



INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Estudo de Emaranhamento no Oscilador Paramétrico Ótico Não-Degenerado Acima do Limiar

ALESSANDRO DE SOUSA VILLAR

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física da Universidade de São Paulo
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Ciências

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO ALBERTO NUSSENZVEIG

Banca Examinadora:

PROF. DR. JOSIF FRENKEL (IF-USP)

PROF. DR. PAULO HENRIQUE SOUTO RIBEIRO (IF-UFRJ)

PROF. DR. PAULO ALBERTO NUSSENZVEIG (IF-USP)

São Paulo, 16 de março de 2004.

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Villar, Alessandro de Sousa

Estudo de Emaranhamento no Oscilador Paramétrico
Ótico Não-degenerado acima do Limiar.
São Paulo, 2004.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Ótica Quântica;
2. Oscilador Paramétrico Ótico;
3. Compressão de Ruído Quântico;
4. Emaranhamento;
5. Ruído de Fase.

USP/IF/SBI-019/2004

Resumo

A compressão nas flutuações da diferença de intensidades dos feixes sinal e complementar gerados por um OPO acima do limiar foi medida já há algum tempo e constituiu um dos principais interesses nestes sistemas. Emaranhamento entre esses feixes, entretanto, ainda não foi experimentalmente demonstrado em circunstâncias normais de operação acima do limiar (feixes não-degenerados em frequência).

Usando um critério de não-separabilidade entre sistemas contínuos, buscamos verificar se a variância de um par de operadores tipo EPR, a diferença de intensidades e a soma das fases de sinal e complementar, pode violar uma desigualdade suficiente para caracterizar emaranhamento. Após um estudo teórico, verificamos que isto pode de fato ocorrer numa região de parâmetros experimentalmente acessível.

A medida não foi realizada até hoje devido à dificuldade em se medir quadratura fase, o que, neste caso, exigiria o uso de osciladores locais em frequências distintas. Motivados por isso, propomos uma montagem experimental que utiliza cavidades óticas para projetar ruído de fase em ruído de intensidade, tornando dessa forma acessível a medida de anticorrelação de fase entre sinal e complementar.

Realizamos nossa proposta em caráter preliminar, obtendo resultados encorajadores, embora não conclusivos, que indicam a existência de emaranhamento.

Abstract

Squeezing in the intensity difference of signal and idler beams generated by an OPO operating above threshold was observed some time ago and presented one of the major attraction of this system. Entanglement between the macroscopic fields, however, has not yet been demonstrated in normal operation conditions above threshold (non-degenerate beams).

Using a non-separability criterion for continuous variables, we investigate whether the variances of a pair of EPR-like operators, difference of intensities and sum of phases of signal and idler, can violate a Bell-type inequality and hence characterize entanglement. After a theoretical study, we verified that entanglement can occur in an experimentally accessible region of parameters.

This measurement was not performed to date owing to the difficulty of measuring the phase quadratures, which usually requires the use of local oscillators with slightly different frequencies. Motivated by this, we propose an experimental setup that uses optical cavities to rotate the noise ellipse of each beam, projecting phase noise into intensity noise, thus allowing the experimental access to the phase quadratures.

We preliminarily implemented our proposal and obtained promising although not conclusive results, that indicate entanglement.

Agradecimentos

Estes últimos anos foram para mim muito ricos em aprendizado. Entretanto, tal riqueza jamais alcançaria tamanho esplendor não houvesse à minha volta pessoas ainda mais esplendorosas.

Agradeço primeiramente a meu orientador, Paulo. Seu modo informal de agir como um colega de seus estudantes em muito contribui para a profundidade de todas as discussões de nosso grupo. Além de muita Física, algumas de suas lições preciosas são a busca pela união entre teoria e experiência e a dedicação ao ensino de graduação, do qual pude participar e muito aprender.

Uma pessoa fundamental para a realização do presente trabalho foi Marcelo Martinelli, grande conhecedor do OPO e excelente físico, e por isso merecedor de meu mais profundo respeito. A ele agradeço pela iniciação no OPO, tanto experimental quanto teórica, e pela sempre esclarecedora orientação em muitos assuntos específicos: a ele devo muito do que aprendi.

As medidas preliminares de emaranhamento que realizamos não seriam possíveis sem a participação de meus colegas Luciano e Katiúscia, com quem sempre tive bons momentos. Agradeço a Sebastião Simionatto pela grande ajuda para “pilotar” o OPO enquanto a ótica era alinhada. A indelével presença de meu colega Aguirre, trazido ao Brasil pelos bons ventos do Chile, também não pode ser dada ao olvido.

Expresso ainda meus agradecimentos aos membros da banca examinadora, Profs. Frenkel e Paulo Henrique, cujas participações com perguntas e críticas permitiram tornar melhor a presente dissertação.

Agradeço também às pessoas que, com seus trabalhos, sempre nos deram o necessário respaldo institucional, como as secretárias do Departamento de Física Experimental (Edi e Ivanei), o pessoal da Comissão de Pós-Graduação (Francisleine, Éber, Camila, Cláudia e Prof. Corbani) e da Oficina Mecânica Geral (Otávio e Donato).

Além destas, muito devo a professores com quem tive o prazer de trabalhar como monitor de disciplinas da graduação: Profs. Hugo Franco, Renata Funchal e José Hirata.

A meu primeiro mentor acadêmico, Prof. Nelson Vani Leister, exprimo meus mais profundos carinho e admiração: muito importante foi nossa convivência durante meus anos de iniciação científica.

Por fim, embora não menos importante, sou grato a todas as pessoas cujas ações, em estranha conjunção, positivas ou negativas, desenharam meus caminhos, com muitas, ou poucas, vírgulas, e permitiram que eu me divertisse investigando a Natureza por pelo menos um breve espaço de minha vida: meus amados pais e antepassados, a quem palavras são mais que supérfluas, minha tia, que me forneceu guarida em uma estranha cidade real em meu primeiro ano de vôo, e meus velhos amigos de infância e de graduação, que se dissiparam no tempo e seguiram seus diversos caminhos (moda, direito, culinária, residência hospitalar, informática ou simplesmente o Indefinido), distantes no espaço mas próximos na memória e no coração.

CAPÍTULO XXI

De como filosofam Cândido e Martinho ao avistarem a costa francesa.

[...]

— *A propósito – disse Cândido –, acha que a terra foi primitivamente um mar como se afirma nesse cartapácio que pertence ao capitão?*

— *Não creio absolutamente nisso – respondeu Martinho –, nem tampouco em nenhuma dessas fantasias que nos têm impingido ultimamente.*

— *Mas para que fim foi então formado este mundo? – indagou Cândido.*

— *Para nos enraivecer – respondeu Martinho.*

— *Não se admira o senhor do caso que lhe contei, daquelas raparigas do país dos orelhões, que amavam a uns macacos?*

— *Absolutamente. Nada vejo de estranho em tal paixão. Vi tantas coisas extraordinárias, que para mim não há mais nada de extraordinário.*

— *Acredita – perguntou Cândido – que os homens se hajam sempre massacrado, como o fazem hoje? Que sempre tenham sido mentirosos, trapaceiros, pérfidos, ingratos, ladrões, fracos, inconstantes, covardes, invejosos, glutões, bêbedos, avaros, ambiciosos, sanguinários, caluniadores, debochados, fanáticos, hipócritas e tolos?*

— *E o senhor acredita – indagou por sua vez Martinho – que os gaviões tenham sempre devorado os pombos quando se lhes apresentava ocasião?*

— *Sim, certamente.*

— *E então – tornou Martinho –, se os gaviões sempre tiveram o mesmo caráter, como quer que os homens hajam mudado o seu?*

— *Oh! há alguma diferença – objetou Cândido – pois o livre arbítrio...*

Enquanto assim filosofavam, chegaram a Bordéus.

Voltaire, “Cândido (ou o Otimismo)” (1759)

(extraído de <http://www.ebooksbrasil.com/eLibris/candido.html>)

Dedicado à Divina Ironia, que tudo permeia.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Introdutórios	5
2.1	O Campo Eletromagnético Quântico	5
2.2	Teoria de Flutuações	14
2.3	Representações da Equação Mestra	15
2.3.1	Operador Densidade	16
2.3.2	Representações de Quase Probabilidade	18
2.3.3	Equação de Fokker-Planck	24
2.4	Emaranhamento	25
2.5	Cavidades Óticas e Feixes Gaussianos	26
2.5.1	Cavidade Fabry-Perot	27
2.5.2	Feixe Gaussiano	32
2.5.3	Feixes Gaussianos em Cavidades Óticas	35
2.5.4	Ótica Geométrica e Matriz ABCD	39
2.5.5	Acordo de Modo	42
3	O Oscilador Paramétrico Ótico	45
3.1	Formalismo Clássico	45
3.2	Formalismo Quântico	56
3.3	O OPO de São Paulo	61
4	Medida de Emaranhamento no OPO	63
4.1	Proposta	63
4.2	Critério DGCZ	64
4.3	Emaranhamento dos Feixes Sinal e Complementar	64
4.4	Rotação da Elipse de Ruído	68
4.5	Arranjo Experimental	74
4.6	Medidas Preliminares	75
4.6.1	Ruído da Subtração	78
4.6.2	Ruído da Soma	78
5	Conclusão e Perspectivas	81

Capítulo 1

Introdução

O Oscilador Paramétrico Ótico é um dispositivo capaz de gerar dois feixes tipo laser, chamados **sinal** e **complementar**, a partir de um feixe de bombeio. Sua montagem consiste basicamente de um cristal, que interage com a radiação de bombeio através de uma suscetibilidade não linear de segunda ordem $\chi^{(2)}$, disposto no interior de uma cavidade ótica. A partir de uma determinada intensidade de bombeio, o OPO oscila, o cristal atuando como meio de ganho para os feixes sinal e complementar e como meio de perda para o bombeio.

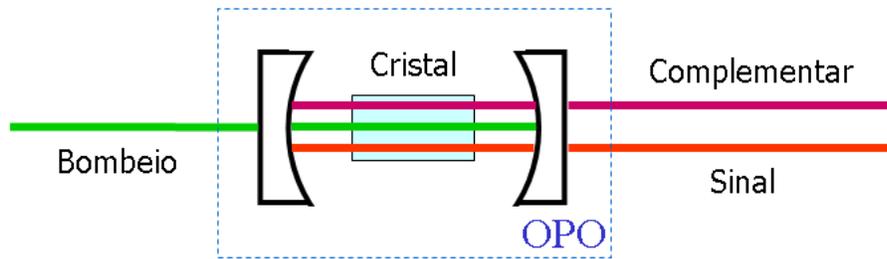


Figura 1.1: Elementos básicos do Oscilador Paramétrico Ótico.

O fenômeno físico subjacente a seu funcionamento é a **conversão paramétrica descendente**, que consiste basicamente na conversão de uma onda eletromagnética em duas outras com frequências menores através da suscetibilidade não linear de um cristal. Quando um OPO gera duas ondas com frequências diferentes, é dito não-degenerado. A conversão paramétrica deve respeitar a conservação da energia e do momento.

É possível mostrar que, caso se incida um laser com alta intensidade sobre o cristal, sem o uso da cavidade, os pares de fótons que satisfazem concomitantemente a conservação de energia e de momento possuem vetores de onda que formam dois cones no espaço (que podem eventualmente ser degenerados). Como a interação não linear é muito fraca, pouquíssimos fótons do bombeio são convertidos em pares nos modos sinal e complementar. Para a conversão tipo-II (utilizada em nosso OPO) o fóton do modo sinal possui polarização ortogonal àquela do fóton no modo complementar.

Quando se dispõe a cavidade em torno do cristal, seu efeito é realimentar apenas alguns modos do campo, aqueles para os quais ela é ressonante, criando condições favoráveis à amplificação dos campos sinal e complementar. Assim que as perdas nestes campos (geradas pela própria transmissão pelos espelhos da cavidade e por efeitos espúrios) se igualam ao ganho gerado pelo cristal, tem-se o estado estacionário, em que dois feixes macroscópicos tipo laser são efetivamente

criados pelo OPO, que pode então operar em regime contínuo.

Atualmente, nosso interesse neste sistema reside nas correlações de natureza quântica que surgem entre sinal e complementar, implícita no próprio mecanismo da conversão paramétrica descendente, que funciona fóton a fóton.

A correlação quântica significa que combinações dos dois feixes podem possuir flutuações menores que o limite clássico. Considere um feixe laser cujos fótons estão distribuídos ao acaso em seu interior. Caso sua intensidade, proporcional ao número de fótons, seja medida com um fotodetector, será percebida uma flutuação em seu valor médio causada por esta aleatoriedade. Se o número de fótons no feixe for muito grande, sua flutuação de intensidade relativa será muito pequena, embora ainda mensurável.

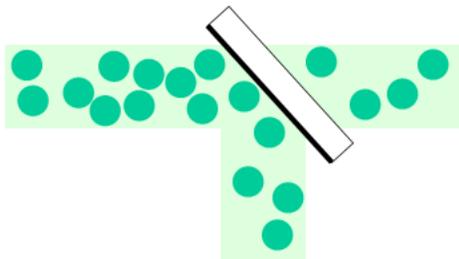


Figura 1.2: Separação de um feixe através de uma lâmina divisora de feixes.

Suponha que, a fim de eliminar estas flutuações, alguém separe o feixe em dois com uma lâmina divisora (figura 1.2) que transmite metade do feixe incidente e reflete a outra metade. Como os dois feixes são produto do mesmo feixe inicial, pode parecer intuitivo que suas flutuações temporais de intensidade serão idênticas e iguais à metade da flutuação do feixe inicial (ou seja, flutuações iguais se relativas às intensidades), de modo que a subtração de suas fotocorrentes será nula e sem flutuações.

Em termos fundamentais, porém, cada fóton do feixe inicial pode ser transmitido ou refletido com 50% de probabilidade, não podendo ser dividido ao meio. Assim, se o feixe inicial é formado por fótons distribuídos ao acaso em seu interior, os dois feixes gerados pela lâmina também assim serão. A subtração de suas fotocorrentes terá média nula e flutuações iguais à do feixe inicial. Esta flutuação é chamada “ruído quântico padrão”, ou *shot noise*. Sua origem, como se vê, é o caráter corpuscular da radiação¹, que só pode ser entendido no contexto da mecânica quântica² (do ponto de vista clássico, não existe justificativa para a existência de um ruído fundamental mínimo).

Em mecânica quântica, grandezas a serem medidas são representadas por operadores, que podem não comutar. Isso dá origem a relações de incerteza como a de Heisenberg, e, conseqüentemente, a grandezas conjugadas que não podem, por princípio, ser concomitantemente conhecidas com precisão arbitrária. O *shot noise* surge exatamente destes tipos de relações de incerteza, sendo definido como a flutuação do número de fótons de um estado coerente, como o que acabamos de descrever.

Os feixes gerados pelo OPO, entretanto, podem apresentar estatísticas de flutuação não

¹Por isso o nome *shot noise*, o ruído de um feixe de tiros dados ao acaso.

²A “inclusão” de ruído quântico na subtração dos dois feixes também pode ser entendida como causada pelo vácuo que entra pela porta vazia do divisor de feixes (figura 1.2). Assim, os novos feixes são resultantes não apenas da divisão do feixe inicial, mas também de sua mistura com o vácuo.

clássicas, ou seja, flutuar menos que o *shot noise*³ [1]. O processo que ocorre no OPO pode ser entendido como a conversão de um fóton do feixe de bombeio em um par de fótons, um no modo sinal e outro no complementar (figura 1.3). Dessa maneira, fótons são sempre criados em pares nos modos sinal e complementar, gerando uma correlação entre suas intensidades⁴. Quando suas fotocorrentes são subtraídas, o resultado é uma intensidade nula, *sem flutuação* no caso ideal (feixes gêmeos).

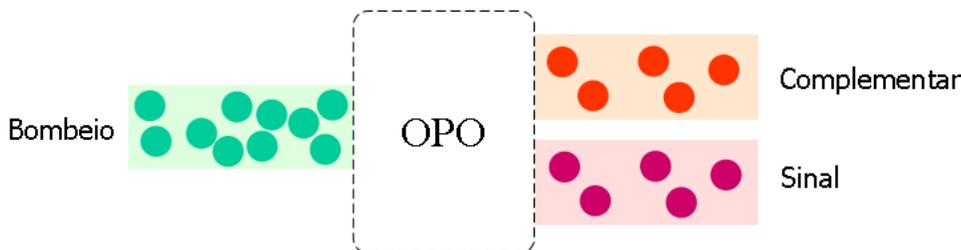


Figura 1.3: O processo de conversão paramétrica descendente gera correlações de intensidade entre os feixes sinal e complementar.

De fato, numa experiência real a flutuação nunca é nula, apesar de menor que o *shot noise* ou “comprimida”. Ocorre que, por causa de imperfeições, um fóton do par pode se perder, gerando uma perda de correlação entre os feixes. Se as perdas forem grandes, torna-se menos provável medir os dois fótons do par, e o ruído da subtração tende ao *shot noise*.

Outro fator que diminui a compressão é a própria cavidade do OPO. Como a cavidade aprisiona a luz por um tempo característico, é preciso esperar até que os dois fótons tenham dela saído para se ver a correlação nas intensidades dos feixes. Neste sentido, os feixes são gêmeos dentro de um intervalo de tempo determinado, ou seja, existe uma grande chance de se medir o segundo fóton do par após um intervalo característico em relação à medida do primeiro. Caso se tente medir correlação em tempos menores, a compressão tende a desaparecer.

Do ponto de vista quântico, observáveis do campo eletromagnético devem respeitar uma relação de incerteza. Para campos quase clássicos (muito intensos), a grandeza conjugada à intensidade é a fase. Assim, caso se medisse a subtração das fases dos feixes sinal e complementar, uma indeterminação completa seria o resultado no caso ideal. Diz-se que a subtração das fases possui excesso de ruído (ou seja, maior que o *shot noise*), infinito no caso de um OPO ideal.

Existe ainda uma correlação quântica mais profunda que a mera inibição de flutuação: o emaranhamento⁵. O emaranhamento ocorre quando dois sistemas estão atrelados de tal maneira que o conhecimento ou medida de um deles implica no conhecimento do outro; ou seja, o estado de apenas um dos sistemas não tem existência física: somente o sistema completo possui um estado.

Para sistemas contínuos, como no caso do OPO, um dos critérios, análogo a desigualdades do tipo Bell, para determinar se dois sistemas estão emaranhados é o critério de Duan e colaboradores [2]. Basicamente, se as variâncias de operadores combinados dos sistemas (par tipo EPR) violar uma desigualdade, então o emaranhamento está caracterizado.

³Para que uma grandeza flutue menos que o *shot noise*, sua grandeza conjugada deve flutuar mais.

⁴Isso permite dizer que, pela conservação da energia, a soma das frequências dos feixes sinal e complementar deve ser igual à frequência do feixe de bombeio.

⁵Mais profunda no sentido de que, como veremos no critério de inseparabilidade apresentado nesta dissertação, é necessário uma compressão concomitante em dois operadores tipo EPR para que haja emaranhamento.

No contexto do OPO, o par EPR a ser testado é a *subtração das intensidades* de sinal e complementar e a *soma de suas fases*. É simples mostrar que estas grandezas comutam e, por conseguinte, podem ser concomitantemente conhecidas com precisão arbitrária. Como já sabemos, a flutuação da subtração das intensidades é comprimida, e das fases, excessiva. As flutuações da soma das fases, entretanto, ainda não foram medidas acima do limiar para um OPO não-degenerado. Se a soma das fases flutuar suficientemente pouco, pode haver emaranhamento.

Nossas previsões teóricas apresentadas nesta dissertação permitem dizer que existe uma região de parâmetros experimentalmente acessível em que há emaranhamento.

Motivados por isso, apresentamos uma proposta original de medida na qual se busca caracterizar pela primeira vez o emaranhamento dos feixes sinal e complementar gerados num OPO **não-degenerado** acima do limiar⁶.

OPO's produzem feixes sinal e complementar tipicamente separados em frequência por alguns intervalos espectrais livres da cavidade [6], o que impossibilita o uso da técnica de detecção homodina para acessar a anticorrelação de fase entre os feixes. Por isso, propomos utilizar cavidades óticas para girar de modo síncrono as elipses de ruído dos feixes [7].

Basicamente, o campo refletido por uma cavidade linear contém uma fase relativa, dependente da frequência, em relação ao campo incidente. Como o ruído do feixe incidente possui várias frequências, cada uma destas componentes sofre um atraso em relação ao valor médio do campo. Se uma componente de frequência do ruído, inicialmente em fase com o valor médio, é atrasada de $\pi/2$, então ela passa a estar em quadratura. A componente em fase com o valor médio é chamada amplitude do campo, enquanto a componente em quadratura está relacionada a flutuações de fase. Portanto, a cavidade pode projetar ruído de fase em ruído de amplitude, proporcional ao ruído de intensidade, através do atraso dependente da frequência que ela impõe às componentes de frequência do ruído.

