 Limite de baixas velocidades

Para $\beta \ll 1$ podemos calcular uma expressão aproximada para o caso de afastamento

$$\nu' = \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}} \nu = [(1-\beta)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2}] \nu \approx [(1-\frac{1}{2}\beta)^2] \nu \approx (1-\beta) \nu ,$$

o que corresponde ao limite não relativístico de uma fonte emitindo um sinal luminoso com o receptor afastando-se dela ou ela afastando-se do receptor com velocidade $v \ll c$.

Para o caso de aproximação

$$\nu' = \sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}} \nu = [(1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}] \nu \approx [(1+\frac{1}{2}\beta)^2] \nu \approx (1+\beta) \nu ,$$

o que corresponde ao limite não relativístico de uma fonte emitindo um sinal luminoso com o receptor aproximando-se da dela ou ela do receptor com velocidade $v \ll c$.

11.3 Dedução Alternativa

Considere o perfil de uma onda harmônica progressiva para a direita movendo-se à velocidade da luz dado por

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) ,$$

segundo um observado no referencial S , onde $\omega/k = c$. O perfil dessa onda segundo um observador em um referencial S' que move-se com velocidade v em relação a S segundo o esquema padrão deve ter a mesma forma (pois a física deve ser a mesma, a onda deve continuar uma onda harmônica senão nós seríamos capazes de saber quem está em movimento!)

$$\begin{aligned} y'(x', t') &= y(x', t') &&= A \cos(k'x' - \omega't') \\ &= A \cos[k'\gamma(x - vt) - ck'\gamma(t - \frac{v}{c^2}x)] \\ &= A \cos[k'\gamma(1 + \beta)x - ck'\gamma(1 + \beta)t] \\ &= A \cos[k'\gamma(1 + \beta)x - \omega'\gamma(1 + \beta)t] \\ &= y(x, t) \\ &= A \cos[kx - \omega t] \end{aligned}$$

onde $\omega'/k' = c$. Logo

$$k = (1 + \beta)\gamma k' \quad \omega = (1 + \beta)\gamma \omega' .$$

Como $\omega = 2\pi\nu$ então

$$\nu' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu .$$

que é o resultado que obtemos na Eq.(11.1) para a fonte ou observador se afastando.

Podemos também obter o resultado para a fonte ou observador se aproximando admitindo a onda inicial dada por

$$y(x, t) = A \cos(kx + \omega t) ,$$

ou seja, por uma onda harmônica progressiva para a esquerda.

11.4 Efeito Doppler Transverso

Pelo discutido assim observamos que a grandeza

$$(kx - \omega t) = (k'x' - \omega't') \Rightarrow \nu'(t' - \frac{x'}{c}) = \nu(t - \frac{x}{c}) ,$$

é um invariante de Lorentz (tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial), que pode ser interpretada fisicamente como a fase da onda.

Caso estivéssemos tratando uma onda harmônica no espaço, no lugar de uma onda unidimensional, bastaria fazer a substituição $kx \rightarrow kx + ky + kz = \vec{k} \cdot \vec{x}$. Desta forma, poderíamos generalizar a fase invariante para

$$(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = (\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t') \Rightarrow \nu'(t' - \frac{\hat{u}' \cdot \vec{x}'}{c}) = \nu(t - \frac{\hat{u} \cdot \vec{x}}{c}) .$$

Podemos agora calcular a dependência da expressão relativística da frequência Doppler no caso da luz sendo emitida na direção $\hat{u} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, relativamente a um observador no referencial S , e na direção $\hat{u}' = (\cos \theta', \sin \theta', 0)$, relativamente a um observador no referencial S' . Como

$$\begin{aligned} \nu(t - \frac{\hat{u} \cdot \vec{x}}{c}) &= \nu(t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{y}{c} \sin \theta) \\ &= \nu \gamma (t' + \frac{x' \beta}{c} - \frac{x'}{c} \cos \theta - \beta t' \cos \theta - \frac{y'}{c} \sin \theta) \\ &= \nu \gamma [(1 - \beta \cos \theta) t' - \frac{x'}{c} (\cos \theta - \beta)] - \nu \frac{y'}{c} \sin \theta \\ &= \nu' (t' - \frac{x'}{c} \cos \theta' - \frac{y'}{c} \sin \theta') \end{aligned}$$

$$\therefore \nu' = \gamma (1 - \beta \cos \theta) \nu ,$$

onde identificamos ν' na última expressão como o coeficiente que multiplica t' . Observamos que, mesmo que $\cos \theta = 0$, ou seja, que o ângulo de observação seja $\theta = \pi/2$, subsiste um deslocamento de frequência devido ao efeito Doppler. Este efeito é chamado de efeito Doppler transverso e existe apenas para a luz (ondas que se propagam em meios elásticos não apresentam efeito Doppler transverso).