Realizamos nossa proposta em caráter preliminar, obtendo resultados encorajadores por indicar a existência de emaranhamento, embora ainda não conclusivos.

O uso de OPO's operando acima do limiar para produzir campos intensos emaranhados permite a demonstração de propostas no contexto de Informação Quântica, como, por exemplo, protocolos de criptografia [8].

⁶Embora emaranhamento tenha sido indiretamente inferido em OPO's forçados a oscilar **degenerados** acima do limiar através da injeção de uma semente [3], a técnica utilizada para caracterização de emaranhamento não permite seu uso em criptografia quântica. Também já foi demonstrado emaranhamento no OPO abaixo do limiar, tanto degenerado [4] quanto não-degenerado [5].

Capítulo 2

Conceitos Introdutórios

2.1 O Campo Eletromagnético Quântico

Na Teoria Quântica, o campo elétrico livre é formado por infinitos modos de osciladores harmônicos quânticos, cada qual relacionado a uma frequência própria ω .

A forma espacial dos modos depende das condições de contorno impostas no momento da quantização, sendo descrita por funções que devem satisfazer relações de ortogonalidade dentro do volume de quantização, ainda que infinito.

O caráter quântico do campo é evidenciado pelo número discreto de excitações comportado por cada modo. Estas excitações podem ser vistas como partículas do campo, os fótons, ou como ondas estacionárias com amplitudes restritas a valores discretos. Estas duas percepções do campo são complementares, cada qual facilitando a compreensão de tipos diferentes de fenômenos.

O operador campo elétrico livre é escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\ell}}{2\epsilon_0}} [a_{\ell} u_{\ell}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\ell}t} - a_{\ell}^{\dagger}(t) u_{\ell}^*(\vec{r}) e^{i\omega_{\ell}t}] \vec{\epsilon}. \quad (2.1)$$

A função $u_{\ell}(\vec{r})$ descreve o perfil espacial do campo no modo ℓ , enquanto $\vec{\epsilon}$ indica sua polarização. Os operadores de aniquilação e criação, a_{ℓ} e a_{ℓ}^{\dagger} destróem ou criam excitações no modo ℓ , os fótons, e satisfazem a relação de comutação

$$[a_{\ell}, a_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell, \ell'}. \quad (2.2)$$

É comum definirem-se as componentes de frequência positiva e negativa do campo elétrico, respectivamente

$$E^+(\vec{r}, t) \equiv i \sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\ell}}{2\epsilon_0}} a_{\ell} u_{\ell}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\ell}t}, \quad E^-(\vec{r}, t) \equiv (E^+(\vec{r}, t))^{\dagger}. \quad (2.3)$$

Flutuações Quânticas do Campo

O operador número

$$N_\ell = a_\ell^\dagger a_\ell \quad (2.4)$$

está associado ao número de fótons do campo. Os estados que possuem número de fótons bem definido são os estados de Fock, ou estados número. São, por isso, autoestados do operador número

$$N_\ell |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.5)$$

em que n é inteiro e, portanto discreto. Os estados número são ortonormais e formam uma base,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \quad (2.6)$$

Como é intuitivo, o número de fótons possui relação com a intensidade do campo. De fato, o tratamento perturbativo pioneiro de Glauber [9] mostrou que o operador quântico associado a medidas tomadas por um fotodetector baseado no princípio de destruição de fótons é proporcional ao operador número. Embora esse tratamento não seja mais aplicável aos fotodetectores atuais por conta das altas eficiências de fotodeteção disponíveis, o resultado original de Glauber continua verdadeiro [10].

Desse modo, um estado número possui intensidade bem definida, e, assim, esta não flutua¹. Usando as conhecidas relações

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.7)$$

determina-se que

$$\langle N^2 \rangle = \langle n| a^\dagger a a^\dagger a |n\rangle = n^2 \implies \Delta^2 N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = 0, \quad (2.8)$$

ou seja, o número de fótons em um estado número é perfeitamente determinado.

Para que os estados número sejam completamente definidos, é preciso definir o estado de vácuo, o estado fundamental do oscilador harmônico, no qual o número de fótons é nulo, tal que

$$a |0\rangle = 0. \quad (2.9)$$

A partir das relações (2.7), qualquer estado número pode ser entendido como uma sucessão de criação de fótons a partir do estado de vácuo,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.10)$$

Os estados de Fock são muito úteis no tratamento teórico de problemas em ótica quântica, pois são autoestados da hamiltoniana livre do campo e formam uma base ortonormal, além de obedecerem a relações úteis como as (2.7). Entretanto, sua criação em laboratório é de extrema

¹Há sutilezas. Quando se realizam medidas em feixes laser com uso de fotodetectores, deve ser levado em conta o fato de ser o feixe formado por luz propagante, cujos fótons, apesar de existirem em número bem definido dentro de um certo volume do feixe, podem estar distribuídos ao acaso em seu interior. Desse modo, a intensidade é constante somente se o tempo de integração da fotocorrente pelo fotodetector é grande. No caso acima, estamos tratando de uma “caixa” com fótons e, portanto, de ondas estacionárias dentro de um volume de quantização bem definido. Para maiores detalhes, ver [11].

dificuldade, tornando-os por vezes menos interessantes que outras bases, como a base de estados coerentes.

Tendo em vista campos eletromagnéticos, um tipo de estado comumente escolhido pela natureza são os estados coerentes $|\alpha\rangle$, possuindo por isso forte analogia com estados clássicos². Sua nomenclatura se origina do fato de terem coerência em j -ésima ordem (j sendo qualquer número natural que se queira), o que só é satisfeito se a função de correlação do campo fatora [12], ou seja, se $|\alpha\rangle$ é autoestado do operador a ,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.11)$$

Podemos buscar escrever um estado coerente qualquer $|\alpha\rangle$ na base de estados número,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (2.12)$$

Usando as relações (2.7), determina-se uma relação de recorrência entre os coeficientes c_n da expansão. Após se normalizar o estado $|\alpha\rangle$, ele assume a forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.13)$$

Como o operador a não é hermitiano, o número α é complexo, podendo variar continuamente.

A expressão acima revela que os estados coerentes não possuem número de fótons bem determinado, a probabilidade $P(n)$ de se medir n fótons sendo dada por

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.14)$$

que é uma distribuição de Poisson com média $|\alpha|^2$ (figura 2.1).

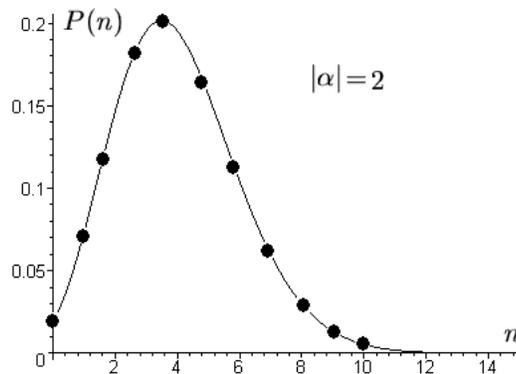


Figura 2.1: Os círculos indicam a probabilidade de se medir n fótons no estado coerente α com $|\alpha| = 2$. A curva contínua é uma poissoniana.

Esta seria a distribuição obtida caso se realizasse a mesma medida sobre muitos sistemas preparados no mesmo estado coerente. Para tal distribuição, é simples mostrar que sua variância

²De fato, uma das principais características da natureza é introduzir dissipação, e a dissipação tipicamente leva o campo em questão a um estado coerente (vácuo, por exemplo). Por exemplo, um feixe laser muito atenuado tende a uma estatística poissoniana de número de fótons. Isso de modo algum implica que estados coerentes não possam ser obtidos em sistemas altamente não-naturais, tal como um laser ideal muito acima do limiar.

é igual à média e, por isso, a variância de diversas medidas do número de fótons num estado coerente é $\Delta^2 N = \langle N \rangle = |\alpha|^2$.

É possível mostrar que a probabilidade de se medir n partículas em um feixe de corpúsculos clássicos não ordenados é também uma distribuição de Poisson: por este motivo, o ruído do estado coerente recebe o nome especial de *shot noise*, ou ruído padrão, pois está relacionado ao caráter corpuscular da radiação, os fótons.

Qualquer que seja o estado do feixe, fazendo-se um histograma da magnitude da fotocorrente obtém-se acesso à estatística de medidas do operador intensidade. Para um estado coerente, como vimos, a variância desta distribuição seria igual à média, caracterizando uma curva poissoniana. Quanto maior a intensidade do campo, maior a variância absoluta desta distribuição e menor a relativa. Para altas intensidades, sua forma tenderia a uma gaussiana, o que nos permite uma simplificação na caracterização do ruído do feixe: processos gaussianos são completamente determinados apenas pela média e variância, sendo desnecessários momentos de ordem superior [12].

Por isso, como sempre trabalhamos com feixes macroscópicos intensos, cuja fotocorrente nunca se anula e varia continuamente sem apresentar “saltos”, o ruído é representado por sua variância $\Delta^2 N$. No caso do *shot noise*, vimos que

$$\Delta^2 N = \langle N \rangle , \quad (2.15)$$

Portanto, o *shot noise* é proporcional à intensidade média do feixe, e deve ser nulo para intensidade nula. Este é o modo de se testar experimentalmente se a medida de *shot noise*, o ruído de referência para todas as medidas de flutuação, é confiável.

Como vimos, ao contrário de um estado coerente, um estado número medido por um tempo longo forneceria sempre a mesma fotocorrente, livre de flutuação. O histograma de fotocorrente seria uma função muito estreita. Estados com distribuição de fótons cuja variância é menor que sua média são ditos “sub-poissonianos”.

Esta determinação completa da intensidade de um estado número, característica de partículas presas numa caixa, gera uma indeterminação completa em sua fase, pois partículas não possuem fase. Vejamos como se pode justificar melhor esta idéia.

Quadraturas do Campo

Relacionadas à intensidade e à fase do campo, existem ainda outras grandezas que podem ser medidas: suas quadraturas. É fácil verificar que os operadores

$$X = a + a^\dagger \quad \text{e} \quad Y = -i(a - a^\dagger) \quad (2.16)$$

são hermitianos. Em analogia com um campo clássico, eles representam as amplitudes das componentes $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ do campo, e satisfazem a relação de comutação

$$[X, Y] = 2i , \quad (2.17)$$

e, portanto, a relação de incerteza

$$\Delta^2 X \Delta^2 Y \geq 1 . \quad (2.18)$$

Campos quânticos podem ser representados no espaço de fase, a chamada “representação de Fresnel” por sua analogia com amplitudes complexas clássicas [13]. Eliminando a dependência temporal, um campo clássico $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\phi_\varepsilon}$ pode ter sua amplitude e fase denotadas por um vetor

no plano complexo. A componente real deste vetor é a fração da amplitude do campo que multiplica o termo $\cos(\omega t)$, a parte imaginária estando em quadratura com esta componente, assim multiplicando o termo $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$.

No caso quântico, os eixos do plano estão relacionados aos operadores de quadratura X e Y acima definidos. Como se pode notar, existe uma arbitrariedade na definição das quadraturas, já que a fase do campo é sempre definida a menos de uma constante. Nesta situação, pode ser útil definir a quadratura generalizada X_θ ,

$$X_\theta = e^{-i\theta} a + e^{i\theta} a^\dagger, \quad (2.19)$$

cuja quadratura conjugada é $X_{\theta+\pi/2}$.

Esta arbitrariedade desaparece, por exemplo, quando se mede a diferença de fase entre dois ou mais campos, o que possui significado físico. A fim de explorar a existência de um referencial privilegiado de quadratura – o referencial do valor médio do campo – definiremos as *quadraturas amplitude e fase*, que permitem relacionar de modo simples flutuações de quadratura com flutuações de intensidade e fase (figura 2.2).

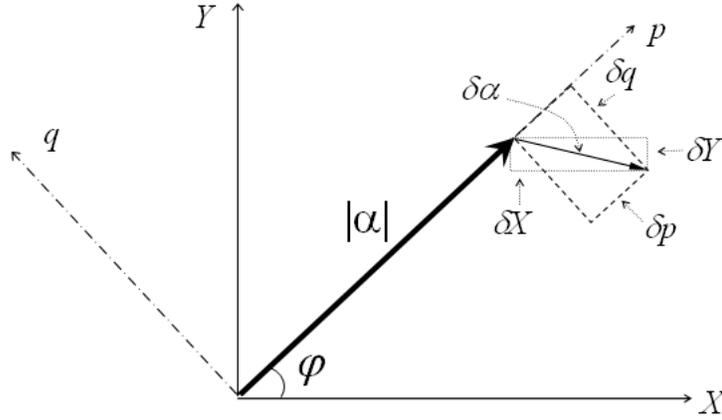


Figura 2.2: Quadraturas amplitude e fase do campo.

Se o campo possui fase média φ e amplitude média $|\alpha|$, tem-se que

$$\begin{aligned} p &\equiv e^{-i\varphi} a + e^{i\varphi} a^\dagger, \\ q &\equiv -i(e^{-i\varphi} a - e^{i\varphi} a^\dagger), \end{aligned} \quad (2.20)$$

teriam valores médios cujos eixos coincidiriam, respectivamente, com os tomados na direção da amplitude do campo e na direção ortogonal a esta. Por isso, chamaremos estes operadores de quadratura amplitude e quadratura fase.

Por exemplo, considerando um estado coerente com valor médio $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, tem-se

$$\langle p \rangle = 2|\alpha|, \quad \langle q \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Para analisar as flutuações de intensidade e fase em termos de flutuações das quadraturas amplitude e fase, seguimos a analogia com a descrição clássica, obtendo

$$\begin{aligned} \delta N &= \frac{\langle p \rangle}{2} \delta p, \\ \delta \phi &= \frac{2}{\langle p \rangle} \delta q, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que, para um operador genérico \hat{o} , tem-se $\delta\hat{o} = \hat{o} - \langle\hat{o}\rangle$.

A primeira destas equações pode ser mostrada invertendo-se as relações (2.20) para se representar a e a^\dagger em termos de p e q , e substituindo-se o resultado na definição do operador número,

$$N = \frac{1}{4}(p^2 + q^2), \quad (2.23)$$

da qual obtém-se diretamente que $\delta N = \langle p \rangle \delta p / 2$.

A segunda das equações (2.22), no entanto, guarda algumas sutilezas, pois não existe um operador hermitiano de fase do campo que seja simples e de fácil utilização, embora exista o operador de fase de Pegg e Barnett [14]. Apesar disso, é possível mostrar que a equação acima é válida no limite de campos intensos e cujas fases sofrem pequenas flutuações [13].

Conclue-se disso que a flutuação de intensidade, facilmente mensurável com o uso de fotodetetores, dá acesso direto à flutuação da quadratura amplitude, pois

$$\delta p = \frac{4}{\sqrt{\langle N \rangle}} \delta N. \quad (2.24)$$

Além disso, vê-se de (2.22) que a flutuação de intensidade cresce linearmente com a amplitude do campo, enquanto a flutuação de fase decresce com seu inverso.

Podemos calcular o comutador entre δN e $\delta\phi$,

$$[\delta N, \delta\phi] = [p, q] = 2i, \quad (2.25)$$

mostrando que estes operadores satisfazem a relação de incerteza³

$$\langle(\delta N)^2\rangle \langle(\delta\phi)^2\rangle \geq 1, \quad (2.26)$$

em que se usou $\Delta^2\hat{o} = \langle(\delta\hat{o})^2\rangle$.

Segundo esse ponto de vista, a flutuação de intensidade do campo e sua flutuação de fase são grandezas conjugadas. Isto está em acordo com o dito anteriormente sobre os estados número (figura 2.3), aparecendo mais claramente a total incerteza em sua fase em oposição à plena determinação de sua intensidade.

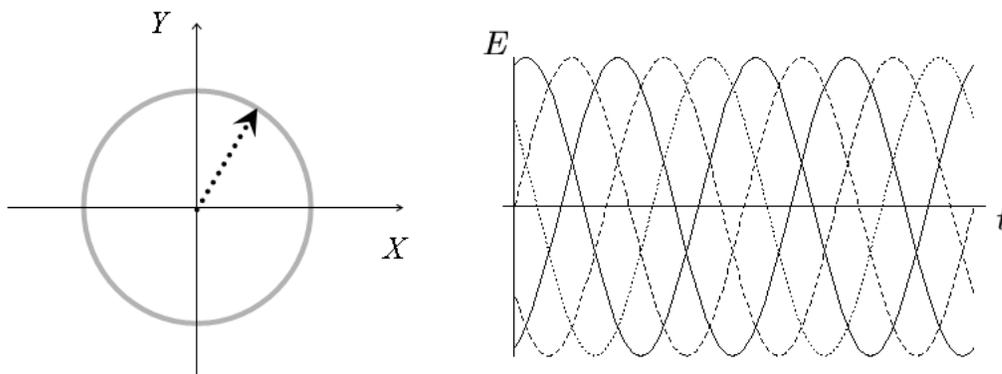


Figura 2.3: Representação de um estado número no espaço de fase e imagem correspondente da evolução temporal do campo.

³Ressaltamos que este não é um resultado formal, sendo válido apenas para campos intensos.

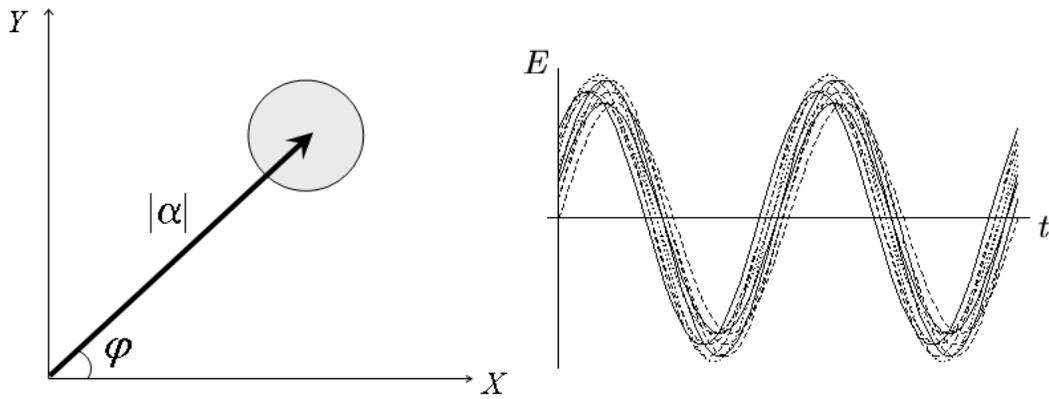


Figura 2.4: Representação de um campo coerente no espaço de fase e imagem correspondente de sua evolução temporal.

Os estados coerentes possuem flutuações igualmente distribuídas entre as quadraturas. Com o uso de (2.20), tem-se

$$\Delta^2 p = \Delta^2 q = 1, \quad (2.27)$$

para qualquer estado coerente.

Vemos que as flutuações de quadratura implicam que os estados coerentes são estados de incerteza mínima (aqueles para os quais vale a igualdade em (2.18)) com flutuações igualmente distribuídas entre as quadraturas. Estas são mais duas características que aproximam um estado coerente de um estado clássico.

Normalizar pela intensidade média o *shot noise* obtido a partir de (2.15) fornece diretamente o ruído das quadraturas de um estado coerente. Define-se assim o *shot noise* normalizado, que é uma forma simples de definir um padrão para as medidas de ruído. Desse modo, qualquer ruído medido pode ser normalizado pela intensidade média do feixe, e comparado facilmente com o *shot noise* normalizado.

Para os estados número, embora seja impossível definir as quadraturas em relação à fase do valor médio, determina-se que suas flutuações de quadratura generalizada são igualmente distribuídas,

$$\Delta^2 X_\theta = 2n + 1, \quad \forall \theta. \quad (2.28)$$

Entretanto, suas quadraturas apresentam excesso de ruído (maior que o *shot noise* normalizado) se $n \neq 0$. Esta equação nos mostra também as limitações da representação de Fresnel pois, neste caso, não há conexão física clara entre as flutuações de quadratura e flutuações de intensidade e fase.

Estado Coerente como Deslocamento do Vácuo

O caso particular de $\alpha = 0$ mostra ser o vácuo um estado coerente. Como o ruído de quadratura de um estado coerente independe da fase de α (que não é definida), o vácuo é representado no espaço de fase simplesmente como um círculo de ruído centrado na origem com raio unitário.

A única diferença entre o vácuo e qualquer outro estado coerente é o ponto no qual está centrado o círculo de ruído, dado pelo valor médio do estado. Um estado coerente pode então ser entendido como o vácuo deslocado da origem para um ponto qualquer do espaço de fase.

Matematicamente, isso se expressa com o uso do operador deslocamento $D(\alpha)$ [12],

$$D(\alpha) \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} , \quad (2.29)$$

tal que

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle . \quad (2.30)$$

O operador de deslocamento possui algumas propriedades muito úteis e facilmente demonstráveis,

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a} , \quad (2.31)$$

$$D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha) ,$$

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha ,$$

$$D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* ,$$

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\text{Im}\{\alpha\beta^*\}} .$$

Na primeira das relações acima, foi usada a identidade de Baker-Hausdorff entre operadores,

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} , \quad (2.32)$$

válida sempre que $[A, [A, B]] = 0$.