Comentário: O efeito Doppler relativístico é utilizado, por exemplo, em astronomia, para determinar a velocidade afastamento ou aproximação de estrelas, galáxias ou aglomerados de galáxias da Terra. Para isso usa-se linhas de frequência de radiação muito bem conhecidas dos espectros de transição atômicos, comparando o valor observado com o medido em laboratório (frequência própria). Mais recentemente, este efeito vem sendo utilizado para inferir a existência de planetas fora do sistema solar. Cerca de 70 planetas e

7 sistemas planetários já foram descobertos usando a técnica de observação de mudanças periódicas no desvio Doppler da luz emitida pela estrela do sistema planetário, devido a mudança da posição do planeta na órbita e a conseqüente pequena variação da velocidade da estrela (fonte da luz) relativamente à Terra.

11.5 Alguns Exemplos

Exemplo 1: Qual a velocidade de uma galáxia relativamente à Terra se a razão entre o comprimento de onda da luz emitida por ela e medido na Terra é 1,21 ?

$$\lambda' = c\tau' = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} c\tau = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \lambda$$

$$\beta = \frac{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + 1}$$

Logo se $\lambda'/\lambda = 1,21$ então $\beta = \frac{0,46}{2,46} \approx 0,2$, $v = 0,2c \approx 6 \times 10^7$ m/s.

Exemplo 2: Uma galáxia vizinha afasta-se de nós com velocidade relativa $0,1c$.

No referencial de repouso da galáxia, fótons da linha de transição L_α do hidrogênio tem $\lambda = 122$ nm. Calcule o comprimento de onda destes fótons detectores na Terra.

$$\lambda' = c\tau' = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \lambda$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + 1}$$

Exemplo 3: Calcule a velocidade de uma galáxia relativamente à Terra se o desvio para o vermelho causado ao λ dos fótons é tal que λ é duplicado.

$$\beta = \frac{\left(\frac{2\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2\lambda}{\lambda}\right)^2 + 1}$$

$$v = \beta c = 0,6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}; = 1,8 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Capítulo 12

Conseqüências Dinâmicas

Conteúdo

12.1	Momento relativístico	132
12.2	Energia relativística	135
12.3	Unidades na Relatividade	138
12.4	Colisões na Relatividade	139
12.4.1	Visão clássica de colisões	139
12.4.2	Visão relativística de colisões	140
12.4.3	Fissão Nuclear	142
12.4.4	Fusão Nuclear	143

Já vimos as modificações que o princípio da relatividade trouxe para a cinemática. Basicamente toda a mecânica clássica é inconsistente com o princípio da relatividade, uma vez que ela é invariante por transformações de Galileu e não por transformações de Lorentz. Vejamos algumas considerações a esse respeito.

Na mecânica newtoniana uma força pode acelerar uma partícula até uma velocidade infinita, enquanto, na relatividade, há uma velocidade limite, a velocidade da luz c . A mecânica clássica admite forças de ação à distância e exige que forças de ação e reação sejam iguais. Tal igualdade é absurda na relatividade, exceto para o caso particular de forças de contato, pois a simultaneidades de eventos separados no espaço é relativa.

Devemos procurar novas leis de movimento que sejam consistentes com a relatividade e que ao mesmo tempo assegurem a redução ao caso clássico para o limite de baixas velocidades.

12.1 Momento relativístico

A definição clássica de momento

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

é inconsistente com o princípio da relatividade. A razão é que se considerarmos essa

definição, momento que é conservado em um referencial inercial não o seria em outro referencial inercial!

Vejam os um exemplo do problema acima. Consideremos o caso de uma colisão elástica entre duas partículas idênticas A e B de massas $m_A = m_B = m$. Seja S' o referencial de centro de massa da colisão, onde o momento total do sistema se anula (veja Fig. 12.1).

	A		B	
	$v'_x(A)$	$v'_y(A)$	$v'_x(B)$	$v'_y(B)$
Antes	v'_x	v'_y	$-v'_x$	$-v'_y$
Depois	v'_x	$-v'_y$	$-v'_x$	v'_y

Tabela 12.1: Componentes x' e y' da velocidade das partículas A e B , antes e depois da colisão segundo o referencial S' .

A magnitude da velocidade de A e B antes e depois da colisão é $v'_A = v'_B = v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}$. Vemos na Tabela 12.1 que a lei de conservação do momento \vec{p} é satisfeita em S' . Pelo princípio da relatividade o mesmo deveria ocorrer em todos os referenciais inerciais.

Sabemos como se transformam as coordenadas da velocidade entre dois referenciais inerciais quaisquer. Em S , um referencial que se desloca com velocidade $-V$ na direção de x relativamente a S' , a colisão fica então:

	A		B	
	$v_x(A)$	$v_y(A)$	$v_x(B)$	$v_y(B)$
Antes	$\frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$	$\frac{v'_y}{\gamma(V)(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}$	$-\frac{v'_y}{\gamma(V)(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$
Depois	$\frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$	$-\frac{v'_y}{\gamma(V)(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{-v'_x + V}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}$	$\frac{v'_y}{\gamma(V)(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$

Tabela 12.2: Componentes x e y da velocidade das partículas A e B , antes e depois da colisão segundo o referencial S .

Vemos que $v_A = \sqrt{v_x(A)^2 + v_y(A)^2} \neq v_B = \sqrt{v_x(B)^2 + v_y(B)^2}$. Podemos escrever uma relação entre v_A e v'_A

$$v_A^2 = v_x(A)^2 + v_y(A)^2 = \frac{(v'_x + V)^2 + v'^2_y \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2}$$

$$1 - \frac{v_A^2}{c^2} = 1 - \frac{\left[\frac{(v'_x + V)^2}{c^2} + \frac{v'^2_y}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right]}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v'_A}{c}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2}, \quad (12.1)$$

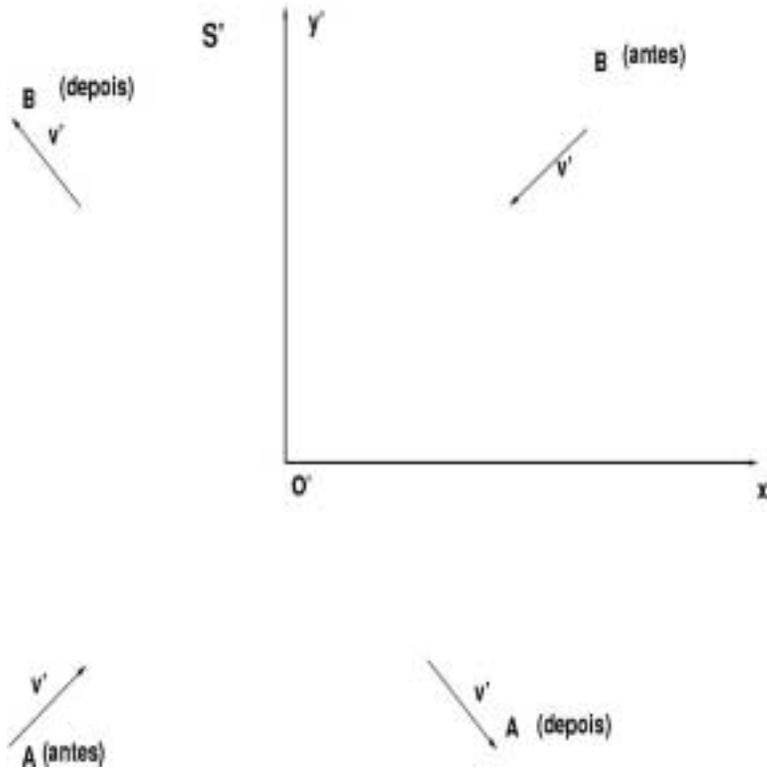


Figura 12.1: Colisão elástica entre duas partículas idênticas no referencial em que o momento total se anula.

e de forma análoga podemos obter

$$1 - \frac{v_B^2}{c^2} = 1 - \left[\frac{\frac{(-v'_x + V)^2}{c^2} + \frac{v_y'^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2} \right] = \frac{\left(1 - \frac{v'_B}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2}. \quad (12.2)$$

Podemos agora combinar Eq. (12.1) com Eq. (12.2), lembrado que $v'_A \equiv v'_B$, para obter finalmente

$$\frac{\left(1 - \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v_A}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_B}{c^2}\right)}}. \quad (12.3)$$

A componente x do momento é automaticamente conservada em S , porém para que haja conservação da componente y do momento no referencial S temos que a seguinte condição deve se cumprir:

$$m_A \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})} - m_B \frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})} = -m_A \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})} + m_B \frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})},$$

ou seja,

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v_B}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v_A}{c}\right)}}, \quad (12.4)$$

onde usamos a Eq. (12.3) para obter a última igualdade. Isso contradiz o fato que A e B são partículas idênticas de massa m !

Podemos citar aqui também um resultado experimental de 1901: na referência [W. Kaufmann *et al.*, Göttingen Nachrichten **143**, 291 (1901)] mostra-se que a medida experimental da relação entre momento e velocidade do elétron não reproduz o que se espera da fórmula clássica. Este experimento, anterior à teoria de Einstein, já sugere a necessidade de uma redefinição de momento ...

Re-definiremos então \vec{p} , como sugerido pela Eq. (12.4), como

$$\vec{p} = \gamma(v)m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.5)$$

É fácil verificar que essa nova definição é consistente com o princípio da relatividade, além de se reduzir à definição de momento clássica quando $v \ll c$.