Estados Comprimidos

O chamado limite clássico para flutuações, o *shot noise*, pode ser violado por uma classe de estados quânticos. Como operadores devem respeitar regras de comutação que levam a princípios de incerteza, a diminuição do ruído de uma grandeza deve implicar no aumento de ruído na grandeza conjugada.

Os estados do campo para os quais uma das quadraturas flutua menos que o *shot noise* são chamados “estados comprimidos”. Sua representação de Fresnel difere da representação de um estado coerente apenas pelo ruído (figura 2.5).

Uma classe importante de estados comprimidos são aqueles com incerteza mínima. Assim como um estado coerente é obtido deslocando-se o vácuo, um estado comprimido de incerteza mínima é obtido através do deslocamento do vácuo comprimido. Analogamente ao vácuo coerente, estado fundamental do oscilador harmônico, o vácuo comprimido $|0, \zeta\rangle$ é representado por uma elipse de ruído centrada na origem, sendo matematicamente obtido pela ação do operador de compressão $S(\zeta)$, definido como

$$S(\zeta) = e^{(\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2})/2} , \quad \zeta = r e^{2i\phi} , \quad (2.33)$$

sobre o vácuo coerente,

$$|0, \zeta\rangle = S(\zeta)|0\rangle . \quad (2.34)$$

Deslocando-se o vácuo comprimido, obtém-se um estado comprimido de incerteza mínima $|\alpha, \zeta\rangle$,

$$|\alpha, \zeta\rangle = D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle . \quad (2.35)$$

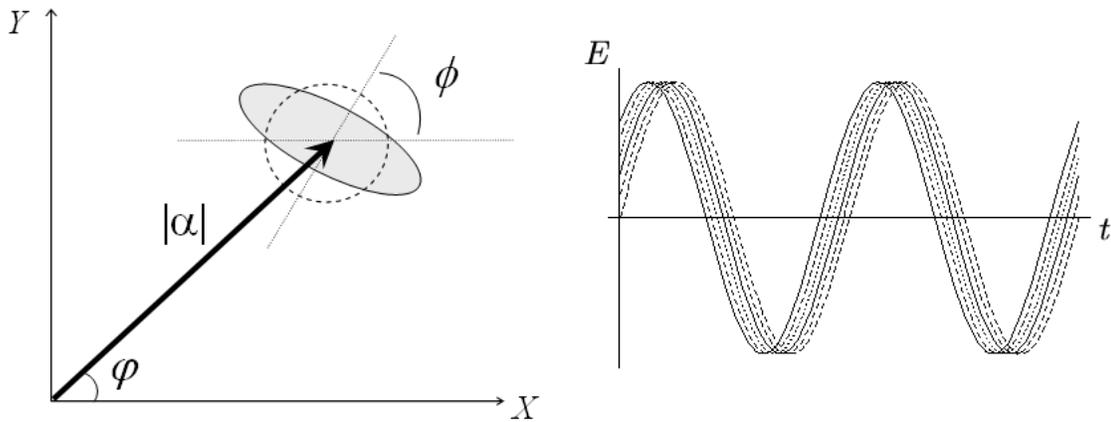


Figura 2.5: Representação de um estado comprimido no espaço de fase. À direita, imagem intuitiva de um estado comprimido em amplitude.

O operador $S(\zeta)$ também possui propriedades que tornam mais simples cálculos de média e variâncias de operadores do campo,

$$\begin{aligned}
 S^\dagger(\zeta) &= S^{-1}(\zeta) = S(-\zeta) , \\
 S^\dagger(\zeta)aS(\zeta) &= a \cosh r - a^\dagger e^{-2i\phi} \sinh r , \\
 S^\dagger(\zeta)a^\dagger S(\zeta) &= a^\dagger \cosh r - a e^{2i\phi} \sinh r , \\
 S^\dagger(\zeta)(X' + iY')S(\zeta) &= X_1 e^{-r} + iX_2 e^r ,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

em que $X' + iY' = (X + iY)e^{-i\phi}$ é um referencial de quadratura girado de ϕ em relação a X e Y definidos em (2.16).

Por exemplo, o número médio de fótons em $|\alpha, \zeta\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha, \zeta | N | \alpha, \zeta \rangle &= \langle 0, \zeta | D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) | 0, \zeta \rangle \\
 &= \langle 0 | S^\dagger(\zeta) a^\dagger S(\zeta) S^\dagger(\zeta) a S(\zeta) | 0 \rangle + |\alpha|^2 \\
 &= \langle 0 | (a^\dagger \cosh r - a e^{2i\phi} \sinh r) (a \cosh r - a^\dagger e^{-2i\phi} \sinh r) | 0 \rangle + |\alpha|^2 \\
 &= |\alpha|^2 + \sinh^2 r .
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

De maneira análoga, calculam-se as relações

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 N &= |\alpha \cosh r - \alpha^* e^{2i\phi} \sinh r|^2 + 2 \cosh^2 r \sinh^2 r , \\
 \Delta X' &= e^{-r} , \quad \Delta Y' = e^r .
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Disto se vê que o ângulo ϕ fornece a inclinação do eixo menor da elipse de ruído em relação ao eixo da quadratura X , enquanto o parâmetro r regula o nível de compressão e excesso de ruído das quadraturas X' e Y' .

O uso das quadraturas amplitude p e fase q definidas em relação ao valor médio permite novamente relacionar de maneira muito simples flutuações de quadratura com flutuações de intensidade do campo. Colocando em evidência $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$ na primeira das equações (2.38), obtém-se

$$\Delta^2 N = |\alpha|^2 |\cosh r - e^{2i(\phi-\varphi)} \sinh r|^2 + 2 \cosh^2 r \sinh^2 r , \tag{2.39}$$

cujos mínimos correspondem à situação $\phi = \varphi$, e máximos, a $\phi = \varphi + \pi/2$. Isto é, o mínimo de flutuações de intensidade ocorre quando o eixo *menor* da elipse de ruído (flutuação mínima da

quadratura amplitude p) está alinhado com o valor médio do campo, enquanto o máximo ocorre sempre que o eixo *maior* da elipse (flutuação máxima de p) se alinha ao valor médio.

Um curioso caso particular de estados comprimidos de incerteza mínima é o próprio vácuo comprimido. Impondo $\alpha = 0$ em (2.37), vê-se que seu número médio de fótons é não nulo ⁴. Este é o estado do campo saído de um OPO degenerado abaixo do limiar de oscilação [12].

Entretanto, como estamos interessados em feixes intensos, é mais interessante considerarmos a situação em que $|\alpha|^2 \gg 1$, de tal forma que os termos que não multiplicam $|\alpha|^2$ possam ser desprezados. Neste limite recupera-se o significado total da representação de Fresnel.

Mostraremos que os feixes produzidos no OPO são correlacionados de tal forma que o ruído da subtração de suas fotocorrentes é menor que o *shot noise*, mesmo na situação em que cada feixe individual possui excesso de ruído [16]. A subtração das amplitudes, portanto, se encontra num estado comprimido.

2.2 Teoria de Flutuações

Uma possibilidade de caracterizar o ruído é medir sua variância. Porém, uma caracterização mais completa pode ser obtida através da função de autocorrelação temporal $C(t, t')$ [11], definida, para um sinal de fotocorrente $i(t)$, como

$$C(t, t') = \langle i(t)i(t') \rangle - \langle i(t) \rangle \langle i(t') \rangle . \quad (2.40)$$

Para processos estacionários, com os quais estaremos trabalhando, a função de autocorrelação só depende da diferença de tempos $\tau = t - t'$, ou seja, $C(t, t') = C(\tau)$, não dependendo do instante inicial.

A função de correlação quantifica o quanto um sistema está correlacionado a outro. No caso tratado, ela determina o quanto o sinal de fotocorrente num tempo qualquer se assemelha a si num instante posterior. Isso dá a idéia de periodicidade, e é de fato útil determinar quais componentes de frequência estão presentes no ruído e com que magnitude.

Para tanto, toma-se a transformada de Fourier da função de autocorrelação, definindo-se o chamado espectro de ruído $S(\Omega)$, ⁵

$$S(\Omega) = \int C(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau . \quad (2.41)$$

O espectro de ruído da flutuação da fotocorrente fornece a potência do ruído na frequência Ω , igual ao quadrado do módulo do coeficiente da senóide com frequência Ω no espaço de Fourier. Estes coeficientes são um contínuo, dados pela transformada de Fourier,

$$\delta i(\Omega) = \int \delta i(t) e^{i\Omega t} dt , \quad (2.42)$$

em que $\delta i(t) = i(t) - \langle i(t) \rangle$. Portanto, tomando a transformada de Fourier inversa,

$$\delta i(t) = \int \delta i(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} . \quad (2.43)$$

É simples mostrar que, como já dito,

$$\langle \delta i(\Omega) [\delta i(\Omega')]^* \rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') S(\Omega) , \quad (2.44)$$

⁴A curiosa distribuição do número de fótons de um estado comprimido, evidência de seu caráter genuinamente quântico, pode ser encontrada em [15].

⁵Quando não especificado, integrais têm como limites $-\infty$ e $+\infty$.

ou seja, $S(\Omega)$ é proporcional a $\langle |\delta i(\Omega)|^2 \rangle$ caso se elimine a divergência desta quantidade [11]. De fato, fisicamente esta divergência nunca existe, pois se mede o espectro de ruído num intervalo de tempo finito, além de se usar um filtro em frequência. A partir desta expressão, vê-se que a variância é simplesmente a função de autocorrelação calculada em $\tau = 0$,

$$\Delta^2 i = \langle \delta^2 i(t) \rangle = C(\tau = 0) = \int S(\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (2.45)$$

Para fazer a transposição para o caso quântico, consideremos um operador $\hat{o}(t)$. Definimos sua flutuação como

$$\delta\hat{o} = \hat{o} - \langle \hat{o} \rangle. \quad (2.46)$$

A transformada de Fourier deste operador é então

$$\delta\hat{o}(\Omega) \equiv \int \delta\hat{o}(t) e^{i\Omega t} dt, \quad \implies \delta\hat{o}(t) = \int \delta\hat{o}(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad (2.47)$$

da qual segue que

$$\delta\hat{o}^\dagger(t) = \left(\int \delta\hat{o}(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right)^\dagger = \int \delta\hat{o}^\dagger(\Omega) e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \quad \implies \delta\hat{o}^\dagger(\Omega) = \int \delta\hat{o}^\dagger(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad (2.48)$$

Supondo que o operador $\hat{o}(t)$ é hermitiano, então necessariamente vale que

$$\delta\hat{o}(t) = \delta\hat{o}^\dagger(t) \quad \implies [\delta\hat{o}(\Omega)]^\dagger = \delta\hat{o}(-\Omega) \quad (2.49)$$

Analogamente, seu espectro de ruído $S_{\hat{o}}$ é definido por [17, 18, 19]

$$\langle \delta\hat{o}(\Omega) \delta\hat{o}(-\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') S_{\hat{o}}(\Omega). \quad (2.50)$$

O espectro de ruído é a grandeza física medida pelos aparelhos analisadores de espectro. Estes aparelhos também são capazes de fornecer a evolução temporal da potência de ruído em uma componente de frequência específica.

2.3 Representações da Equação Mestre

A base de estados número, apesar de formalmente utilizada em muitos cálculos em ótica quântica por diversos motivos, pode não ser uma boa escolha para se representar estados quânticos em algumas situações.

Frequentemente estamos interessados em determinar teoricamente o ruído de um sistema quântico em seu estado estacionário de equilíbrio. Usar a base de estados de Fock neste caso seria desnecessariamente trabalhoso, uma vez que, como esses estados não possuem individualmente fases bem definidas, qualquer tentativa de se representar ruído de fase requereria o uso da expansão completa, portanto infinita, do estado sob estudo na base de estados número.

Um método alternativo de se representar um estado quântico é através das representações na base de estados coerentes [10, 12, 20]. Existem diversas possibilidades de representação nesta base por causa da supercompleteza destes estados. De fato, usando a expansão de um estado $|\alpha\rangle$ na base de estados número dada em (2.14), vê-se que

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}, \quad (2.51)$$

e, integrando sobre todo o plano complexo com o uso de coordenadas polares, tem-se

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \pi, \quad (2.52)$$

em que $d^2\alpha = d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\})$.

2.3.1 Operador Densidade

As representações de quase probabilidade que veremos a seguir representam o operador densidade ρ do sistema, equivalente ao vetor de estado. Este operador aparece no contexto de problemas em que é útil determinar a evolução de uma mistura de estados, em contraposição a um único vetor de estado. Se um sistema se encontra num estado quântico puro $|\Psi\rangle$, então ρ é um projetor, definido como

$$\rho \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (2.53)$$

Seu uso é particularmente útil em problemas nos quais o estado quântico do sistema não é puro, mas consiste de uma mistura estatística de estados quânticos, caso em que ρ assume a forma

$$\rho = \sum_{\ell} p_{\ell} |\psi_{\ell}\rangle\langle\psi_{\ell}|, \quad \sum_{\ell} p_{\ell} = 1. \quad (2.54)$$

A mistura estatística significa que o estado $|\Psi\rangle$ do sistema pode ser algum dos estados quânticos $|\psi_{\ell}\rangle$ com probabilidades clássicas $p_{\ell} \geq 0$, em contraposição a um estado puro, em que o sistema se encontra numa superposição coerente de estados $|\psi_{\ell}\rangle$.

Por exemplo, considere um único fóton sendo incidido sobre duas fendas [21]. Caso o fóton não seja medido no caminho, a probabilidade de que atravesse uma das fendas é meio, e, como o caminho seguido é totalmente indeterminado, a probabilidade de medi-lo na tela de projeção após as fendas sofre efeito de interferência entre os dois caminhos possíveis.

Sejam $|1\rangle$ e $|2\rangle$ os caminhos que levam o fóton até o anteparo através da fenda 1 ou 2, respectivamente, e $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, as defasagens sofridas pelo fóton ao passar pela fenda 1 ou 2 até chegar ao ponto x sobre a tela de projeção. O vetor de estado $|\Psi\rangle$ do fóton é dado por

$$|\Psi(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi_1(x)}|1\rangle + e^{i\phi_2(x)}|2\rangle). \quad (2.55)$$

O número médio de fótons em x é, a menos de uma constante de normalização,

$$\begin{aligned} \langle\Psi(x)|N|\Psi(x)\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 1|N|1\rangle + \langle 2|N|2\rangle + 2\cos[\phi_1(x) - \phi_2(x)]\langle 1|N|2\rangle) \\ &= 1 + \cos[\phi_1(x) - \phi_2(x)]\langle 1|N|2\rangle, \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que se supôs $\langle 1|N|2\rangle$ real. É possível mostrar que a média acima poderia ser calculada através da identidade, válida para qualquer operador \hat{o} ,

$$\langle\hat{o}\rangle = \text{Tr}\{\hat{o}\rho\}. \quad (2.57)$$

Vemos no termo $\cos[\phi_1(x) - \phi_2(x)]$ a interferência entre os caminhos. O número que fornece a amplitude deste cosseno é o elemento diagonal de ρ entre os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

Se, por outro lado, o fóton é medido para se saber por qual fenda passou, seu estado colapsa e, embora a probabilidade de que um fóton seja detetado em determinada fenda ainda seja meio, o fenômeno é descrito como se cada fóton se encontrasse numa mistura estatística, portanto clássica, inexistindo a interferência. É preciso usar o operador densidade neste caso. O estado do fóton é

$$|\Psi\rangle = \begin{cases} e^{i\phi_1(x)}|1\rangle & \text{com probabilidade } 1/2, \\ e^{i\phi_2(x)}|2\rangle & \text{com probabilidade } 1/2. \end{cases} \quad (2.58)$$

Portanto seu operador densidade se escreve

$$\rho = \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|. \quad (2.59)$$

Usando, (2.57), tem-se, a menos de um fator de normalização,

$$\langle N \rangle(x) = \text{cte} . \quad (2.60)$$

Ou seja, o número médio de partículas medidas na posição x da tela independe de x , sendo uma constante.

A fim de se observar a diferença entre este último operador densidade, resultante de mistura estatística, e um operador puro, calculemos o operador ρ do exemplo anterior, em que havia interferência,

$$\rho = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + e^{i(\phi_1(x)-\phi_2(x))}|1\rangle\langle 2| + e^{-i(\phi_1(x)-\phi_2(x))}|2\rangle\langle 1| . \quad (2.61)$$

Neste caso aparecem termos cruzados, os responsáveis por fenômenos de interferência. Por isso estes termos são chamados *coerências*.

Para se distinguir facilmente entre estados puros e misturas estatísticas, basta utilizar o fato [22]

$$\text{Tr}\{\rho^2\} \begin{cases} = 1 & \text{se o estado é puro ,} \\ < 1 & \text{para misturas estatísticas.} \end{cases} \quad (2.62)$$

Além disso, sempre se tem $\text{Tr}\{\rho\} = 1$, o que significa que o sistema está, com probabilidade unitária, em algum estado quântico.

Traço Parcial e Decaimento

O operador densidade também se mostra poderoso no tratamento de sistemas em interação com um reservatório. Um exemplo de tal situação são os modos do campo eletromagnético no interior de uma cavidade ótica com espelhos altamente refletivos. A luz em seu interior forma aproximadamente um modo estacionário do campo, ligado fracamente ao universo exterior pelas pequenas transmissividades dos espelhos.

Caso se criem alguns fótons em um modo da cavidade, os mesmos irão “vazar” para o exterior: o modo interno decai. Observando o sistema todo, é certo que não há decaimento algum, o fóton apenas passa de um lugar para outro. O decaimento só ocorre quando se está interessado apenas no subsistema da cavidade. É em cálculos como esse que o operador densidade apresenta grande utilidade.

Considere um reservatório formado por um número muito grande de osciladores harmônicos (hamiltoniana H_R) com frequências próprias ω_j , e um subsistema formado por um oscilador harmônico (hamiltoniana H_0) com frequência ω_0 , fracamente ligados pela hamiltoniana de interação V . Assim, a hamiltoniana total tem a forma

$$H = H_0 + H_R + V , \quad V(t) = \hbar [a^\dagger \Gamma(t) e^{i\omega_0 t} + a \Gamma^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}] , \quad (2.63)$$

em que a é o operador de criação do subsistema e b_j , do reservatório, sendo

$$\Gamma(t) = \sum_j g_j b_j e^{-i\omega_j t} , \quad (2.64)$$

e g_j , constantes de acoplamento reais.

A equação que fornece a evolução do operador densidade total ρ_T do sistema é deduzida a partir da equação de Schrödinger para vetores de estado,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_T = [H, \rho_T] . \quad (2.65)$$

Fazendo o comutador e usando o fato de que a interação é fraca [12], toma-se o traço parcial de ρ_T a fim de eliminar a informação sobre o estado do reservatório, para se obter o *operador densidade reduzido* ρ do subsistema,

$$\rho = \text{Tr}_\mu\{\rho_T\} = \sum_j \langle \mu_j | \rho_T | \mu_j \rangle , \quad (2.66)$$

em que foram denominados $|\mu_j\rangle$ os vetores da base de estados do reservatório.

A operação de traço parcial permite descrever apenas o subsistema de interesse. Comumente, o operador densidade reduzido é uma mistura estatística de estados.

Assim, supondo-se ainda que o reservatório é o vácuo, chega-se à equação de evolução para o subsistema ρ , denominada *equação mestra*,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = [H_0, \rho] + \Lambda \rho , \quad (2.67)$$

em que se definiu

$$\Lambda \rho \equiv \gamma(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) , \quad (2.68)$$

responsável pelo decaimento do subsistema.

Caso se queira incluir mais osciladores harmônicos no subsistema de interesse, desde que seu número seja muito menor que o número de osciladores do reservatório, basta adicionar hamiltonianas próprias e termos de decaimento para estes osciladores, além de eventuais hamiltonianas de interação. Como se vê, a generalização é simples.

2.3.2 Representações de Quase Probabilidade

Para se extrair resultados da equação mestra, é preciso transformá-la em equações para funções e números, o que se faz projetando-se ρ numa base. Como dissemos, usar a base de estados coerentes pode ser vantajoso.

A seguir, abordaremos as representações de quase probabilidade mais utilizadas no contexto do OPO, a representação P de Glauber-Sudarshan e a função de Wigner.

Representação P

A maneira mais simples de se tentar representar ρ na base de estados coerentes é fazê-lo em analogia ao usual para bases discretas,

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha , \quad (2.69)$$

em que a integral é feita sobre todo o plano complexo, e $d^2\alpha = d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\})$. Note que esta é uma espécie de representação nos elementos diagonais, pois o projetor usado é $|\alpha\rangle \langle \alpha|$, e não $|\alpha\rangle \langle \alpha'|$; isso só é possível por causa da supercompleteza dos estados coerentes.

Assim é definida a função P de Glauber [23] e Sudarshan [24], que não é necessariamente bem comportada para todos os tipos de estados [10, 12].

Note que

$$1 = \text{Tr}\{\rho\} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \sum_n \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha|\alpha\rangle , \quad (2.70)$$

em que foi usada a propriedade cíclica do traço, $\text{Tr}\{ABC\} = \text{Tr}\{CAB\} = \text{Tr}\{BCA\}$, de modo que

$$\int P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1, \quad (2.71)$$

a função $P(\alpha, \alpha^*)$ é normalizada.

Por causa destas características, $P(\alpha, \alpha^*)$ parece ter o papel de uma densidade de probabilidade. Entretanto, deve-se lembrar de que os estados coerentes não são ortogonais, o que inviabiliza esta interpretação. Além disso, $P(\alpha, \alpha^*)$ pode assumir valores negativos e altamente singulares.⁶

Por estes motivos, funções como $P(\alpha, \alpha^*)$ são denominadas representações de quase probabilidade. Apesar de possuírem propriedades intrínsecas a funções de densidade de probabilidade, abrigam concomitantemente características contrárias às mesmas.

Para se determinar a distribuição $P(\alpha, \alpha^*)$ a partir do operador densidade é preciso utilizar a função característica, definida como

$$\chi(\eta) = \text{Tr}\{e^{\eta a^\dagger - \eta^* a} \rho\}, \quad (2.72)$$

que também pode ser escrita como $\chi(\eta) = \text{Tr}\{D(\eta)\rho\}$, a média do operador de deslocamento, definido em (2.29). É comum definirem-se também a função característica em ordem normal e em ordem antinormal⁷, respectivamente

$$\begin{aligned} \chi_N(\eta) &= \text{Tr}\{e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} \rho\}, \\ \chi_A(\eta) &= \text{Tr}\{e^{-\eta^* a} e^{\eta a^\dagger} \rho\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

As relações entre funções características com ordenamentos diferentes podem ser deduzidas usando a identidade de Baker-Hausdorff (2.32).

Substituindo o operador densidade ρ por sua representação P equivalente (2.69), a função característica em ordem normal (2.74) pode ser escrita como

$$\chi_N(\eta) = \int \langle \alpha | e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a} | \alpha \rangle P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = \int e^{\eta \alpha^* - \eta^* \alpha} P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (2.74)$$

Tomando a transformada de Fourier inversa em duas dimensões, pode-se sempre calcular a função $P(\alpha, \alpha^*)$ como

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\alpha \eta^* - \alpha^* \eta} \chi_N(\eta) d\eta. \quad (2.75)$$

As equações abaixo fornecem exemplos de funções P para os estados coerente e número. Como se vê, elas assumem valores singulares mesmo para estados que se assemelham a configurações clássicas, como os coerentes. Essa é uma desvantagem da representação P .

$$\begin{aligned} \rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| &\implies P(\alpha, \alpha^*) = \delta^2(\alpha - \alpha_0) && \text{(estado coerente)}, \\ \rho = |n\rangle\langle n| &\implies P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{n!} e^{|\alpha|^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)^2 \delta^2(\alpha) && \text{(estado número)}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

⁶Ainda assim, existe um caso muito particular e restrito em que $P(\alpha, \alpha^*)$ se aproxima de uma densidade de probabilidade. Se dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha'\rangle$ são tais que $|\alpha| \ll |\alpha'|$, a ortonogonalidade é aproximadamente verificada (2.51); portanto, esta interpretação é possível se $P(\alpha, \alpha^*)$ é sempre positiva e varia lentamente nessas escalas.

⁷A ordem normal de um operador genérico \hat{o} função de a e a^\dagger , denotada por $:\hat{o}:$, significa que operadores de aniquilação devem ficar à direita de operadores de criação. Por exemplo, se $\hat{o} = a(a^\dagger)^2 a^3 a^\dagger$, tem-se $:\hat{o}:= (a^\dagger)^3 a^4$. O oposto caracteriza a ordem antinormal.

As funções características correspondentes são

$$\begin{aligned}\chi(\eta) &= e^{\eta\alpha^* - \eta^*\alpha} && \text{(estado coerente) ,} \\ \chi(\eta) &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(m!)^2 (n-m)!} |\eta|^{2m} && \text{(estado número) .}\end{aligned}\tag{2.77}$$

Outra característica da função $P(\alpha, \alpha^*)$ é atuar como uma densidade de probabilidade no cálculo de produtos de operadores do campo em ordem normal. De fato, $\langle (a^\dagger)^r a^s \rangle = \text{Tr}\{(a^\dagger)^r a^s \rho\}$, ou seja,

$$\langle (a^\dagger)^r a^s \rangle = \int (\alpha^*)^r \alpha^s P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha ,\tag{2.78}$$

valendo, portanto, a identidade

$$\langle (a^\dagger)^r a^s \rangle_\rho = \langle (\alpha^*)^r \alpha^s \rangle_P .\tag{2.79}$$

Desse modo, médias de operadores do campo em ordem normal usando o operador densidade são substituídas por médias dos números complexos α e α^* em $P(\alpha, \alpha^*)$, tornando os cálculos mais simples.

Representação P da Equação Mestra

Essa equivalência de cálculos no espaço de operadores utilizando-se ρ e no espaço de funções usando-se $P(\alpha, \alpha^*)$ é mais profunda: a própria equação de evolução de ρ , a equação mestra, pode ser equivalentemente convertida numa equação de evolução para $P(\alpha, \alpha^*)$ [10].

Definindo por conveniência os estados de Bargman

$$||\alpha\rangle \equiv e^{|\alpha|^2/2} |\alpha\rangle \quad \Longrightarrow \quad ||\alpha\rangle \langle\alpha|| = |\alpha\rangle \langle\alpha| e^{|\alpha|^2} ,\tag{2.80}$$

nota-se que, com o uso de (2.7), tem-se

$$\begin{aligned}a^\dagger ||\alpha\rangle &= \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha} ||\alpha\rangle .\end{aligned}\tag{2.81}$$

De modo análogo,

$$\langle\alpha|| a = \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \langle\alpha|| .\tag{2.82}$$

Assim, dada a representação P ,

$$\rho = \int ||\alpha\rangle \langle\alpha|| e^{-|\alpha|^2} P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha ,\tag{2.83}$$

deduz-se que⁸

$$a^\dagger \rho = \int \frac{\partial}{\partial\alpha} (||\alpha\rangle \langle\alpha||) e^{-|\alpha|^2} P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha ,\tag{2.84}$$

e, integrando por partes,

$$a^\dagger \rho = \int ||\alpha\rangle \langle\alpha|| e^{-|\alpha|^2} (\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}) P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha .\tag{2.85}$$

⁸Note que $\frac{\partial}{\partial\alpha} \langle\alpha|| = 0$.

Fazendo um cálculo análogo para a , obtém-se a seguinte tabela de correspondência:

$$\begin{aligned}
a\rho &\leftrightarrow \alpha P(\alpha, \alpha^*), \\
a^\dagger\rho &\leftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) P(\alpha, \alpha^*), \\
\rho a &\leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right) P(\alpha, \alpha^*), \\
\rho a^\dagger &\leftrightarrow \alpha^* P(\alpha, \alpha^*).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

A representação P foi associada à função característica em ordem normal e ao cálculo de produtos de operadores do campo em ordem normal, enquanto as grandezas experimentalmente acessíveis à medida aparecem geralmente em ordem simétrica por serem hermitianas. Além disso, foi mostrado que, para os estados que melhor representam configurações clássicas, os estados coerentes, a função $P(\alpha, \alpha^*)$ assume formas singulares.

Por estes motivos e por outros ainda não mencionados, a representação P é mais uma ferramenta matemática do que uma forma intuitiva de se entender os fenômenos e estados quânticos.

Existe uma função de quase probabilidade que preenche esta lacuna, tendo sido de fato criada com base em analogias com a descrição da mecânica clássica, a função de Wigner.

Função de Wigner

A função de Wigner foi a primeira distribuição de quase probabilidade introduzida na mecânica quântica [25]. Ela é mais facilmente definida como a transformada de Fourier da função característica em ordem simétrica (equação (2.74)),

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi(\eta) d^2\eta. \tag{2.87}$$

A função de Wigner sempre existe, sem a necessidade de uso de funções generalizadas, mas não é necessariamente positiva, sendo por isso também impossível interpretá-la como uma densidade de probabilidade no caso geral. Sua relação com a função $P(\alpha, \alpha^*)$ é obtida substituindo na equação acima $\chi(\eta)$ por $\chi_N(\eta)$,

$$\begin{aligned}
W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi_N(\eta) e^{-|\eta|^2/2} d^2\eta \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr}\{\rho e^{\eta(a^\dagger - \alpha^*)} e^{-\eta^*(a - \alpha)}\} e^{-|\eta|^2/2} d^2\eta \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int P(\beta) e^{\eta(\beta^* - \alpha^*) - \eta^*(\beta - \alpha) - |\eta|^2/2} d^2\eta d^2\beta,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

cuja integral pode ser calculada usando a identidade

$$\frac{1}{\pi} \int e^{-\lambda|\eta|^2 + \mu\eta + \nu\eta^*} d^2\eta = \frac{1}{\lambda} e^{\mu\nu/\lambda}, \tag{2.89}$$

válida se $\text{Re}\{\lambda\} > 0$, o que fornece

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \int P(\beta) e^{-2|\beta - \alpha|^2} d^2\beta. \tag{2.90}$$

A função de Wigner serve como densidade de probabilidade no cálculo de momentos dos operadores do campo em ordem simétrica⁹, que são operadores hermitianos,

$$\langle \{a^r (a^\dagger)^s\} \rangle = \int \alpha^r (\alpha^*)^s W(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \quad (2.91)$$

Por isso, a função de Wigner tem um apelo clássico maior que as outras distribuições. Além disso, contornos apropriados da função de Wigner fornecem os círculos e elipses de ruído da representação de Fresnel.

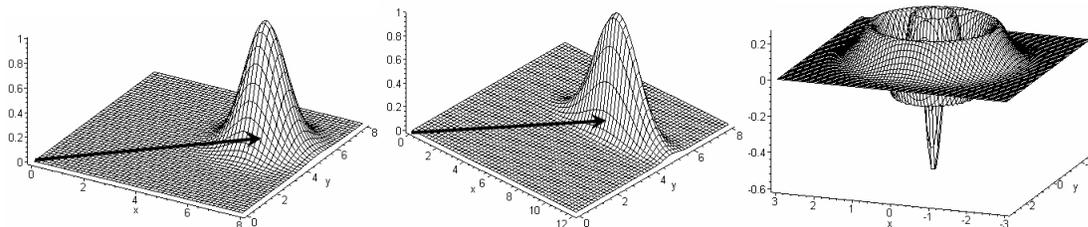


Figura 2.6: Função de Wigner de um (a) estado coerente, (b) estado comprimido e (c) estado número com 3 fótons. Nas duas primeiras figuras, as setas indicam a representação de Fresnel correspondente.

De fato, analisando as figuras 2.6, vê-se que a representação de Wigner de um estado coerente pode ser chamada de uma representação de Fresnel em três dimensões, seu círculo de ruído de quadratura sendo dado por um corte da função de Wigner numa altura apropriada. A semelhança se mantém ainda na localização do centro da gaussiana, distante $|\alpha|$ da origem e com raio vetor fazendo um ângulo φ com o eixo x (supondo $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$).

O mesmo pode ser dito acerca de um estado comprimido do campo. Neste caso, o contorno da função de Wigner, por exemplo, à meia altura máxima, é uma elipse, como no diagrama de Fresnel.

A função de Wigner pode ser usada como indicadora de que um estado é não-clássico, caso em que ela apresenta valores negativos, como para os estados número.

Alguns exemplos de função de Wigner são (figura 2.6)

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2} && \text{(estado coerente),} \\ W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2) && \text{(estado número),} \end{aligned} \quad (2.92)$$

em que L_n são os polinômios de Laguerre de ordem n .

Outro exemplo de imagem com apelo intuitivo fornecida pela função de Wigner é a evolução temporal de um estado coerente. Classicamente, um oscilador harmônico evolui temporalmente no espaço de fase seguindo uma trajetória circular centrada na origem. Analogamente, a função de Wigner do oscilador harmônico quântico num estado coerente evolui do mesmo modo, com a única diferença de que a trajetória não é executada por um ponto bem definido, mas por uma gaussiana, de modo a levar em conta a indeterminação quântica no conhecimento simultâneo das duas quadraturas.

Representação de Wigner da Equação Mestra

O fato de que a função de Wigner permite calcular médias de operadores em ordem simétrica,

⁹Por exemplo, a ordem simétrica de $a^\dagger a$ é dada por $\{a^\dagger a\} = a^\dagger a + a a^\dagger$.

valendo a identidade

$$\langle \{a^r (a^\dagger)^s\} \rangle_\rho = \langle \alpha^r (\alpha^*)^s \rangle_W, \quad (2.93)$$

também nos induz a buscar uma equação de evolução para a função de Wigner que corresponda à equação mestra do operador densidade.

Para tanto, uma sequência de passos deve ser seguida. Primeiramente, encontra-se a equação de evolução da função característica, multiplicando-se a equação mestra pelo operador deslocamento $D(\beta)$ (2.29) e tomando-se seu traço. Neste processo, ocorre a correspondência direta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \rightarrow \text{Tr}\{D(\beta) \frac{\partial}{\partial t} \rho\} = \frac{\partial}{\partial t} \chi(\beta), \quad (2.94)$$

em que se usou a definição (2.75) de $\chi(\beta)$.

Como

$$D = e^{\beta a^\dagger - \beta^* a} = e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a}, \quad (2.95)$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} D &= -\frac{\beta^*}{2} D + a^\dagger D, \\ \frac{\partial}{\partial \beta^*} D &= -\frac{\beta}{2} D - Da, \end{aligned} \quad (2.96)$$

ou, em ordem antinormal,

$$D = e^{|\beta|^2/2} e^{-\beta^* a} e^{\beta a^\dagger}, \quad (2.97)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} D &= \frac{\beta^*}{2} D + Da^\dagger, \\ \frac{\partial}{\partial \beta^*} D &= \frac{\beta}{2} D - aD. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Assim, encontram-se as correspondências

$$\begin{aligned} a^\dagger D &= \left(\frac{\beta^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) D, & Da^\dagger &= \left(-\frac{\beta^*}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) D, \\ aD &= \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) D, & Da &= \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right) D. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Com isso, substitui-se qualquer produto de a , a^\dagger e $D(\beta)$, por um operador diferencial agindo sobre $D(\beta)$. Efetuando o traço, obtém-se $\text{Tr}\{D(\beta)\rho\} = \chi(\beta)$, com o que se chega a uma equação diferencial para $\chi(\beta)$.

A seguir, toma-se a transformada de Fourier da equação obtida. Novamente, aparece a correspondência direta

$$\int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\beta) d^2 \beta = \frac{\partial}{\partial t} \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \chi(\beta) d^2 \beta = \frac{\partial}{\partial t} W(\alpha, \alpha^*). \quad (2.100)$$

Termos tais como os tratados abaixo podem aparecer na equação para $\chi(\beta)$. Suas ações correspondentes sobre a função de Wigner são calculadas como

$$\begin{aligned} \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \beta \chi(\beta) d^2 \beta &= -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} W(\alpha, \alpha^*), \\ \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \beta^* \chi(\beta) d^2 \beta &= \frac{\partial}{\partial \alpha} W(\alpha, \alpha^*), \\ \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \chi(\beta) d^2 \beta &= -\int \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta}) \chi(\beta) d^2 \beta = \alpha^* W(\alpha, \alpha^*), \\ \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \chi(\beta) d^2 \beta &= -\alpha W(\alpha, \alpha^*). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para termos mais complicados, tem-se, de maneira análoga,

$$\int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*} \chi(\beta) d^2 \beta = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int e^{\beta^* \alpha - \alpha^* \beta} \frac{\partial}{\partial \beta^*} \chi(\beta) d^2 \beta = -\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha W(\alpha, \alpha^*)] . \quad (2.102)$$

Fazendo estas correspondências, obtém-se a equação de evolução para a função de Wigner.

2.3.3 Equação de Fokker-Planck

A equações de evolução para $P(\alpha, \alpha^*)$ e $W(\alpha, \alpha^*)$ usualmente encontradas em problemas de ótica quântica são equações de Fokker-Planck.

As equações de Fokker-Planck são muito usadas para determinar a evolução temporal de funções de probabilidade,

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\vec{x}) = \left[-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(\vec{x}) \right] p(\vec{x}) , \quad (2.103)$$

em que $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o vetor de variáveis de uma função $p(\vec{x})$ qualquer.

Os termos $A_i(\vec{x})$ causam mudanças no valor médio da distribuição, sendo por isso denominados termos de arrasto, enquanto $D_{ij}(\vec{x})$ são os termos de difusão, responsáveis por eventuais alargamentos da distribuição no espaço de variáveis.

Esta equação para $p(\vec{x})$ é equivalente a um sistema de n equações para as variáveis x_j , chamadas equações de Langevin. Definindo o vetor de variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, o vetor de arrasto $\mathbf{A} \equiv \{A_i\}$ e a matriz de difusão $\mathbf{D} \equiv \{D_{ij}\}$, o sistema equivalente é

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}(\vec{x}, t) + \mathbf{B}(\vec{x}, t) \mathbf{E}(t) , \quad (2.104)$$

em que \mathbf{B} é tal que $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{D}$, e $\mathbf{E} = \{E_i\}$ é um vetor de forças estocásticas com média nula $\langle E_i(t) \rangle = 0$, também conhecidas como forças de Langevin, que obedecem a

$$\langle E_i(t) E_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t') . \quad (2.105)$$

Processo de Ornstein-Uhlenbeck

Apesar de a solução deste sistema não ser trivial de modo geral, existe um caso em que sua solução é simples e, apesar de particular, é muito geral em física. Trata-se de um vetor de arrasto proporcional às variáveis x_i e uma matriz de difusão constante, o chamado “processo de Ornstein-Uhlenbeck”. O movimento browniano de uma partícula num gás, por exemplo, é um processo desse tipo.

Neste caso, a equação de Fokker-Planck assume a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{x}) = \left[-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j M_{ij} x_j + C_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] P(\vec{x}) , \quad (2.106)$$

em que M_{ij} e C_j são constantes.

As equações de Langevin correspondentes são

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{E}(t) , \quad (2.107)$$

sendo \mathbf{M} e \mathbf{C} as matrizes dos coeficientes M_{ij} e C_j , respectivamente.

Determinação do Ruído

Frequentemente estamos interessados no espectro de ruído do estado estacionário do sistema. Ou seja, quaisquer efeitos transientes podem ser ignorados. As derivadas temporais em (2.107) são nulas nesta situação, o que permite obter facilmente os valores estacionários \bar{x}_j das variáveis,

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} . \quad (2.108)$$

Os ruídos são determinados no domínio de frequência. Para a variável $x_j(t)$, por exemplo, tem-se

$$\delta x_j(\Omega) = \int \delta x_j(t) e^{i\Omega t} dt , \quad (2.109)$$

em que $\delta x_j(t) = x_j(t) - \bar{x}_j$.

Portanto, a equação para os ruídos tem como solução

$$\delta \mathbf{x}(\Omega) = (\mathbf{M} - i\Omega)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E}(\Omega) . \quad (2.110)$$

As forças de Langevin em frequência, como é fácil verificar, satisfazem relações análogas às (2.105),

$$\langle E_i(\Omega) E_j(\Omega') \rangle = 2\pi \delta_{ij} \delta(\Omega - \Omega') . \quad (2.111)$$

A partir destas relações, é possível obter o espectro de ruído $S_j(\Omega)$ de cada variável $x_j(\Omega)$ com o uso da matriz de variâncias $\mathbf{V}(\Omega)$, definida como

$$2\pi \delta(\Omega - \Omega') \mathbf{V}(\Omega) = \langle \delta \mathbf{x}(\Omega) \delta \mathbf{x}^T(-\Omega') \rangle , \quad (2.112)$$

que, neste caso, fornece

$$\mathbf{V}(\Omega) = (\mathbf{M} - i\Omega)^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{M}^T + i\Omega)^{-1} . \quad (2.113)$$

Os espectros de ruído $S_j(\Omega)$ são obtidos através da soma de elementos de $\mathbf{V}(\Omega)$.

Vimos que o procedimento padrão na resolução de uma equação mestra é primeiro convertê-la numa equação de Fokker-Planck para a distribuição de quase probabilidade escolhida e, a seguir, obter um sistema de equações de Langevin.

Este sistema, por sua vez, fornece os valores estacionários das amplitudes e fases das variáveis do problema, bem como o comportamento de seus ruídos.