12.2 Energia relativística

A segunda lei de Newton, pode ser escrita na relatividade como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(v)m\vec{v})}{dt},$$

de forma que como esperado, na ausência de forças externas, o momento relativístico se conserva.

Podemos calcular o trabalho por unidade de tempo realizado por uma força externa sobre uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} . Esse trabalho por unidade de tempo nada mais é que a potência dissipada pela força, ou seja,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} = m \vec{v} \cdot \left[\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v \frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{v} \right],$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{2}m \frac{v^2}{c^2} \frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.6)$$

No entanto, vemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\frac{1}{2c^2} \frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

o que comparando com a Eq. (12.6) implica que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

o que nos leva à famosa fórmula de Einstein:

$$E = \gamma(v)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.7)$$

Por outro lado, na mecânica temos que o trabalho realizado por unidade de tempo está relacionado à variação de energia cinética K , ou seja,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} \Rightarrow E = K + \text{const.}$$

Mas a energia cinética é nula quando a partícula está em repouso ($\vec{v} = 0$), logo nesse caso

$$E(v = 0) = \text{const.} = E_0 = mc^2, \quad (12.8)$$

que a chamada energia de repouso da partícula. Essa energia de repouso está associada à chamada massa de repouso da partícula e não tem nenhum análogo na mecânica clássica. O que acabamos de mostrar é que na relatividade uma partícula de massa m , mesmo em repouso, tem uma energia intrínseca. Essa relação é muitas vezes conhecida como relação de “equivalência entre massa e energia”, mas rigorosamente falando não se pode dizer que temos equivalência entre massa e energia pois são quantidades física que possuem unidades diferentes. O mais correto seria dizer que se trata de uma relação de equivalência entre energia de repouso e qualquer outro tipo de energia. Essa relação tem sido constantemente verificada experimentalmente. Podemos citar, por exemplo, a aniquilação elétron-pósitron produzindo 2 fótons, cada um com energia igual a exatamente mc^2 , onde m é a massa do eletron (igual à massa do pósitron).

Para termos uma idéia quantitativa da magnitude da energia de repouso armazenada em um corpo, vamos comparar agora a relação entre a energia de repouso armazenada em

uma bola de tenis de 60 g, e a energia cinética que ela adquire a 200 km/h (valor próximo à velocidade máxima de um serviço de um tenista profissional!). A energia de repouso armazenada é

$$E_0 = mc^2 = 60 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 5,4 \cdot 10^{15} \text{ J},$$

enquanto que sua energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}60 \times 10^{-3} \times \left(\frac{200 \times 10^3}{3600}\right)^2 \sim 93 \text{ J}.$$

Vemos que E_0/K é da ordem de 10^{14} !

Podemos agora escrever a energia cinética relativística K como

$$K = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2. \quad (12.9)$$

No limite não relativístico, em que $v \ll c$, podemos escrever *

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

de forma que nesse limite a energia cinética se reduz a

$$K \approx mc^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{2}mv^2!$$

que é a expressão da energia cinética clássica, como deveríamos esperar.

Usando as Eqs.(12.5) e (12.7) podemos escrever duas expressões que relacionam E e \vec{p} :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad E = \gamma mc^2 \quad \Rightarrow \vec{p} = \frac{\vec{v}}{c^2} E, \quad (12.10)$$

e também a relação entre valor absoluto do momento e energia

$$\vec{p}^2 = \gamma^2 m \vec{v}^2 \quad E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \quad \Rightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (12.11)$$

As expressões acima nos levam a conclusão que em relatividade a conservação do momento e da energia ocorrem juntas.

Observemos que na mecânica clássica não tem sentido postular a existência de uma partícula de massa nula, pois essa partícula teria energia cinética nula, momento nulo e não poderíamos exercer nenhuma força sobre ela. Na relatividade vemos das Eqs.(12.5) e (12.7) que se $m = 0$ e $v = c$, $E = 0/0$ e $\vec{p} = \vec{0}/0$, havendo então a possibilidade de dar

*Aqui usamos o fato que, por expansão de Taylor, $(1 \pm x)^n$ para $x \ll 1$ pode ser escrito como uma série convergente: $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx \pm \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \dots$

um sentido a uma partícula de massa nula desde que movendo-se à velocidade da luz. De fato vemos que nesse caso a Eq. (12.10) implica em

$$E = |\vec{p}|c ,$$

ou seja, a partícula de massa nula e velocidade c tem momento e energia muito bem definidos na relatividade. Para um fóton é exatamente esse o caso. Mas enquanto na mecânica clássica, partículas de mesma massa adquirem momento e energia cinéticas distintos devido a sua velocidade, o que determina os valores distintos de E e p para um fóton? A resposta a essa questão intrigante só será dada pela física quântica.