2.4 Emaranhamento

Emaranhamento¹⁰ é uma correlação puramente quântica entre subsistemas. Em termos simples, nada mais é que uma superposição quântica de estados no caso especial em que os vetores da base do *sistema completo* são um produto tensorial de vetores das bases dos *subsistemas*, sendo necessário que o estado do sistema total não possa ser escrito como um produto tensorial de estados quânticos dos subsistemas (não-separável).

Por exemplo, no caso mais simples de dois subespaços (a generalização para um número n qualquer de subsistemas é direta) de Hilbert \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , o espaço total \mathcal{T} será o produto tensorial dos dois subespaços, $\mathcal{T} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Sejam, respectivamente, $|\phi_i\rangle_1$ e $|\phi_j\rangle_2$, $i, j \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ os vetores de base dos subespaços \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 ; a base de vetores do espaço total é $|\tau_{ij}\rangle = |\phi_i\rangle_1 |\phi_j\rangle_2$. Portanto, um estado qualquer $|\Psi\rangle$ do sistema completo pode ser escrito nesta base como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |\phi_i\rangle_1 |\phi_j\rangle_2 , \quad (2.114)$$

¹⁰Em inglês, *entanglement*.

em que c_{ij} são os coeficientes complexos da expansão. O emaranhamento existe se não valer a condição

$$c_{ij} = c_i c'_j, \quad \forall i, j. \quad (2.115)$$

Neste caso, não estão definidos estados para cada um dos subsistemas: apenas o estado global possui existência física. Apesar disso, a medida de um dos subsistemas colapsa o vetor de estado total, tal como ocorre quando se mede o estado de uma partícula quando ela não se encontra num autoestado do operador medido. A diferença é que o colapso ocorre nesta base formada pelo produto tensorial de vários subsistemas, significando que, ao se medir apenas um deles, todos passam a possuir estados definidos. Isso pode dar origem a efeitos não-locais [29].

Se, por outro lado, é verdadeira a condição (2.115), então o estado é dito separável, não havendo emaranhamento. Isso significa que $|\Psi\rangle$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left(\sum_i c_i |\phi_i\rangle_1 \right) \left(\sum_j c'_j |\phi_j\rangle_2 \right) \\ &= |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle, \quad \text{em que } |\psi_1\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle_1, \quad |\psi_2\rangle = \sum_j c'_j |\phi_j\rangle_2, \end{aligned} \quad (2.116)$$

ou seja, $|\Psi\rangle$ pode ser escrito como um produto tensorial de um estado $|\psi_1\rangle$ do subespaço \mathcal{E}_1 por um estado $|\psi_2\rangle$ do subespaço \mathcal{F}_2 . Vemos que nesse caso cada subsistema possui seu estado bem definido, sendo independente do outro.

O emaranhamento é uma correlação entre subsistemas exclusivamente quântica, independente de base e, portanto, sem análogo clássico. Atualmente existe uma busca por se controlar esse fenômeno por causa de sua forte utilização na área de Informação Quântica. Além dos diversos algoritmos existentes para computação quântica, o emaranhamento é essencial para criptografia quântica e teletransporte [30].

2.5 Cavidades Óticas e Feixes Gaussianos

De modo genérico, uma cavidade ótica é uma região do espaço em que se confinam, por algum tempo, ondas eletromagnéticas. Experimentalmente, isso é obtido com o uso de espelhos convenientemente alinhados.

As cavidades óticas podem desempenhar diversas funções, tais como: intensificar o campo eletromagnético de interesse em seu interior, filtrar ruído de quadratura, servir como espectrômetro e projetar ruído de fase em ruído de intensidade. No caso do OPO, a cavidade também seleciona as frequências dos feixes sinal e complementar e os realimenta possibilitando a oscilação.

O interesse em perfis transversos cuja intensidade decresce a partir do eixo como uma gaussiana surge do fato de serem estas ótimas aproximações para os modos quase estacionários¹¹ de uma cavidade Fabry-Perot com espelhos esféricos.

De fato, o laser que utilizamos como bombeio para o OPO é construído para que seu feixe de saída tenha perfil gaussiano fundamental. Isso tem implicações práticas em experiências nas quais se precisa que o feixe seja bem acoplado a alguma cavidade (acordo de modo). Por fim, trataremos da maneira como se pode modificar o feixe para que o acordo de modo seja satisfeito.

¹¹Podemos entender um modo estacionário da cavidade como aquele que possui um perfil transversal cuja forma não se altera após uma volta na cavidade a menos de um fator de escala.

2.5.1 Cavityde Fabry-Perot

As geometrias mais utilizadas para cavidades óticas são a *cavidade em anel* e a *Fabry-Perot* (figura 2.7). Na primeira, de geometria triangular, somente um de seus três espelhos, o espelho de acoplamento, permite a troca de energia entre os campos interno e externo à cavidade, o campo interno possuindo apenas um sentido de propagação.

Por outro lado, a cavidade Fabry-Perot é formada por dois espelhos parcialmente refletores que acoplam o campo intracavidade aos feixes incidente, refletido e transmitido. Neste caso, o campo intracavidade é aproximadamente uma onda estacionária de luz, sendo esta afirmação exata no limite de espelhos perfeitos (transmitâncias nulas), caso em que a cavidade isolaria perfeitamente seu interior do resto do universo.

De fato, como este limite, além de pouco interessante pelo fato de que nenhuma luz poderia, em contrapartida, entrar na cavidade para formar um modo estacionário, é impossível de se realizar experimentalmente, o que se tem na verdade são “modos quase estacionários”, entendidos como modos do universo submetidos às condições de contorno impostas pelos espelhos [26].

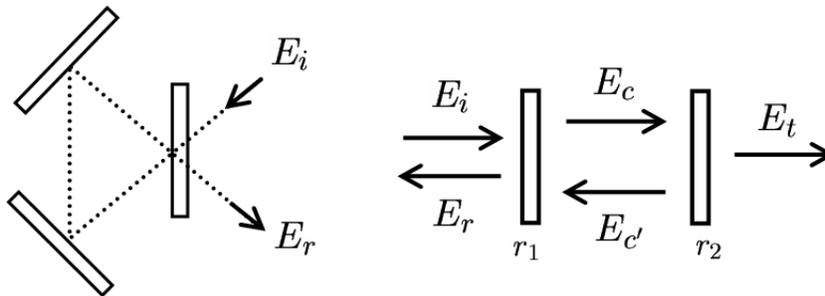


Figura 2.7: Geometrias mais utilizadas para cavidades óticas. À esquerda, cavidade em anel, e à direita, cavidade Fabry-Perot.

Trataremos aqui da cavidade Fabry-Perot por ser a mais utilizada em nossos experimentos. Entretanto, grande parte dos resultados a seguir são facilmente generalizados para a cavidade em anel.

No caso idealizado de espelhos infinitos e ondas planas, tal tipo de cavidade é totalmente caracterizado pelos coeficientes de reflexão de amplitude r_i (que fornecem diretamente os coeficientes de transmissão t_i , dados por $r_i^2 + t_i^2 = 1$) de seus dois espelhos i ($i \in \{1, 2\}$), pela distância L entre eles e pelas perdas espúrias A sofridas pela radiação, resultantes de imperfeições nas superfícies dos espelhos, efeitos de difração no caso de espelhos finitos etc. Definem-se também os coeficientes de reflexão e transmissão de intensidade, respectivamente $R_i = r_i^2$ e $T_i = t_i^2$.

Campos Refletido, Transmitido e Intracavidade

Quando se faz incidir uma onda eletromagnética plana com frequência ν e vetor de onda \vec{k} (na direção do eixo da cavidade) sobre um de seus espelhos, as ondas refletida e transmitida pela cavidade serão o resultado de múltiplas interferências entre as ondas transmitidas e refletidas por cada espelho. Somando todas essas contribuições, podemos deduzir as expressões para os campos refletido E_r , transmitido E_t , interno copropagante (em relação ao feixe incidente) E_c , e interno contrapropagante $E_{c'}$ (figura 2.7).

Denominando o espelho de entrada (cujas características serão denotadas pelo índice “1”) aquele que recebe a onda incidente, e de saída (índice “2”), o que permite a passagem da onda

transmitida, tem-se, na situação estacionária, para o campo intracavidade copropagante,

$$\begin{aligned} E_c &= t_1 E_i e^{ikz} (1 + r_1 r_2 e^{2ikL} + r_1^2 r_2^2 e^{4ikL} + r_1^3 r_2^3 e^{6ikL} + \dots) \\ &= \frac{t_1 e^{ikz}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} E_i . \end{aligned} \quad (2.117)$$

Analogamente para o feixe contrapropagante,

$$E_{c'} = -\frac{t_1 r_2 e^{ik(2L-z)}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} E_i , \quad (2.118)$$

em que foram levadas em conta as inversões de fase sofridas pelas ondas ao serem refletidas pelas paredes internas dos espelhos¹².

O feixe refletido pela cavidade é simplesmente a parte do feixe incidente diretamente refletido pelo espelho de entrada somado à parte do feixe intracavidade contrapropagante transmitido por este mesmo espelho,

$$E_r = r_1 E_i + t_1 E_{c'} = \frac{t_1 t_2 e^{ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} E_i . \quad (2.119)$$

Por outro lado, a onda transmitida pela cavidade é a parte do feixe intracavidade copropagante transmitida pelo espelho de saída,

$$E_t = t_2 E_c = \frac{t_1 t_2 e^{ikz}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} E_i . \quad (2.120)$$

Outra maneira de deduzir os resultados anteriores é escrever as relações entre os campos sobre os espelhos [13]. Seguindo a figura 2.7, é fácil ver que

$$\begin{aligned} E_r &= r_1 E_i + t_1 E_{c'} , \\ E_t &= t_2 e^{ikL} E_c , \\ E_c &= t_1 E_i - r_1 E_{c'} , \\ E_{c'} &= -r_2 e^{2ikL} E_c . \end{aligned} \quad (2.121)$$

Resolver estas equações em termos de E_i fornece novamente as expressões já obtidas.

Reflexão e Transmissão

A reflexão R e transmissão T de intensidade da cavidade são definidas como as frações da intensidade incidente que são refletida e transmitida pela cavidade, dadas pelos quadrados dos módulos de E_r/E_i e E_t/E_i (equações (2.115) e (2.116)),

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)} , \\ T &= \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)} . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Um resultado antiintuitivo destas expressões é a transmissão total da luz pela cavidade caso $R_1 = R_2$, não importando quão pequenos. Isso ocorre por causa da interferência perfeitamente destrutiva entre o feixe intracavidade contrapropagante transmitido pelo espelho de entrada e

¹²A fase existente entre as ondas refletida e transmitida pela superfície de um espelho são consequência da conservação da energia.

o feixe incidente diretamente refletido pelo mesmo espelho. Note que, para que isso ocorra, é necessário que a luz tenha tido tempo de se refletir infinitas vezes no interior da cavidade, de modo a podermos realizar as somatórias de todas as ondas parciais refletidas, como em (2.117); em outras palavras, isso só ocorre para ondas planas no estado estacionário, não se referindo a pulsos de luz. Para se tratar estes casos, basta decompor os pulsos em componentes de Fourier (ondas planas) e levar em conta sua propagação espacial (em geral, isto implicará reflexão não nula pela cavidade, e não mais transmissão total).

Note também que R e T são expressões simétricas em R_1 e R_2 (ou T_1 e T_2). Isto significa que os campos refletido e transmitido são exatamente os mesmos ainda que se troque o espelho de entrada pelo espelho de saída. No entanto, a diferença se torna aparente nas expressões para os campos intracavidade,

$$\begin{aligned} I_c \equiv |E_c|^2 &= \frac{T_1}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)} I_i, \\ I_{c'} \equiv |E_{c'}|^2 &= \frac{T_1 R_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2kL)} I_i, \end{aligned} \quad (2.123)$$

em que I_i é a intensidade da onda incidente; nelas fica claro que o campo intracavidade não é o mesmo caso se troquem os espelhos. Se, por exemplo, a cavidade é formada por um espelho altamente refletor e outro pouco refletor, colocar o primeiro como espelho de entrada tornará o campo intracavidade muito menor do que colocar o segundo.

Ressonâncias e Intervalo Espectral Livre

Analogamente a uma onda estacionária numa corda presa pelas extremidades, o campo intracavidade será máximo se as amplitudes de suas múltiplas reflexões internas se somam para qualquer ponto interno, ou seja, se a fase da onda varia de um múltiplo de 2π numa volta completa pela cavidade. Isso se vê no denominador comum às expressões (2.122), que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} D &\equiv 1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2kL) \\ &= 1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 + 4r_1 r_2 \sin^2(kL) \\ &= (1 - r_1 r_2)^2 (1 + m \sin^2(kL)), \quad \text{em que } m \equiv \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

cujo mínimo ocorre se $\sin(kL) = 0$, ou seja, se o comprimento de onda λ da radiação satisfizer a conhecida relação $L = p\frac{\lambda}{2}$, em que p é um numero inteiro.

No domínio de frequência angular, as ressonâncias ω_c ocorrem sempre que

$$\omega_c^{(p)} = 2\pi p \frac{c}{2L}, \quad (2.125)$$

o que define o **intervalo espectral livre** $\Delta\omega_c$ (em inglês, *free spectral range - FSR*), a distância em frequência entre ressonâncias sucessivas,

$$\Delta\omega_c \equiv \omega_c^{(p+1)} - \omega_c^{(p)} = \pi \frac{c}{L} \quad (2.126)$$

em frequência angular, ou, em frequência ν ,

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{2L}. \quad (2.127)$$

Note que o inverso de $\Delta\nu_c$ é o tempo que um fóton leva para dar uma volta completa na cavidade.

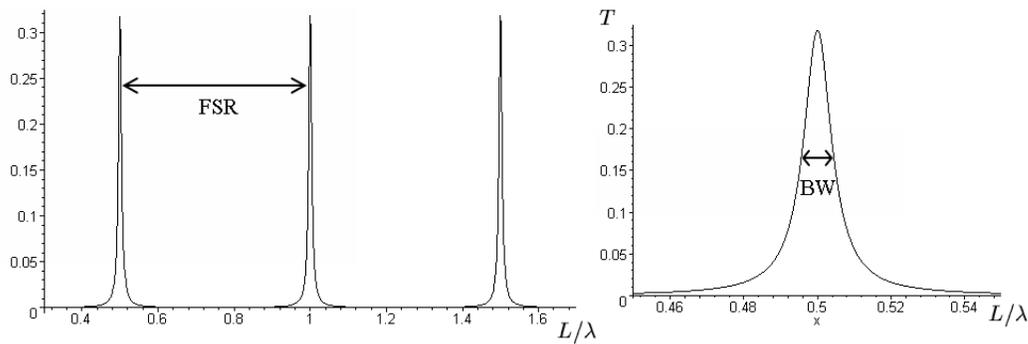


Figura 2.8: À esquerda, a transmissão da cavidade em função de seu comprimento. O intervalo espectral livre (FSR) é o intervalo em frequência entre picos sucessivos de ressonância. A forma lorentziana de um único pico de ressonância é mostrada à direita junto com a indicação da largura de banda da cavidade.

Largura de Banda

As equações (2.118) mostram que as curvas de transmissão e reflexão da cavidade em função da frequência são bem aproximados por **lorentzianas** para cavidades de alta finesse. Podemos nos perguntar qual é a largura à meia altura $\delta\omega$ de cada lorentziana (em inglês, *full width at half maximum*, ou FWHM)¹³.

Denominando o mínimo de D acima definido como D_{min} , podemos determinar esta largura impondo $D = 2D_{min}$, o que fornece

$$\text{sen}(kL) = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (2.128)$$

As cavidades óticas comumente usadas possuem espelhos com coeficientes de reflexão maiores que 90%. Sendo assim, m é um número muito grande, de maneira que é lícito fazer a aproximação em primeira ordem $\text{sen}(x) \approx x$ para obter

$$\omega_{\pm} \approx \pm \frac{c}{L\sqrt{m}}, \quad (2.129)$$

o que implica ser possível aproximar a largura em frequência angular do pico de ressonância, ou **largura de banda** da cavidade, por

$$\delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{2c}{L} \frac{(1 - \sqrt{R_1 R_2})}{2(R_1 R_2)^{1/4}}. \quad (2.130)$$

Assim, se $r_1, r_2 \rightarrow 1$, então $\delta\omega \rightarrow 0$.

Finesse

A finesse F é definida como a razão entre o intervalo espectral livre e a largura de banda da cavidade. De acordo com os resultados anteriores, a finesse é dada por $F = \pi\sqrt{m}/2$, ou

$$F = \pi \frac{(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}. \quad (2.131)$$

¹³ Alguns autores se referem à largura de banda como metade da largura à meia altura.

Se $T_1, T_2 \ll 1$, vale a aproximação

$$F = \frac{2\pi}{T_1 + T_2}, \quad (2.132)$$

de onde se vê que a finesse dá uma medida direta das perdas pelos espelhos. Por isso, a finesse é uma medida de o quão perfeita é a cavidade para armazenar a parte da energia incidente que chega a seu interior.

De fato, usando (2.119), a intensidade do feixe intracavidade nesta aproximação é dada por

$$\frac{I_c}{I_i} \approx \frac{F^2}{\pi^2} \frac{T_1}{1 + \frac{4F^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{kL}{2}\right)}. \quad (2.133)$$

Se um dos espelhos é perfeito, $T_2 \approx 0$, então, na ressonância,

$$\frac{I_c^{máx}}{I_i} \approx \frac{2}{\pi} F, \quad (2.134)$$

em que fica mais claro o significado da finesse comentado acima.

Cavidade com Perdas

A radiação eletromagnética intracavidade sofre perdas que advêm não apenas da transmissão dos espelhos das cavidades, mas também de imperfeições em suas superfícies, bem como poeira sedimentada, ou mesmo difração no caso realista de espelhos finitos: estes tipos de perdas são aqui referidas como “perdas espúrias”.

Para efeitos de cálculos, uma cavidade real com perdas espúrias pode ser substituída por uma cavidade ideal contendo um espelho em seu interior de modo a refletir para seu exterior exatamente a quantidade de radiação que é perdida na cavidade real (figura 2.9).

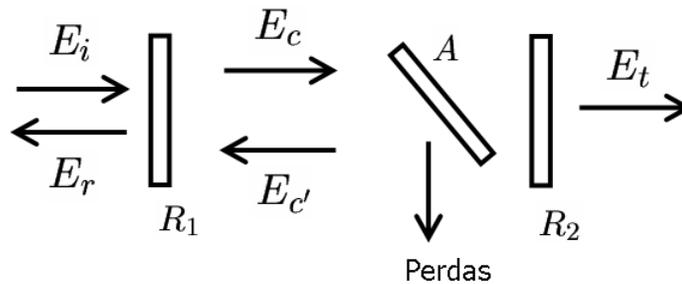


Figura 2.9: As perdas espúrias são equivalentes a um espelho colocado no interior da cavidade de modo a desviar parte da radiação.

Os resultados então obtidos para a largura de banda e coeficientes de reflexão e transmissão da cavidade são os mesmos obtidos anteriormente com a substituição $T_2 \rightarrow T_2 + A$, em que A é a fração da intensidade da radiação eletromagnética intracavidade que é perdida espúriamente. Portanto, o espelho de saída da cavidade é matematicamente equivalente a uma fonte de perda.

2.5.2 Feixe Gaussiano

Como dissemos, o interesse no estudo de feixes gaussianos provém de serem estes excelente aproximação analítica de fácil tratamento para os modos estacionários de cavidades Fabry-Perot [27].

Um feixe laser é uma onda propagante cujo campo elétrico possui uma envoltória muito bem localizada espacialmente. A equação de onda,

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.135)$$

neste caso, não fornece nenhuma pista da melhor solução a ser escolhida. Porém, como o feixe em geral se propaga com dispersão muito pequena, podemos escolher o eixo z sobre sua direção de propagação e usar a **equação de onda na aproximação paraxial**.

Em primeiro lugar, separamos a variação espacial da temporal, e eliminamos a variação rápida (da ordem de um comprimento de onda da radiação) em z , de modo que $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 u(\vec{r}) e^{ikz} e^{i\omega t} \hat{x}$ (E_0 é uma amplitude complexa contendo informação sobre o módulo e a fase inicial do campo; \hat{x} , sua polarização). Com isso se obtém um perfil espacial do campo elétrico que, por ser restrito a regiões próximas ao eixo de propagação, satisfaz

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(\vec{r}) \right| \ll \left| 2k \frac{\partial}{\partial z} u(\vec{r}) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\vec{r}) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\vec{r}) \right|. \quad (2.136)$$

Usando estas aproximações na equação de onda, obtém-se a equação de onda na aproximação paraxial para a envoltória espacial $u(\vec{r})$ do campo elétrico,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\vec{r}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\vec{r}) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} u(\vec{r}) = 0. \quad (2.137)$$

O operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é também chamado laplaciano transversal, denotado por ∇_t .