Comentário: Uma manifestação do momento transportado por um fóton, ou por uma onda eletromagnética, é a chamada pressão de radiação. Quando a luz, por exemplo, incide sobre uma superfície, pode ser parcialmente refletida e/ou absorvida por ela causando uma variação do momento carregado pela onda na interface. Essa variação de momento, por sua vez, causa uma força sobre a superfície que dá origem à pressão de radiação. A pressão de radiação explica por que a cauda dos cometas aponta em direção que se afasta do Sol (fato conjecturado por Kepler em 1619). A NASA já fez vários testes com “velas espaciais”, usando pressão de radiação para a propulsão de veículos espaciais. Na escala atômica utiliza-se a pressão de radiação para construir armadilhas óticas para átomos neutros.

12.3 Unidades na Relatividade

Problemas de dinâmica relativística, em geral, envolvem núcleos atômicos e partículas elementares de forma que muitas vezes as energias envolvidas são muito menores do que 1 J. É portanto conveniente usar como unidade de energia, no lugar de Joule (J), o eletrôn-Volt (eV). Define-se o Volt (V) como unidade de energia (J) por carga elétrica (C):

$$1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}} .$$

Como o elétron tem uma carga de $1,602 \times 10^{-19}$ C, então

$$1\text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}\text{ J}$$

Falamos igualmente de keV (10^3 eV), MeV (10^6 eV), GeV (10^9 eV), TeV (10^{12} eV) e mesmo PeV (10^{15} eV). Veremos, a seguir, que podemos também usar o eV (e suas potências) também com unidade de massa.

Usualmente a massa das partículas é dada em unidades de massa atômica (u). A unidade de massa atômica é definida como

$$1, u = \frac{1}{12} \times \text{massa de um átomo neutro do } {}^{12}\text{C} ,$$

que podemos facilmente converter em kg, lembrando que o número de átomos em 12g de ^{12}C é o número de Avogadro, logo

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \left(\frac{12\text{g}}{6,022 \times 10^{23}} \right) = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg} .$$

Como $E = mc^2$, podemos calcular qual a energia de repouso correspondente a 1 u:

$$E = 1 \text{ u} c^2 = \frac{1,661 \times 10^{-27} \text{ kg} \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV} \times 10^6 \text{ eV/MeV}} = 931,5 \text{ MeV} ,$$

logo, $1 \text{ u} \equiv 931,5 \text{ MeV}/c^2$. De forma que, por exemplo, a massa de um elétron será igual a $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ e a massa de um próton igual a $m_p = 938,26 \text{ MeV}/c^2$.

Observação: Existe uma espécie de convenção de linguagem utilizada na relatividade. Quando dizemos que uma partícula, um elétron, por exemplo, tem 3 MeV, estamos nos referindo à sua energia cinética, não à sua energia total.

Exemplo:

Qual a velocidade de um elétron de 3 MeV?

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \Rightarrow (\gamma - 1) = 6 \Rightarrow \gamma = 7$$

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} \approx 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{49} \approx 0,99$$

$$\therefore v \approx 0,99c.$$

12.4 Colisões na Relatividade

A necessidade de se redefinir o momento e a energia na relatividade está intimamente relacionada com o fato que a conservação dessas quantidades advem da existência de simetrias contínuas, de translação no espaço e no tempo, observadas em processos físicos. Uma das aplicações mais direta dessas leis de conservação, aparece nos processos de colisão entre partículas.

Imagine uma classe de colisões na qual uma partícula A bate em outra partícula B produzindo C e D . Claro que C e D podem ser as mesmas que A e B , mas pode acontecer que parte da massa de A fique “grudada” em B de forma que as massas finais podem diferir das originais.

12.4.1 Visão clássica de colisões

Classicamente massa e momento são sempre conservados em processos de colisão. A energia cinética, por outro lado, pode ou não se conservar. Esquemáticamente:

1. $m_A + m_B = m_C + m_D$;

$$2. \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D;$$

3. $E = K$ só se conserva em processos elásticos.

Imagine, por exemplo, que uma bolinha, que com uma certa velocidade, atinja uma outra bolinha em repouso, de forma que elas fiquem grudadas uma na outra, continuando em movimento juntas. É evidente que a lei de conservação de momento se aplica para esta colisão. Devemos esperar que a energia das partículas seja também conservada? Certamente, parte da energia do impacto será convertida em calor, parte ainda poderá ser usada para rotação do sistema, por exemplo (caso as duas bolas acabem girando entorno de seu do centro de massa do sistema). Não devemos, portanto, esperar que classicamente a energia das partículas seja conservada na colisão. Classicamente a energia das partículas só se conserva em processos elásticos.