Das soluções mais simples para a equação exata (2.135), a mais interessante para nossos propósitos é a onda esférica, pois possui um ponto $\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ como fonte e amplitude que diminui com a distância

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}_f) = \sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2} \quad (2.138)$$

à fonte, da forma

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, \vec{r}_f)} e^{ik\rho(\vec{r}, \vec{r}_f)}. \quad (2.139)$$

Também podemos escrever a onda esférica na aproximação paraxial, fazendo

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}_f) \approx z - z_f + \frac{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}{2(z - z_f)}, \quad (2.140)$$

de modo que

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R(z)} \exp\left(ik \frac{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}{2R(z)}\right), \quad R(z) = z - z_f, \quad (2.141)$$

em que $R(z)$ é o raio de curvatura da onda. Em vez de se definir $R(z)$ em relação ao ponto de fonte, é possível defini-lo em relação a um plano anterior qualquer, localizado em $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$, no qual seu valor é conhecido e vale R_0 , ou seja,

$$R(z) = z - z_0 + R_0. \quad (2.142)$$

Para finalmente se obter uma onda com perfil transverso finito, basta notar que $R(z)$ complexo ainda mantém $u(x, y, z)$ como solução [27]. Introduzindo um raio de curvatura inicial complexo q_0 no plano z_0 , o raio de curvatura generalizado $q(z)$ dependerá de z da forma

$$q(z) = z - z_0 + q_0, \quad (2.143)$$

de maneira que, a partir da definição

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q_r(z)} + i \frac{1}{q_i(z)}, \quad (2.144)$$

obté-m-se a envoltória

$$u(x, y, z) = \frac{1}{q(z)} \exp \left(ik \frac{x^2 + y^2}{2q_r(z)} - k \frac{x^2 + y^2}{2q_i(z)} \right). \quad (2.145)$$

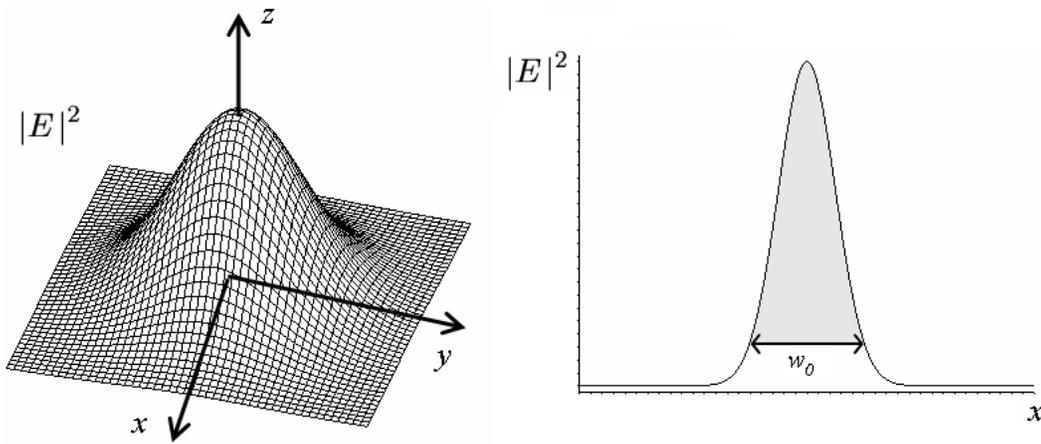


Figura 2.10: Perfil transverso de intensidade de um feixe gaussiano TEM_{00} .

Agora o feixe possui um perfil transverso cuja amplitude se anula em pontos distantes do eixo. Por sua variação ser gaussiana, este é o chamado **modo gaussiano transverso fundamental** da propagação livre, ou TEM_{00} ¹⁴. Em notação convencional,

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w(z)} \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} + i \frac{\pi}{\lambda} \frac{r^2}{R(z)} - i\psi(z) \right), \quad (2.146)$$

em que $R(z)$ é o raio de curvatura da frente de onda, $w(z)$, um parâmetro que fornece a escala de variação transversal do perfil, ou seu “tamanho” transversal, também chamado de *spot*, e r , a distância ao eixo de propagação.

Uma conta simples mostra que, em $r = w(z)$, a amplitude do campo elétrico cai para $1/e$ de seu valor máximo (no eixo) e, portanto, a intensidade cai para $1/e^2 \approx 0,135$ de seu valor no eixo (figura 2.10). Assim, praticamente toda a energia do feixe se encontra dentro de uma distância $w(z)$ a partir do eixo. A equação

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (2.147)$$

¹⁴Do inglês, *Transverse Electromagnetic Mode*.

fornece a variação dos parâmetros reais do feixe com a coordenada z . Se

$$q_0 = i \frac{1}{z_R}, \quad (2.148)$$

em que z_R é o **comprimento de Rayleigh** e, sendo w_0 a **cintura do feixe**,

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (2.149)$$

então a variação dos parâmetros do feixe com a distância percorrida z a partir da cintura é

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \\ R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z}, \\ \psi(z) &= \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Como se vê nestas expressões, o comprimento de Rayleigh z_R é uma medida da difração do feixe na direção de propagação, e está univocamente relacionado à cintura do feixe, que por sua vez fornece o tamanho transversal mínimo que o feixe adquire durante a propagação.

Isto fica mais claro na expressão de $w(z)$, que cresce linearmente para distâncias grandes a partir do plano da cintura do feixe com o fator de escala z_R . Desse modo, feixes muito focados (w_0 pequeno) sofrem efeitos de difração mais acentuados.

A fase $\psi(z)$ é a chamada fase de Gouy, primeiro observada pelo cientista homônimo. Ele descobriu experimentalmente que um feixe gaussiano TEM_{00} ganha, em relação a uma onda plana, uma fase $\pi/2$ a mais ao se propagar de $-\infty$ a ∞ passando por z_0 , o plano de sua cintura.

Na verdade, existem modos gaussianos de ordem superiores. Seus perfis espaciais são dados por gaussianas multiplicadas por polinômios de Hermite, sendo por isso chamados modos de Hermite-Gauss.

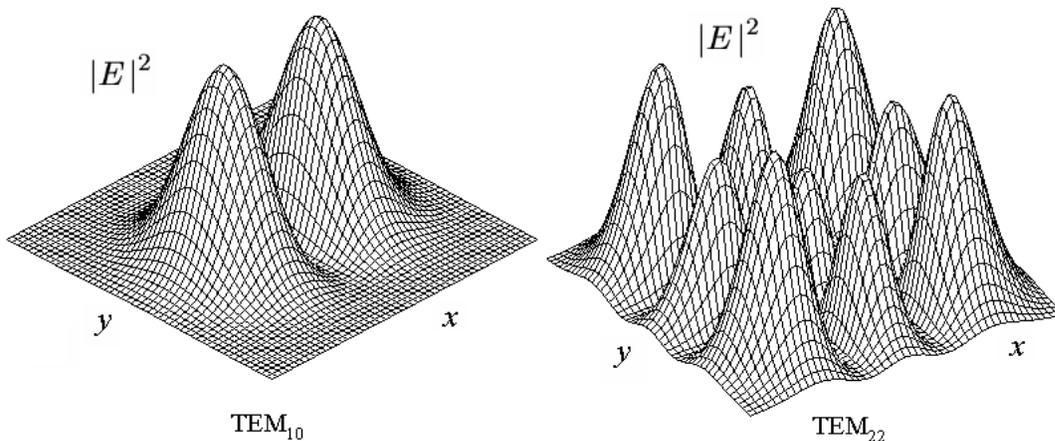


Figura 2.11: Perfil transverso de intensidade de modos Hermite-Gauss de ordem superior.

A expressão do envelope gaussiano TEM_{nm} (figura 2.11), em que n e m são números naturais e C é uma constante de normalização, é

$$u_{n,m}(x, y, z) = \frac{C}{w(z)} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)} + i\frac{\pi}{\lambda} \frac{r^2}{R(z)} - i\psi_{n,m}(z)\right). \quad (2.151)$$

Nesta equação, o único parâmetro que varia diferentemente com a distância em relação ao modo fundamental é a fase de Gouy,

$$\psi_{n,m}(z) = (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (2.152)$$

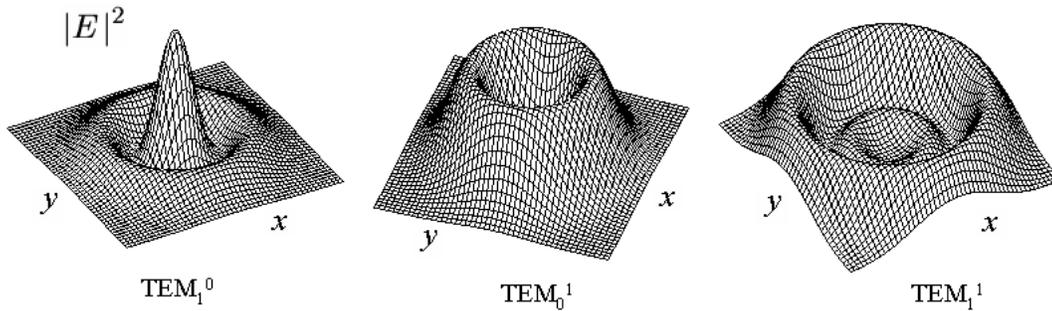


Figura 2.12: Perfis transversos de intensidade de modos Laguerre-Gauss TEM_p^ℓ de ordem superior.

O laplaciano da equação de onda pode também ser escrito em coordenadas cilíndricas, caso em que se obtêm soluções gaussianas multiplicadas por polinômios de Laguerre generalizados, dando origem aos modos de Laguerre-Gauss TEM_p^ℓ da propagação livre (figura 2.12),

$$u_p^\ell(r, \theta, z) = C' \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^\ell L_p^\ell\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)} - i\frac{\pi}{\lambda} \frac{r^2}{R(z)} + i\psi_p^\ell(z) + \ell\theta\right), \quad (2.153)$$

em que p e ℓ são números inteiros, com $\ell \geq 0$, e C' é uma constante de normalização. Novamente, apenas a fase de Gouy sofre modificações,

$$\psi_p^\ell(z) = (2p + \ell + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (2.154)$$

2.5.3 Feixes Gaussianos em Cavidades Óticas

A base de feixes gaussianos é muito utilizada justamente por ser boa aproximação para os modos normais das cavidades Fabry-Perot. O modo normal da cavidade é aquele que não sofre alteração, a menos de um fator de escala, após completar uma volta na cavidade.

Vimos que a frente de onda de fase de um modo gaussiano é uma onda esférica com raio de curvatura $R(z)$. Por conseguinte, um espelho esférico com raio de curvatura igual à frente de onda de um feixe gaussiano irá refletir o feixe sobre si mesmo, como se fosse uma reversão temporal; dois espelhos com os raios de curvatura corretos distanciados apropriadamente, podem, em vista disso, aprisionar um determinado modo gaussiano.

Considere um modo gaussiano com cintura w_0 em $z = 0$. Seu raio de curvatura é, para qualquer ponto z ,

$$R(z) = z + \frac{z_R}{z}, \quad (2.155)$$

em que z_R é o comprimento de Rayleigh definido em (2.149). Dois espelhos com raios de curvatura R_1 e R_2 , separados pela distância L e localizados respectivamente em z_1 e z_2 , tal que $z_2 - z_1 = L$, irão confinar o modo gaussiano que satisfizer

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{z_R}{z_1} &= -R_1, \\ z_2 + \frac{z_R}{z_2} &= R_2, \end{aligned} \quad (2.156)$$

em que foram levadas em conta as convenções de sinal para raios de curvatura: para um feixe gaussiano, $R < 0$ na convergência e $R > 0$ na divergência; para espelhos, R é positivo se o espelho é côncavo quando visto de dentro da cavidade, e negativo caso seja convexo sob o mesmo ponto de vista.

Resolvendo-se o sistema (2.156), encontra-se a solução para z_R ,

$$z_R = \frac{\sqrt{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}}{|R_1 + R_2 - 2L|}. \quad (2.157)$$

Este é o comprimento de Rayleigh dos modos gaussianos que “cabem” na cavidade. Suas cinturas correspondentes são facilmente determinadas usando (2.149). Propagando-se o feixe até as posições z_1 e z_2 dos espelhos, tem-se

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{R_2 - L}{R_1 + R_2 - 2L}L, \\ z_2 &= \frac{R_1 - L}{R_1 + R_2 - 2L}L. \end{aligned} \quad (2.158)$$

As cavidades mais usadas em nossos experimentos, confocal e concêntrica, possuem configurações simétricas, $R_1 = R_2$, para as quais a relação (2.157) se simplifica,

$$z_R = \frac{\sqrt{L(2R - L)}}{2}. \quad (2.159)$$

É comum utilizar a notação

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}, \quad (2.160)$$

em termos do que z_R , z_1 e z_2 ficam

$$z_R = \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2}L, \quad (2.161)$$

$$z_1 = \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2}L, \quad z_2 = \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2}L.$$

Disto segue que z_R só possui solução real se

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1, \quad (2.162)$$

que é a condição de estabilidade da cavidade, representada no diagrama da figura 2.13.

Os raciocínios e deduções apresentados valem para qualquer modo gaussiano. A distinção entre eles só aparece nos comprimentos de cavidade em que há ressonância porque, como vimos, a fase de Gouy $\psi_{n,m}(z)$ depende do modo.

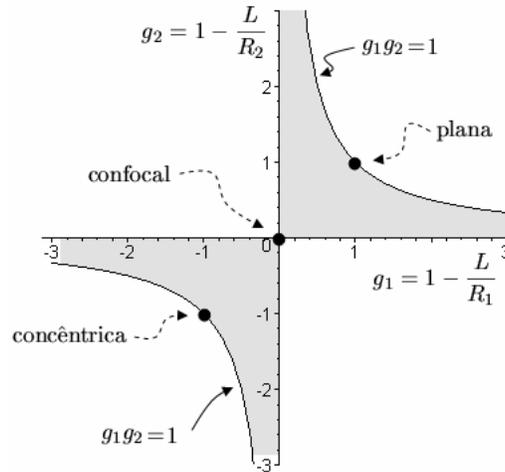


Figura 2.13: Diagrama de estabilidade para cavidades óticas. A área cinza representa a região de cavidades estáveis.

Condição de Ressonância

Para que um modo seja ressonante, é necessário que a fase ϕ ganhe em uma volta na cavidade seja um múltiplo de 2π . Em meia volta, ϕ é dada por

$$\phi(z_2 - z_1) = kL - [\psi_{n,m}(z_2) - \psi_{n,m}(z_1)] . \quad (2.163)$$

Usam-se então as equações (2.161) para eliminar z_1 , z_2 e z_R em termos de g_1 e g_2 na expressão (2.152) para a fase de Gouy,

$$\psi_{n,m}(z) = (n + m + 1) \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) , \quad (2.164)$$

com o que a equação (2.163) se torna

$$\frac{\omega L}{c} - (n + m + 1) \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) = q\pi , \quad q \text{ inteiro} . \quad (2.165)$$

Portanto, as ressonâncias da cavidade (com comprimento fixo) para diferentes modos gaussianos ocorrem em frequências $\omega_{q,m,n}$ que dependem do modo,

$$\omega_{q,n,m} = \left(q + \frac{1}{\pi}(n + m + 1) \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \right) \frac{\pi c}{L} . \quad (2.166)$$

Note que $\Delta\omega_c = \frac{\pi c}{L}$ é o intervalo espectral livre, definido em (2.126).

É mais intuitivo olhar esta relação com o comprimento da cavidade podendo ser variado enquanto a frequência dos feixes gaussianos é mantida fixa, como ocorre no laboratório. Então,

$$L_{q,n,m} = \left(q + \frac{1}{\pi}(n + m + 1) \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \right) \frac{\lambda}{2} , \quad q \text{ inteiro} , \quad (2.167)$$

de onde se vê que, por causa da fase de Gouy, o comprimento em que a cavidade entra em ressonância depende não apenas do comprimento de onda do feixe, mas também de seu perfil gaussiano transversal. Isso é um fato importante para o alinhamento de cavidades.

Cavidade Confocal

Na configuração confocal, a distância entre os espelhos da cavidade é igual a seus raios de curvatura, $R_1 = R_2 = L$, ou $g_1 = g_2 = 0$. Assim,

$$z_R = \frac{L}{2}, \quad (2.168)$$

correspondendo a uma cintura $w_0 = \sqrt{\lambda L / (2\pi)}$.

Para comprimentos de cavidade típicos, da ordem de 10cm, e $\lambda = 1064\text{nm}$, tem-se $w_0 \approx 130\mu\text{m}$. Nos espelhos, usando (2.150), o diâmetro do feixe (*spot*) mede $w(z_1) = \sqrt{2}w_0 \approx 180\mu\text{m}$, bem próximo ao valor de w_0 .

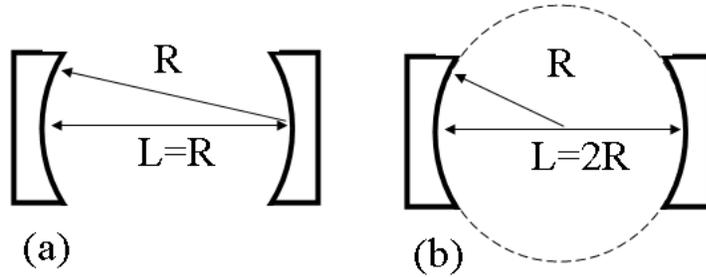


Figura 2.14: Esquema de montagem de uma (a) cavidade confocal e (b) concêntrica.

A cavidade confocal se destaca das outras configurações por sua grande estabilidade. Porque o centro de curvatura de um espelho fica localizado exatamente sobre a superfície do outro, pequenos erros na inclinação ou posição de um espelho afetam pouco o alinhamento. Além disso, o feixe percorre exatamente um comprimento de Rayleigh entre o centro da cavidade e os espelhos, de maneira que o *spot* continua pequeno sobre a superfície do espelho, como estimamos acima. Isto também torna a cavidade mais insensível a desalinhamento, irregularidades e poeira na superfície dos espelhos, posto que apenas uma pequena região dos mesmos é usada.

Como $g_1 = g_2 = 0$, então $\arccos(\sqrt{g_1 g_2}) = \pi/2$, de modo que

$$L_{q,n,m} = [q + \frac{1}{2}(n + m + 1)] \frac{\lambda}{2}, \quad q \text{ inteiro}. \quad (2.169)$$

Se o termo $n + m + 1$ for par, então $L_{q,n,m} = p\lambda/2$ (p inteiro); se ímpar, então $L_{q,n,m} = (p+1/2)\lambda/2$. De fato, a paridade de $n + m + 1$ é oposta à de $n + m$, de onde se conclui que modos concomitantemente simétricos ou antissimétricos em x e y ficam ressonantes com a cavidade no mesmo comprimento; por outro lado, modos antissimétricos em x e simétricos em y ou vice-versa ficam ressonantes, todos também no mesmo comprimento, a uma distância $\Delta\omega_c/2$ em frequência dos modos com $n + m$ par.

Portanto, as ressonâncias da cavidade confocal referentes a $q + n + m$ fixos são degeneradas, e tudo que se veria nessa condição ao se varrer o comprimento da cavidade seriam dois picos de ressonância, supondo que o feixe de entrada possui contribuições de muitos modos gaussianos.

Na prática, as cavidades dificilmente atingem a confocalidade exata, $\arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \approx \pi/2 + \delta$, em que $\delta \ll \pi$. Neste caso, os picos de ressonância relativos a modos diferentes ocorrem em comprimentos de cavidade ligeiramente diversos, tanto para modos com $m + n$ par quanto ímpar, formando-se dois “pentes” de ressonâncias a cada intervalo espectral livre conforme o comprimento da cavidade é variado.

Cavidade Concêntrica

A cavidade concêntrica encontra-se no limite da estabilidade (figura 2.13), sendo por isso mais sensível a desalinhamentos. Como o centro de curvatura de cada espelho coincide com o centro da cavidade, sua geometria é equivalente a um único espelho em forma de esfera dentro do qual se confinam feixes gaussianos (figura 2.14).

Usando $L = 2R$, tem-se $g_1 = g_2 = 1/2$, do que decorre $z_R = 0$. De fato, isto acarretaria uma difração infinita do feixe e, assim, não teríamos como confiná-lo facilmente, além de sairmos da aproximação paraxial. Portanto, só é possível construir cavidades próximas à concentricidade, de modo que $L = 2R - \Delta L$, e $g_1 = g_2 = -1 + 2\Delta L/L$; nesse caso,

$$z_r \approx \sqrt{L\Delta L}/2, \quad (2.170)$$

correspondendo a $w_0 \approx (L\lambda/\pi)\sqrt{\Delta L/L}$.

Se $L = 10\text{cm}$ e $\Delta L = 1\text{cm}$, com $\lambda = 1064\text{nm}$, tem-se $w_0 \approx 73\mu\text{m}$; já os *spots* nos espelhos, usando (2.150) e as mesmas estimativas, teriam raio $w(z_1) = 460\mu\text{m}$, seis vezes maior que a cintura no centro da cavidade. Isso ocorre porque, como o comprimento de Rayleigh é muito pequeno (posto que a cintura é pequena), o feixe percorre vários z_R até atingir o espelho e retornar sobre si mesmo, acarretando um maior efeito de difração.

Por isso a cavidade concêntrica é muito sensível a erros de alinhamento e a sujeiras ou imperfeições nas superfícies dos espelhos. Sua vantagem é possuir metade da largura de banda de uma cavidade confocal formada pelos mesmos espelhos, sendo mais úteis em aplicações nas quais se precisa de uma cavidade com ressonâncias mais estreitas em frequência.

2.5.4 Ótica Geométrica e Matriz ABCD

A ótica geométrica com suas leis para a propagação de raios de luz através de lentes, meios dielétricos etc também serve para descrever a propagação de feixes gaussianos.

Veremos que sua formulação pode ser dada em termos de matrizes, de modo a transformar a ação de qualquer elemento ótico numa matriz agindo sobre um vetor de parâmetros do feixe. Assim, elementos óticos em sucessão se tornam multiplicações de matrizes, facilitando sensivelmente os cálculos.

Esse formalismo se torna particularmente útil no cálculo de acordo de modo entre uma cavidade e um feixe gaussiano. Nesta seção estaremos usando sempre a aproximação de propagação paraxial.

Transformação de um Raio de Luz

Para um raio de luz, os parâmetros a serem transformados são sua distância r_1 ao eixo z de propagação e sua inclinação $(d/dz)r_1$ num plano z_1 inicial, que serão transformados em r_2 e $(d/dz)r_2$ na propagação até um plano final z_2 (figura 2.15).

Por exemplo, é fácil verificar que a propagação livre através de uma distância L transforma estas quantidades como

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + L(d/dz)r_1, \\ (d/dz)r_2 &= (d/dz)r_1. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Já para uma lente delgada com distância focal f , vale, entre a entrada e a saída da lente, a transformação

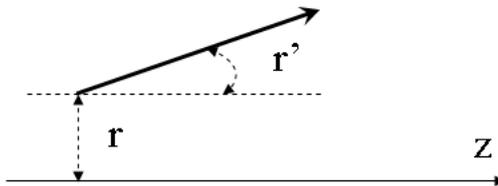


Figura 2.15: Parâmetros r e r' de um raio de luz.

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1, \\ (d/dz)r_2 &= -(1/f)r_1 + (d/dz)r_1. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Ambas representam transformações lineares sobre os parâmetros do raio de luz. Para levar em conta efeitos de refração, é útil definir

$$r'(z) = n(z) \frac{dr(z)}{dz}, \quad (2.173)$$

de forma que o desvio de raios de luz não ocorre nesta variável. Estas transformações lineares podem ser representadas da forma

$$\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + Br'_1, \\ r'_2 &= Cr_1 + Dr'_1, \end{aligned} \quad (2.174)$$

ou, em forma matricial,

$$\mathbf{r}_2 \equiv \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}\mathbf{r}_1, \quad (2.175)$$

em que \mathbf{M} é a matriz que contém a ação do sistema óptico sobre o feixe. Alguns sistemas óticos comuns são apresentados na figura 2.16.

Caso dois elementos óticos com matrizes \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 ajam sobre um raio de luz nesta ordem, então o raio que sai do primeiro elemento é $\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}\mathbf{r}_1$, e o raio que sai do segundo, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{M}_2\mathbf{r}_2$, ou seja,

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{r}_1, \quad (2.176)$$

de forma que a matriz total dos dois elementos é $\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$. Qualquer associação de n elementos na ordem $1, 2, \dots, n$ com matrizes $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ pode ser tratada desta forma, fornecendo a matriz total

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_n\mathbf{M}_{n-1}\dots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1. \quad (2.177)$$

Esta é a grande vantagem da formulação matricial para a ótica geométrica.

Conexão com Feixes Gaussianos

Vimos que os feixes gaussianos possuem uma frente de onda esférica no que concerne à variação de fase. Um onda esférica pode ser vista como infinitos raios divergindo de um ponto comum, o centro de curvatura. Portanto, a inclinação de cada um destes raios pode ser associada ao raio de curvatura,

$$r'(z) = n(z) \frac{dr(z)}{dz} = \frac{n(z)r(z)}{R(z)} \implies R(z) = n(z) \frac{r(z)}{r'(z)}. \quad (2.178)$$

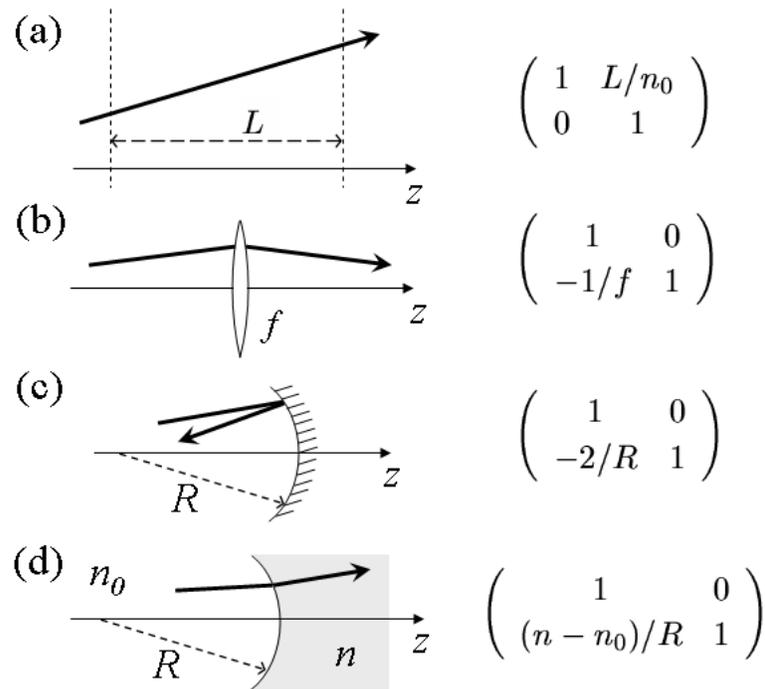


Figura 2.16: Algumas matrizes ABCD mais relevantes. (a) Propagação livre, comprimento L , índice de refração n_0 . (b) Lente delgada, distância focal f . (c) Espelho esférico, raio R , incidência normal. (d) Superfície dielétrica esférica, raio R , incidência normal.

Esta equação implica uma convenção para o sinal de R , sendo positivo para feixes divergentes e negativo para convergentes. Assim, as regras de transformação de $r(z)$ e $r'(z)$ podem ser combinadas para fornecer como o raio de curvatura se modifica ao passar pelos diferentes elementos óticos,

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{r_2}{r'_2} = \frac{Ar_1 + Br'_1}{Cr_1 + Dr'_1}. \quad (2.179)$$

De modo mais geral, se definirmos um raio de curvatura reduzido

$$R'(z) = R(z)/n(z), \quad (2.180)$$

então

$$R'_2 = \frac{AR'_1 + B}{CR'_1 + D}. \quad (2.181)$$

Esta equação nos permite utilizar todas as matrizes conhecidas da ótica geométrica para raios de luz no cálculo das transformações de feixes gaussianos ao se propagarem por elementos óticos.

Por exemplo, uma cavidade pode ser entendida como uma sequência infinita de lentes convergentes. De fato, a partir da comparação entre as matrizes (b) e (c) da figura 2.16, fica claro que um espelho esférico côncavo com raio de curvatura R é equivalente a uma lente convergente com distância focal $f = R/2$. Com a propagação livre dada pela matriz (a), segue que, em meia volta numa cavidade simétrica imersa no ar, o feixe se transforma segundo a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R} & L \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.182)$$

Portanto, em n meias voltas,

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}^n . \quad (2.183)$$

O teorema de Sylvester [28] afirma que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} A \sin(n\theta) - \sin[(n-1)\theta] & B \sin(n\theta) \\ C \sin(n\theta) & D \sin(n\theta) - \sin[(n-1)\theta] \end{pmatrix} , \quad (2.184)$$

em que $\cos \theta = (A + D)/2$. A matriz é estável, ou seja, o feixe continua confinado no sistema para qualquer n , se

$$|\text{Tr}\{\mathbf{M}\}| < 1 . \quad (2.185)$$

Tomando o traço da matriz \mathbf{M} de nosso exemplo, vemos que a condição de estabilidade fornece

$$-1 < g < 1 , \quad (2.186)$$

que é a condição deduzida em (2.162) aplicada a cavidades simétricas.

As matrizes ABCD tornam alguns cálculos mais simplificados, tal como o acordo de modo entre uma cavidade e um feixe gaussiano, por exemplo.

2.5.5 Acordo de Modo

Frequentemente a montagem experimental requer passar um feixe por duas cavidades diferentes. Por exemplo, a proposta de medida apresentada no capítulo 4 requer que os feixes sinal e complementar gerados na cavidade do OPO sejam modificados em duas cavidades de análise. Para tanto, é preciso que os modos gaussianos dos feixes saídos da cavidade do OPO “caibam” nas cavidades de análise quando nelas incidirem; isso é feito modificando-os com o uso de lentes, no processo conhecido como “acordo de modo” ou “casamento de modo”.

Considere a montagem da figura 2.17. O feixe é gerado na cavidade 1, supostamente alinhada de tal forma que apenas o modo gaussiano fundamental TEM_{00} possui amplitude considerável, modos superiores possuindo amplitudes desprezíveis. Conhecendo o comprimento da cavidade L_1 e o raio de curvatura R_1 de seus espelhos, supostos iguais, então o valor do comprimento de Rayleigh $z_R^{(1)}$ do modo intracavidade vale (equação (2.159))

$$z_R^{(1)} = \frac{\sqrt{L_1(2R_1 - L_1)}}{2} . \quad (2.187)$$

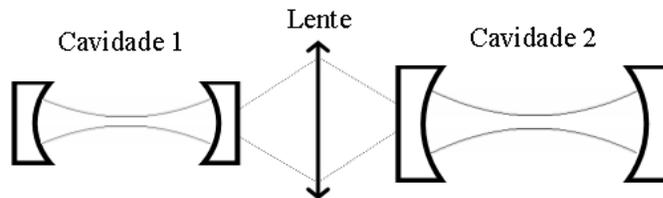


Figura 2.17: O acordo de modo gaussiano entre duas cavidades é feito com o uso de um sistema de lentes.

O feixe, para sair da cavidade 1, deve ser transmitido por seu espelho de saída. De acordo com a figura 2.16, uma superfície esférica delgada com índice de refração n atua como um lente divergente com distância focal

$$f_1 = -\frac{R_1}{n-1} \quad (2.188)$$

sobre o feixe que nela incide. Por outro lado, a cavidade 2, com comprimento L_2 e espelhos com raio de curvatura R_2 , requer um modo gaussiano cujo comprimento de Rayleigh seja

$$z_R^{(2)} = \frac{\sqrt{L_2(2R_2 - L_2)}}{2}. \quad (2.189)$$

O espelho de entrada desta cavidade também atua como uma lente divergente, com distância focal análoga à anterior.

Estes dois modos gaussianos, impostos *a priori* pelas características das cavidades escolhidas, precisam ser tornados compatíveis com o uso de um sistema de lentes. A maneira mais simples de realizar tal cálculo é fazer os produtos de matrizes ABCD correspondentes a cada percurso com auxílio de um computador. Sabemos o valor inicial e final do comprimento de Rayleigh. Basta, portanto, fazer um gráfico da evolução deste parâmetro conforme ele atravessa os elementos óticos e propagações livres. A figura 2.18 mostra um exemplo de cálculo deste tipo.

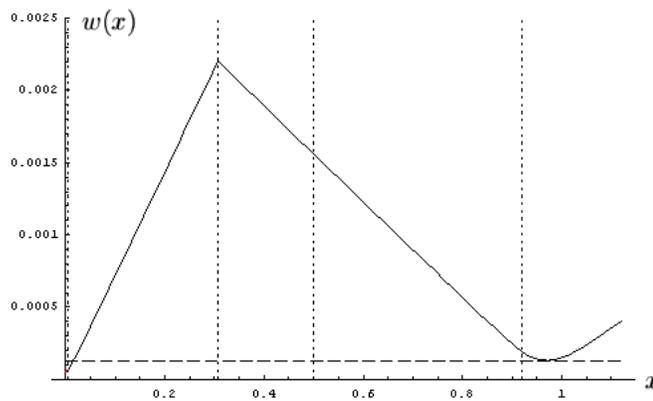


Figura 2.18: Exemplo de curva de acordo de modo feito com o uso de um computador. As linhas tracejadas verticais denotam as posições, da esquerda para a direita, do espelho da primeira cavidade, das duas lentes, e do espelho da segunda cavidade. Já a horizontal indica o tamanho ideal da cintura no interior da segunda cavidade. A linha sólida é o valor de $w(x)$ conforme se propaga entre estes elementos óticos no eixo x .

Assim, o feixe inicial, confinado na cavidade 1, com cintura $z_R^{(1)}$ em seu centro, deve se propagar livremente até o espelho de acoplamento, onde sofre o efeito divergente do espelho, e parte para um novo intervalo de propagação livre até atingir a primeira lente do sistema de lentes, e assim sucessivamente; quando as distâncias focais das lentes e suas distâncias às cavidades e entre si fornecerem um valor de $z_R^{(2)}$ compatível com o desejado no centro da segunda cavidade, então o acordo está feito.

O uso de um computador torna a tarefa extremamente simples por se fazer factível a aplicação do método da tentativa e erro, não sendo necessária a busca incessante de soluções analíticas fechadas para os parâmetros das lentes em função dos parâmetros das cavidades.

Capítulo 3

O Oscilador Paramétrico Ótico

Como apresentado na introdução, o Oscilador Paramétrico Ótico é um dispositivo capaz de gerar dois feixes laser, chamados **sinal** e **complementar**, a partir de um feixe de bombeio. Ele é formado por um cristal disposto no interior de uma cavidade ótica. A interação entre o cristal e o modo do feixe de bombeio interno à cavidade ocorre por meio da suscetibilidade não linear χ^2 do cristal. Quanticamente, este processo converte um fóton do bombeio em um par de fótons nos modos sinal e complementar, gerando correlações quânticas entre os feixes.

A cavidade seleciona modos preferenciais para sinal e complementar, permitindo a oscilação do sistema em regime contínuo.

Existem diversas configurações possíveis de cavidade. No que tange a suas condições de ressonância, ela pode ser ressonante apenas com o feixe sinal, permitindo uma sintonia contínua de sua frequência, porém possuindo um limiar de oscilação alto, pois o feixe de bombeio interage com o cristal em apenas uma passagem. Sua ressonância pode se estender também ao feixe complementar, reduzindo o limiar de oscilação, mas diminuindo a facilidade de sintonia de suas frequências. Por fim, nas duas situações anteriores a cavidade pode ser ressonante também para o feixe de bombeio, diminuindo substancialmente o limiar de oscilação; quando o OPO é ressonante para as três ondas, diz-se triplamente ressonante: este é o caso do OPO em funcionamento em nosso laboratório.

Quanto à montagem da cavidade, pode consistir de dois espelhos e um cristal separados, ou pode ser usada como espelho uma das faces do cristal (cavidade semi-monolítica) ou ambas (cavidade monolítica). O primeiro tipo é o mais versátil, bastando possuir um cristal e trocar apenas os espelhos caso se queira mudar as características do OPO; sua desvantagem é uma maior instabilidade. A cavidade monolítica é a mais estável possível, embora muito pouco versátil e a mais custosa, enquanto a semi-monolítica é a que apresenta versatilidade, estabilidade e custo intermediários. Nosso OPO é construído como descrito no primeiro tipo.

3.1 Formalismo Clássico

A maior parte das propriedades de um OPO necessárias à sua montagem e funcionamento são clássicas [6, 16], estando, portanto, descritas nesta seção. Sob o ponto de vista clássico, toda a dificuldade em se colocar o OPO triplamente ressonante para oscilar reside em se possuir um feixe de bombeio com potência suficientemente alta e em se obter ao mesmo tempo a ressonância dos três modos – bombeio, sinal e complementar – com a cavidade.

Os cálculos feitos a seguir mostrarão que as ressonâncias concomitantes para sinal e complementar implicam em diferenças de frequência $\Delta\nu$ discretas entre estes dois campos (a soma já sendo desde o início fixa por conta da conservação da energia). Entretanto, o espaçamento em frequência entre $\Delta\nu$ permitidos consecutivos é pequeno o suficiente para se permitir, numa região factível de parâmetros de cavidade, várias possíveis ressonâncias triplas no interior da largura de banda da ressonância de bombeio.

O elemento final é o acordo de fase entre os feixes no interior do cristal, que somente influencia a potência mínima em que existe oscilação, o limiar, selecionando desta maneira os modos mais propensos à oscilação paramétrica.

Acoplamento entre os Campos no Cristal

Por simplicidade, consideremos uma configuração de OPO com cavidade em anel (figura 3.1), situação na qual a radiação intracavidade, além de se propagar em um só sentido, interage apenas uma vez com o cristal em cada volta. A generalização para uma cavidade Fabry-Perot é comentada ao final deste tratamento. Nesta seção, seguiremos a referência [6]

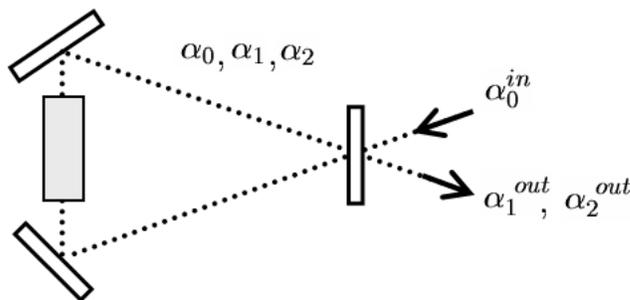


Figura 3.1: Configuração de um OPO com cavidade em anel.

Seja l o comprimento do cristal, L_{cav} o comprimento da cavidade e L o comprimento vazio da cavidade, tal que $L_{cav} = L + l$. Consideremos que a cavidade possui apenas um espelho com refletividade não unitária (chamado espelho de acoplamento), porém próximo disso, de modo a comportar altas finesses para todos os feixes, com os quais a cavidade é quase ou exatamente ressonante.

Os coeficientes de reflexão de amplitude dos espelhos serão denotados por r_j , $j \in \{0, 1, 2\}$ (estes índices significando, respectivamente, bombeio, sinal e complementar), assim como os coeficientes de transmissão, por t_j , podendo ser escritos em termos de um coeficiente γ_j (desse modo definido) como

$$\begin{aligned} r_j &\approx 1 - \gamma_j, \\ t_j &\approx \sqrt{2\gamma_j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dessa maneira, os coeficientes de reflexão e transmissão de intensidade são dados por r_j^2 e t_j^2 .

Denotemos as amplitudes dos campos intracavidade num ponto z por $\alpha_j(z)$, sempre seguindo a mesma convenção para o índice j . A coordenada z é escolhida como zero na face do cristal primeiramente interceptada pelo feixe que entra na cavidade, crescendo no sentido de propagação dos campos. A normalização de $\alpha_j(z)$ é escolhida de tal forma que $|\alpha_j(z)|^2$ fornece o número de fótons do campo j que atravessam o plano perpendicular à direção de propagação localizado no ponto z .

Após uma passagem pelo cristal, o feixe de bombeio sofre uma diminuição em sua amplitude por ceder energia aos campos sinal e complementar, que têm portanto suas amplitudes aumentadas. Supondo que essas variações de amplitude são muito pequenas, um cálculo relativamente extenso [31], que leva em conta os perfis gaussianos dos feixes (assumidos como TEM₀₀, o modo fundamental¹) e as superposições entre eles, revela que

$$\begin{aligned}\alpha_0(l) &= \alpha_0(0) - 2\chi\alpha_2(0)\alpha_1(0) , \\ \alpha_1(l) &= \alpha_1(0) + 2\chi\alpha_0(0)\alpha_2^*(0) , \\ \alpha_2(l) &= \alpha_2(0) + 2\chi\alpha_0(0)\alpha_1^*(0) ,\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que χ é um coeficiente de acoplamento que depende das características dos feixes, do cristal e da cavidade,

$$\chi = \chi_{ef} l \frac{w_0 w_1 w_2}{w_0^2 w_1^2 + w_0^2 w_2^2 + w_1^2 w_2^2} \sqrt{\frac{\hbar \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\pi \epsilon_0 c^3 n_0 n_1 n_2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{l \Delta k}{2}\right) e^{il \Delta k / 2} ,\tag{3.3}$$

com w_j sendo as cinturas dos feixes gaussianos, ω_j , suas frequências, n_j , os índices de refração do cristal para cada feixe e χ_{ef} , um coeficiente de acoplamento efetivo. O parâmetro de acordo de fase Δk é ainda definido como

$$\Delta k = k_0 - k_1 - k_2 ,\tag{3.4}$$

em que k_j é o módulo do vetor de onda do feixe j (os três vetores de onda são colineares e copropagantes). Se $\Delta k \neq 0$, então χ é complexo.