De maneira geral, podemos considerar três tipos de colisões distintas:

- (a) colisões em que a energia cinética das partículas decresce, tipicamente convertendo-se em calor, $K_A + K_B > K_C + K_D$. No caso extremo desse tipo de colisão, as duas partículas iniciais ficam unidas, havendo uma única partícula final ($A + B \rightarrow C$);
- (b) colisões em que a energia cinética das partículas cresce, A encontra pela frente, por exemplo, uma mola comprimida e a colisão a libera fazendo com que a energia da mola se converta em energia cinética, $K_A + K_B < K_C + K_D$. No caso extremo desse tipo de colisão, uma única partícula se quebra em duas ($A \rightarrow C + D$);
- (c) colisões elásticas para as quais a energia das partículas se conserva, $K_A + K_B = K_C + K_D$.

12.4.2 Visão relativística de colisões

Na relatividade, como já mencionamos, conservação de momento, implica em conservação de energia (cf. Eq. (12.11)). Logo nas colisões relativística, momento e energia são **sempre** conservados, tanto em processos elásticos como inelásticos. A energia cinética, como no caso clássico, pode ou não se conservar. Esquemáticamente:

$$1. E_A + E_B = E_C + E_D;$$

$$2. \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D;$$

3. $K \neq E$ só se conserva em processos elásticos.

Podemos aqui também classificar as colisões em três tipos:

- (a) colisões em que a energia cinética das partículas decresce, com o respectivo aumento da energia de repouso das partículas uma vez que a energia total deve ser conservada. No caso extremo desse tipo de colisão, toda a energia de A e B é convertida em energia de repouso de C ;
- (b) colisões em que a energia cinética das partículas cresce, com o respectivo decrescimento da energia de repouso das partículas uma vez que a energia total deve ser conservada. O caso extremo desse tipo de colisão é o decaimento em repouso de A , convertendo toda energia de repouso de A em energia cinética e de repouso de C e D ;

- (c) colisões elásticas: único caso em que a massa de repouso é conservada na relatividade, pois a conservação da energia cinética implica na conservação da energia de repouso uma vez que a energia total do sistema deve ser conservada.

Vemos que apesar de haver um certo paralelismo entre a análise clássica e a relativística das colisões, existe uma grande diferença na interpretação das colisões inelásticas. No caso clássico, dizemos que a energia das partículas em colisão pode ser convertida de energia cinética em alguma forma de energia interna (calor, energia da mola etc.) e vice-versa. No caso relativístico, dizemos que a energia das partículas em colisão se conserva, mas sua energia cinética pode ser convertida em energia de repouso e vice-versa. Para $v \ll c$ o resultado relativístico deve coincidir com o clássico, será isso consistente? De fato todas as formas de energia interna refletem na energia de repouso de um objeto, uma batata quente “pesa” mais do que uma batata fria, uma mola comprimida “pesa” mais do que uma livre. No entanto, em escala macroscópica, energias de repouso são imensamente superiores à energias internas (lembramos do exemplo da bola de tênis), de forma que essas diferenças de massa são totalmente irrelevantes no dia a dia e, de fato, muito pequenas em nível atômico. Apenas em física nuclear e de partículas, as energias internas são comparáveis à energia de repouso.

Exemplo 1:

Uma partícula de massa M , inicialmente em repouso, decai em duas outras, cada uma de massa m . Qual a velocidade de cada uma das partículas finais? Por conservação de energia

$$E_i = Mc^2 = E_f = \gamma(v_1)mc^2 + \gamma(v_2)mc^2 ,$$

por conservação de momento,

$$\vec{p}_i = 0 = \vec{p}_f = \gamma(v_1)m\vec{v}_1 + \gamma(v_2)m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \Rightarrow |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v ,$$

logo concluímos que

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} .$$

Vemos que essa expressão só tem sentido para $M \geq 2m$, ou seja, é necessário haver no mínimo energia de repouso para dar conta da energia de repouso das partículas produzidas, o extra converte-se em energia cinética dessas partículas. Dizemos que $M = 2m$ é o limiar do processo de decaimento $M \rightarrow 2m$, abaixo desse limiar o processo não ocorre espontaneamente.

O deutério, por exemplo, está abaixo do limiar ($m_D = 1.875 \text{ MeV}/c^2$, $m_p + m_n = 1.877,9 \text{ MeV}/c^2$) para que o decaimento $D \rightarrow p + n$ ocorra espontaneamente, sendo assim estável. Ele pode ser quebrado se fornecermos energia suficiente para o sistema ultrapassar o limiar de produção.

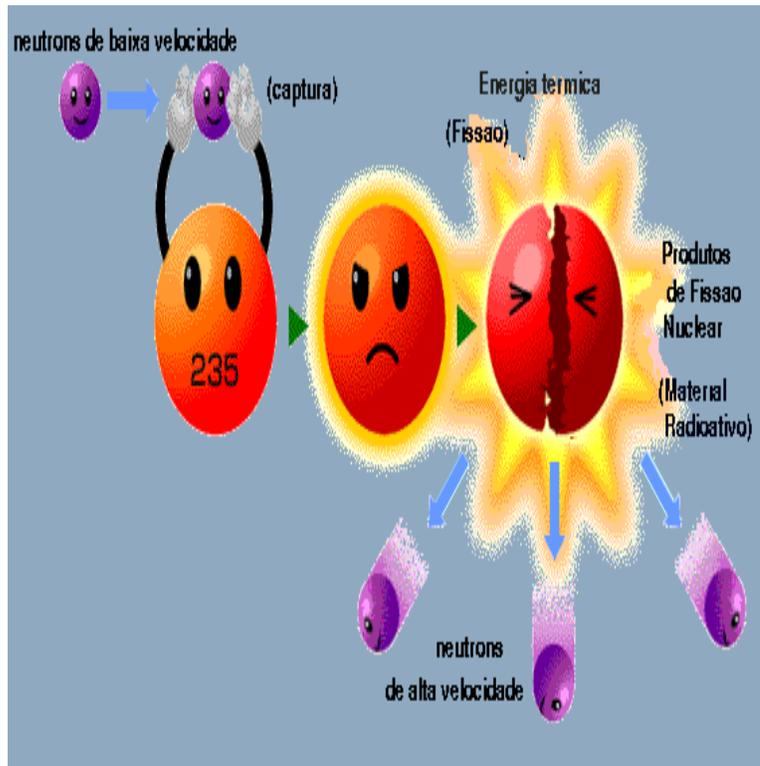


Figura 12.2: Esquema de fissão nuclear.

12.4.3 Fissão Nuclear

Fissão é um processo nuclear no qual elementos pesados se quebram para formar elementos mais leves liberando energia. O exemplo mais comum é a fissão do urânio em reatores nucleares. Um nêutron a baixa velocidade é absorvido por um átomo de urânio 235 (^{235}U), causando sua desestabilização, fazendo com que ele se desintegre em vários produtos de fissão nuclear. Quando o átomo de urânio sofre essa fissão, nêutrons de alta velocidade e energia são liberados.

Exemplo 2: Quanta energia é liberada na explosão de uma bomba de fissão

contendo 3,0 kg de material fissível. Assuma que 0,10 % da massa é convertida para energia. Que massa de TNT deveria explodir para fornecer a mesma energia? Assuma que cada mol de TNT forneça 3,4 MJ de energia na explosão. A massa molecular de TNT é 0,227 kg/mol. Para a mesma massa quão mais efetivas são as explosões nucleares comparadas à TNT? Compare a fração de massa convertida em cada caso.

$$\begin{aligned}
 E &= mc^2 = 0,003 \times (3,0 \times 10^8)^2 = 0,003 \times 9,0 \times 10^{16} \text{ J} \\
 &= 2,7 \times 10^{14} \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ mol de TNT} - 3,4 \times 10^6 \text{ J} \\ x \text{ moles de TNT} - 2,7 \times 10^{14} \text{ J} \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ moles} = \frac{2,7 \times 10^{14}}{3,4 \times 10^6} = 0,8 \times 10^8 \text{ moles}$$

Logo, temos que a massa de TNT correspondente é

$$\begin{aligned} 8 \times 10^7 \times 0,227 \text{ kg} &\approx 1,8 \times 10^7 \text{ kg} \\ &\approx 18 \text{ kton} \end{aligned}$$

Obviamente as explosões nucleares são mais eficiente...

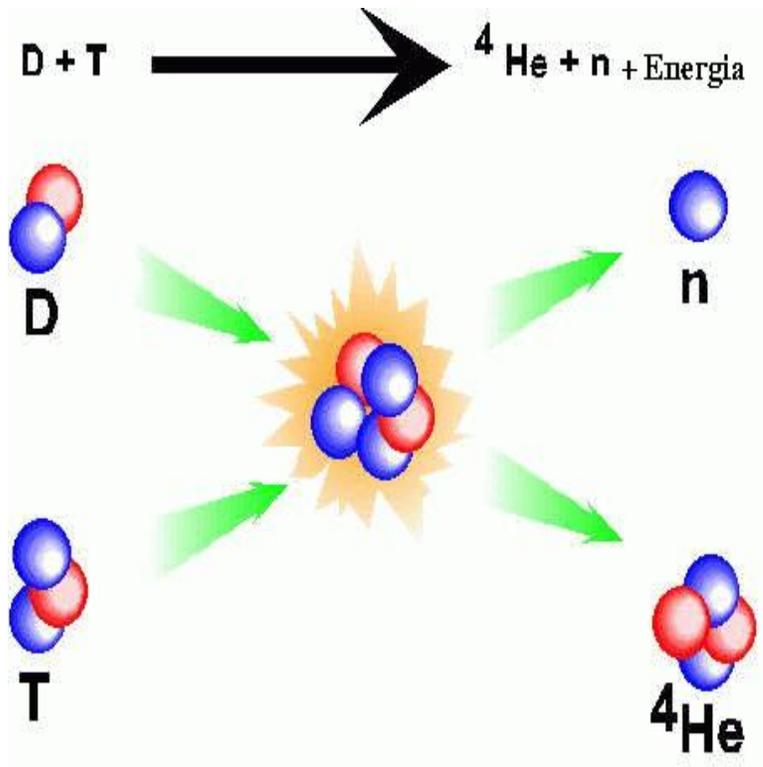


Figura 12.3: Esquema de fusão nuclear.

12.4.4 Fusão Nuclear

Processo no qual elementos leves se combinam para formar elementos mais pesados, liberando energia. O exemplo mais comum é a fusão que ocorre nas estrelas. No núcleo do Sol, a uma temperatura de 10 a 15 milhões de graus Celsius, hidrogênio é convertido em hélio produzindo energia suficiente para sustentar a vida na Terra.

Elementos com massa atômica menor ou igual a 56 (Fe) podem sofrer reações de fusão exotérmicas, enquanto que elementos com massa atômica maior ou igual a 56 podem sofrer reações de fissão exotérmicas.

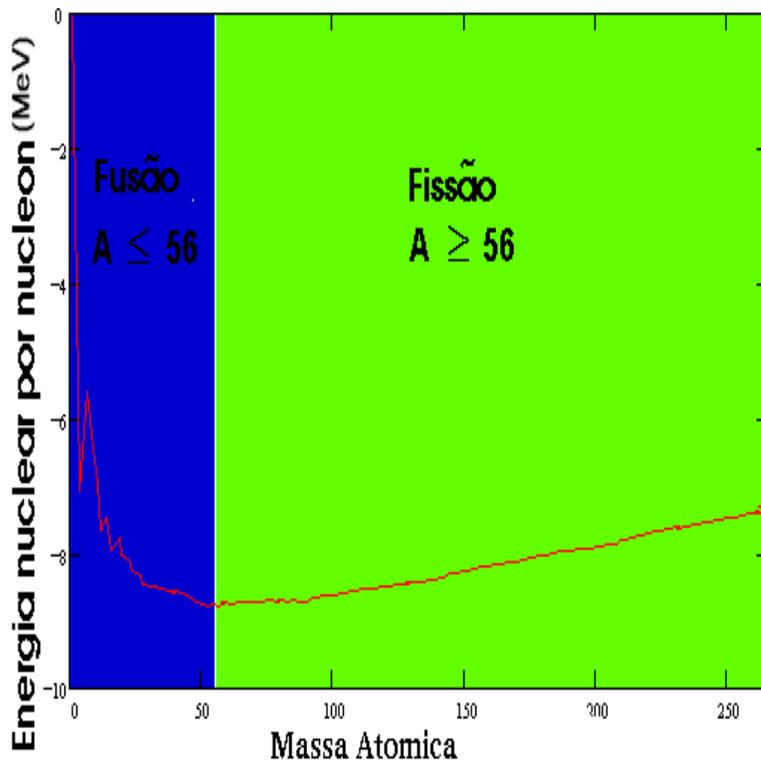


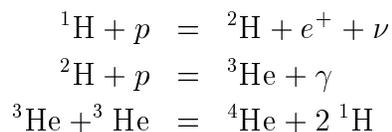
Figura 12.4: Energia de ligação por nucleon (p ou n) para a fissão e a fusão.

Exemplo 3:

A fonte mais importante de energia no Sol, e na maioria das estrelas é a queima nuclear de prótons para formar hélio. A energia liberada por átomo de He formado pode ser calculada da variação líquida da massa de repouso da reação $4p + 2e^-$, assim temos

$$4m_p + 2m_e - M(^4\text{He}) = 4 \times (1,6725 \times 10^{-24}\text{g}) + 2 \times (0,91 \times 10^{-27}\text{g}) - 6,647 \times 10^{-24}\text{g} \\ \approx 0,045 \times 10^{-24}\text{g} \approx 50 m_e = 50 (0,511 \text{ MeV}/c^2) \rightarrow 25 \text{ MeV}/c^2.$$

Comentário: A temperatura no centro do Sol é $\sim 2 \times 10^7$ K. Acredita-se que nesta temperatura os processos nucleares sejam dominados pelos seguintes conjuntos de reações:



O efeito líquido consiste em queimar hidrogênio para produzir ${}^4\text{He}$. Note que um neutrino é produzido no 1.º estágio, logo o Sol é uma intensa fonte de neutrinos. Neutrinos

interagem muito fracamente de modo que quase todos os neutrinos produzidos nas estrelas pelas reações nucleares escapam para o espaço. Podem levar consigo até 10 % da energia emitida pelo Sol.