Em uma volta completa, cada campo ganha uma fase φ_j ,

$$\varphi_j = \frac{\omega_j}{c}(L + n_j l).\tag{3.5}$$

Além disso, cada feixe sofre perdas μ_j que provêm não apenas do espelho de acoplamento, por isso chamadas espúrias, resultantes de diversos fenômenos tais como difração, pequenos erros de alinhamento e imperfeições nas superfícies dos espelhos e nas faces do cristal.

As equações para as amplitudes dos campos na situação estacionária são obtidas igualando-se os ganhos² dos feixes em uma volta completa, válidas para um ponto z qualquer,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= r_0 e^{i\varphi_0} (\alpha_0 - 2\chi\alpha_2\alpha_1) - \mu_0\alpha_0 + t_0\alpha_0^{in} , \\ \alpha_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} (\alpha_1 + 2\chi\alpha_0\alpha_2^*) - \mu_1\alpha_1 , \\ \alpha_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} (\alpha_2 + 2\chi\alpha_0\alpha_1^*) - \mu_2\alpha_2 ,\end{aligned}\tag{3.6}$$

em que α_0^{in} é a amplitude do feixe de bombeio de entrada.

Estamos supondo que o OPO é quase ressonante com todos os feixes, de modo que as fases φ_j podem ser escritas como

$$\varphi_j = 2p_j\pi + \delta\varphi_j ,\tag{3.7}$$

¹De fato, a cavidade é alinhada para que todos os modos gaussianos de ordem superiores tenham participação desprezível.

²As perdas sofridas pelo bombeio podem ser entendidas como um ganho negativo, por isso usaremos por vezes o termo “ganho” para nos referir às mesmas.

$\delta\varphi_j \ll 2\pi$ e p_j inteiros, tornando lícito aproximar as equações acima por,

$$\begin{aligned}\alpha_0(\gamma'_0 - i\delta\varphi_0) &= -2\chi\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0}\alpha_0^{in}, \\ \alpha_1(\gamma'_1 - i\delta\varphi_1) &= 2\chi\alpha_0\alpha_2^*, \\ \alpha_2(\gamma'_2 - i\delta\varphi_2) &= 2\chi\alpha_0\alpha_1^*,\end{aligned}\tag{3.8}$$

em que foi definida a perda total de amplitude de cada modo,

$$\gamma'_j = \gamma_j + \mu_j.\tag{3.9}$$

Medindo a dessintonia em unidades de γ'_j através da quantidade

$$\Delta_j = \delta\varphi_j/\gamma'_j,\tag{3.10}$$

obté-m-se uma forma final mais simples para as equações,

$$\alpha_0\gamma'_0(1 - i\Delta_0) = -2\chi\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0}\alpha_0^{in},\tag{3.11}$$

$$\alpha_1\gamma'_1(1 - i\Delta_1) = 2\chi\alpha_0\alpha_2^*,\tag{3.12}$$

$$\alpha_2\gamma'_2(1 - i\Delta_2) = 2\chi\alpha_0\alpha_1^*.\tag{3.13}$$

Campos de Saída

Esse conjunto de equações sempre admite a solução trivial,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\gamma'_0(1 - i\Delta_0)}\alpha_0^{in},\tag{3.14}$$

representando o OPO abaixo do limiar, quando não há oscilação. Apesar disso, esta situação ainda permite a ocorrência de fenômenos quânticos de interesse, como a obtenção de estados comprimidos do vácuo [12].

Existem também as soluções não triviais, para as quais o OPO oscila. Podemos usar as equações (3.11), (3.12) e (3.13) para determinar as condições em que isto ocorre. Multiplicando (3.12) pelo conjugado de (3.13), obtém-se

$$\gamma'_1\gamma'_2(1 - i\Delta_1)(1 + i\Delta_2) = 4|\chi|^2|\alpha_0|^2,\tag{3.15}$$

cuja parte imaginária fornece

$$\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta.\tag{3.16}$$

Esta condição para a oscilação possui uma interpretação física interessante. O número total de fótons que deixam a cavidade (transmissão pelo espelho de acoplamento e perdas espúrias) é

$$|\alpha_j'^{out}|^2 = 2\gamma'_j|\alpha_j|^2.\tag{3.17}$$

Multiplicando a equação (3.12) por α_1^* e (3.13) por α_2^* , obtém-se

$$|\alpha_1'^{out}|^2(1 - i\Delta_1) = |\alpha_2'^{out}|^2(1 - i\Delta_2).\tag{3.18}$$

Portanto, $\Delta_1 = \Delta_2$ implica que o número total de fótons que deixa a cavidade no modo sinal deve ser igual ao número de fótons que escapa da cavidade no modo complementar.

Isso já é uma indicação das propriedades quânticas do OPO, pois vai ao encontro da interpretação quântica de que um fóton do bombeio é sempre convertido em um fóton no modo sinal e outro no complementar (fótons gêmeos), implicando correlações quânticas entre estes feixes.

Por outro lado, o número de fótons que deixam a cavidade transmitidos pelo espelho de acoplamento é

$$I_j = 2\gamma_j |\alpha_j|^2 \equiv |\alpha_j^{out}|^2. \quad (3.19)$$

Portanto, a razão entre as intensidades dos feixes sinal e complementar que deixam a cavidade é dada por

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\gamma_1 \gamma'_2}{\gamma'_1 \gamma_2}. \quad (3.20)$$

Vê-se que, se as perdas espúrias dos modos forem diferentes, os feixes transmitidos pela cavidade serão desbalanceados.

Numa experiência, buscamos sempre a condição de balanceamento entre os feixes, pois as medidas de ruído exigem intensidades iguais para fornecerem bons resultados. Por isso, imporemos a condição de balanceamento $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$ quando conveniente. Como os feixes sinal e complementar possuem frequências muito parecidas, estando próximos à degenerescência, em geral também é válido que o espelho de saída transmite a mesma fração dos dois feixes, $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$.

A equação (3.15) nos fornece ainda a potência intracavidade do bombeio. Tomando sua parte real,

$$|\alpha_0|^2 = \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{4|\chi|^2} (1 + \Delta^2), \quad (3.21)$$

mostrando que a intensidade intracavidade do feixe de bombeio é constante acima do limiar, independentemente de α_0^{in} .

A chamada potência de limiar é a potência de entrada do bombeio para a qual tem início a oscilação. Para determiná-la, impomos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ em (3.11), obtendo

$$\gamma'_0 (1 + \Delta_0^2) |\alpha_0|^2 = 2\gamma_0 |\alpha_0^{in}|_{lim}^2, \quad (3.22)$$

o que, substituindo $|\alpha_0|^2$ pela relação (3.21), fornece a expressão para o limiar de oscilação,

$$|\alpha_0^{in}|_{lim}^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2}{8|\chi|^2 \gamma_0} (1 + \Delta^2) (1 + \Delta_0^2). \quad (3.23)$$

Esta expressão mostra que o limiar é mínimo quando a cavidade é ressonante para todos os feixes. Portanto, o efeito de dessintonias é aumentar seu valor. Por isso se torna útil definir o limiar em ressonância,

$$|\alpha_0^{in}|_{res}^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2}{8|\chi|^2 \gamma_0}, \quad (3.24)$$

Denotaremos por σ a potência $|\alpha_0^{in}|_{lim}^2$ do bombeio em unidades do limiar mínimo $|\alpha_0^{in}|_{res}^2$,

$$\sigma \equiv \frac{|\alpha_0^{in}|_{lim}^2}{|\alpha_0^{in}|_{res}^2} = (1 + \Delta^2) (1 + \Delta_0^2) = (\Delta_0 + \Delta)^2 + (\Delta_0 \Delta - 1)^2. \quad (3.25)$$

Substituindo α_2 dado por (3.13) em (3.11), obtém-se a intensidade intracavidade dos campos sinal e complementar,

$$\left(1 - \Delta_0 \Delta + \frac{4|\chi|^2}{\gamma'_0 \gamma'_2} |\alpha_1|^2 \right)^2 + (\Delta_0 + \Delta)^2 = \sigma. \quad (3.26)$$

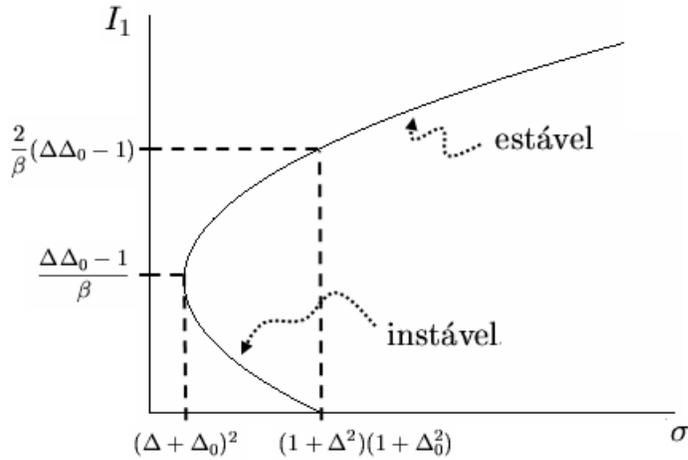


Figura 3.2: Potência do feixe sinal em função da potência de bombeio. Para facilidade de notação, definiu-se $\beta = 4|\chi|^2/(\gamma'_0\gamma_1\gamma'_2)$.

Esta função é uma parábola, como mostrado na figura 3.2. Se $\Delta_0\Delta_1 - 1 > 0$, existe uma região de potência do bombeio em que há dois valores distintos possíveis para a potência do sinal, a região de biestabilidade [32, 33].

Invertendo (3.26), a potência do feixe sinal (igual à potência do complementar) em função da potência de bombeio nas partes estável e instável da curva são escritas, respectivamente, como

$$|\alpha_1|_{est}^2 = \frac{\gamma'_0\gamma'_2}{4|\chi|^2} \left(\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} + \Delta_0\Delta - 1 \right), \quad (3.27)$$

$$|\alpha_1|_{inst}^2 = \frac{\gamma'_0\gamma'_1}{4|\chi|^2} \left(\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} + \Delta_0\Delta - 1 \right).$$

Como a região de parâmetros em que há biestabilidade é muito pequena, estaremos interessados apenas na solução estável.

Se $\Delta_0\Delta_1 - 1 \leq 0$, não ocorre biestabilidade. Apesar disso, esta solução é levada a regimes autopulsados e caóticos para altas intensidades do bombeio [34].

Assim, a potência dos feixes sinal e complementar que deixam a cavidade através do espelho de saída são

$$I_1 = \frac{\gamma'_0\gamma_1\gamma'_2}{4|\chi|^2} [\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} + \Delta_0\Delta - 1], \quad (3.28)$$

$$I_2 = \frac{\gamma'_0\gamma'_1\gamma_2}{4|\chi|^2} [\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} + \Delta_0\Delta - 1],$$

de forma que a potência total de saída P_{out} é igual a $I_1 + I_2$.

Para um OPO degenerado ($\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$) e com perdas iguais para sinal e complementar ($\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ e $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$), a potência de limiar (3.24) é dada por

$$P_{lim} = \hbar\omega\gamma_0'^2\gamma'^2/\gamma_0; , \quad (3.29)$$

e a potência total de saída P_{out} é, por conseguinte,

$$P_{out} = \hbar\omega_0 \left[\frac{\gamma\gamma'\gamma_0}{2|\chi|^2} (\sqrt{\sigma} - 1) \right] = 4\eta_{max} P_{lim} \left(\sqrt{\frac{P_{in}}{P_{lim}}} - 1 \right), \quad (3.30)$$

em que se definiu a eficiência máxima de conversão,

$$\eta_{max} \equiv \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\gamma_0}{\gamma'_0} \equiv \xi \xi_0, \quad (3.31)$$

com $\xi_j = \gamma_j/\gamma'_j$, $\xi = \xi_1 = \xi_2$ sendo a razão entre as perdas pelo espelho de acoplamento e as perdas totais, parâmetro que se mostrará importante para as propriedades quânticas do OPO a serem tratadas mais adiante.

Para se obter alta eficiência no OPO, é necessário que a maior parte das perdas dos campos intracavidade sejam causadas por transmissão dos espelhos.

Frequência de Batimento

Além das condições de oscilação já determinadas, existem ainda imposições sobre os modos sinal e complementar que podem entrar em oscilação. Estamos interessados em entender o OPO tipo II próximo à degenerescência, cujo cristal é birrefringente, apresentando índices de refração diferentes para sinal e complementar (que são ortogonalmente polarizados) mesmo quando o OPO é degenerado.

Pela conservação da energia, a soma das frequências dos feixes sinal e complementar, ν_1 e ν_2 , é fixa e igual à frequência do feixe de bombeio, ν_0 . Sua diferença, denominada frequência de batimento, no entanto, é um parâmetro livre,

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2, \quad (3.32)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\nu_0}{2} + \frac{\Delta\nu}{2}, \\ \nu_2 &= \frac{\nu_0}{2} - \frac{\Delta\nu}{2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O fato de que $\Delta_1 = \Delta_2$ impõe fortes restrições sobre $\Delta\nu$. De fato, as fases ganhas pelos feixes em uma volta completa são

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi\nu_1}{c}(L + n_1l), \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi\nu_2}{c}(L + n_2l), \end{aligned} \quad (3.34)$$

e, se as dessintonias entre sinal e complementar são iguais, então (3.7) implica em

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2m\pi, \quad m = p_2 - p_1. \quad (3.35)$$

Podemos subtrair as relações (3.34) e substituir este último resultado para obter uma relação entre ν_1 e ν_2 . Usando então (3.33), obtêm-se os valores possíveis para $\Delta\nu$,

$$\Delta\nu = -\frac{\nu_0\delta n l + cm}{L + \bar{n}l}, \quad (3.36)$$

em que foram definidos

$$\bar{n} = \frac{n_1 + n_2}{2}, \quad \delta n = \frac{n_1 - n_2}{2}. \quad (3.37)$$

Como ν_1 é muito próximo de ν_2 , pode-se ignorar a variação de n com a frequência, de maneira que δn é bem aproximado apenas pela diferença entre os índices de refração dos eixos rápido e lento na frequência $\nu_0/2$ (note que isso não pode ser feito num OPO tipo I, cujos feixes sinal

e complementar possuem polarizações iguais). Também assumimos que o OPO é balanceado, $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \gamma'$.

Como m é inteiro, a diferença entre $\Delta\nu$ sucessivos é

$$D = \frac{c}{L + \bar{n}l}, \quad (3.38)$$

ou seja, frequências sucessivas de sinal e complementar em que é possível oscilação estão separadas por metade do intervalo espectral livre da cavidade.

Comprimento da Cavidade

Partindo de uma situação mais simples, a ressonância dupla com exatidão, podemos determinar quais valores de $\Delta\nu$ são possíveis. Assim,

$$\varphi_1 = 2\pi p, \quad \varphi_2 = 2\pi(p + m), \quad (3.39)$$

sendo p um número natural. Substituindo na primeira destas relações as expressões (3.33) para ν_1 e $n_1 = \bar{n} + \delta n$, chega-se a

$$\Delta\nu = p \frac{2c}{L + (\bar{n} + \delta n)l} - \nu_0. \quad (3.40)$$

Apenas alguns valores de L podem satisfazer estas duas condições sobre $\Delta\nu$, dados por

$$L + \bar{n}l = (2p + m) \frac{c}{\nu_0} - \delta n l \frac{\Delta\nu}{\nu_0}. \quad (3.41)$$

Substituindo $\Delta\nu$ de (3.36),

$$L + \bar{n}l = (2p + m)\lambda_0 - \frac{\delta n l}{\nu_0} \left(\frac{\nu_0 \delta n l + cm}{L + \bar{n}l} \right). \quad (3.42)$$

Como o segundo termo do membro esquerdo desta equação é muito menor que o primeiro, e ressonâncias sucessivas são alcançadas através de variações em L muito menores que L (tipicamente, utiliza-se uma cerâmica piezoelétrica para varrer o comprimento da cavidade por alguns comprimentos de onda da radiação), podemos desprezar variações no denominador do segundo termo, substituindo o comprimento livre da cavidade por um comprimento livre médio, \bar{L} ,

$$L + \bar{n}l = \lambda_0 \left[(2p + m) + \frac{\delta n l}{\bar{L} + \bar{n}l} \left(m + \frac{\delta n l}{\lambda_0} \right) \right]. \quad (3.43)$$

O primeiro termo do membro direito desta equação mostra que as ressonâncias concomitantes de sinal e complementar ocorreriam sobre ressonâncias do bombeio, não fosse pelo segundo termo, que é uma correção originária da birrefringência. Se desprezarmos este último numa análise inicial, a cavidade será ressonante para o bombeio para um comprimento fixo, $L + \bar{n}l$, dado por um número inteiro q fixo, $q = 2p + m$.

Porém, vários pares de p e m podem formar um mesmo número q , significando diferentes $\Delta\nu$. Como q e m possuem a mesma paridade, para um comprimento de cavidade fixo, apenas modos de mesma paridade (q somente par ou ímpar) poderão oscilar sucessivamente. Com isso, o intervalo entre modos é, na verdade, $2D$ (3.38).

Consideremos agora a pequena correção oferecida pelo segundo termo que, como se vê, depende de m . Por isso, aqueles modos que antes pareciam ocorrer num mesmo comprimento da cavidade definido por q fixo, na verdade ocorrem em comprimentos ligeiramente diferentes, já que a correção no comprimento de ressonância depende de $\Delta\nu$; a separação entre $\Delta\nu$ sucessivos é

$$\Delta L_1 = \frac{2\delta n l}{L + \bar{n}l} \lambda_0. \quad (3.44)$$

Como δn é em geral uma ordem de magnitude menor que \bar{n} , um pente de modos próximos pode ser visto ao se varrer a cavidade em comprimento (figura 3.3).

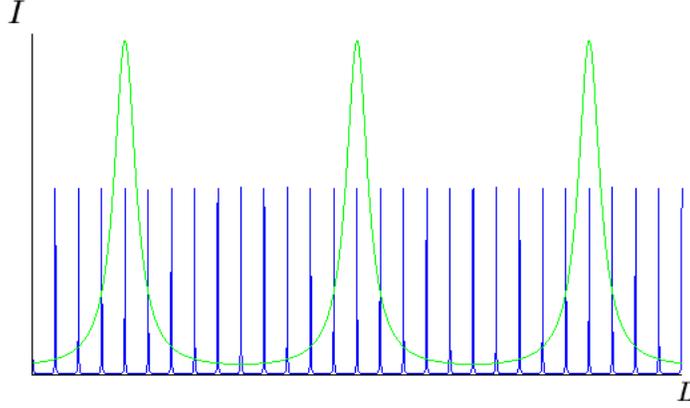


Figura 3.3: No interior de ressonâncias do bombeio (esquematizadas acima como três lorentzianas largas), existe um “pente” de possíveis modos de oscilação para sinal e complementar (lorentzianas finas).

Se relaxarmos a condição de ressonância exata, podemos encontrar o intervalo em comprimento de cavidade para o qual ainda há oscilação, ou seja, $\sigma > \sigma_{lim}$. Mas, segundo (3.25), $\sigma_{lim} = (1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta_1)^2$. Podemos assim relacionar a dessintonia com variações de comprimento δL_j através de sua definição, $\Delta_j = \delta\varphi_j/\gamma_j$, e de (3.34), obtendo

$$\delta\varphi_j = \frac{\pi\nu_j}{c} \delta L_j. \quad (3.45)$$

Caso a cavidade esteja em ressonância com o feixe de bombeio ($\Delta_0 = 0$), a condição de oscilação fica $|\Delta| < \sqrt{\sigma - 1}$, e, conseqüentemente, a variação de comprimento deve respeitar a desigualdade

$$|\delta L_1| < \frac{\gamma'}{\pi} \sqrt{\sigma - 1}, \quad (3.46)$$

em que se usou a aproximação $\nu_1 \approx \nu_2 \approx \nu_0/2$, e $\gamma' \equiv \gamma'_1 = \gamma'_2$. De modo aproximado, δL_1 está relacionado à largura de uma ressonância do feixe sinal ou complementar.

Se, por sua vez, os feixes sinal e complementar se encontram fixos em ressonância ($\Delta=0$), a condição sobre a varredura máxima da cavidade em relação ao feixe de bombeio fica

$$|\delta L_0| < \frac{\gamma_0}{2\pi} \sqrt{\sigma - 1}. \quad (3.47)$$

De modo geral, o OPO deve oscilar em torno de uma ressonância do bombeio, com uma tolerância em comprimento da cavidade dada pela última equação. Usando (3.41), a ressonância do bombeio implica numa frequência de batimento ν_s dada por

$$L + \bar{n}l = \lambda_0 s = \lambda_0(2p + m) - \delta n l \frac{\Delta\nu_s}{\nu_0}, \quad (3.48)$$

em que s é um número inteiro positivo, ou seja,

$$\Delta\nu_s = \frac{c}{\delta n l} (2p + m - s), \quad (3.49)$$

cujo intervalo entre ressonâncias sucessivas é

$$D_0 = \frac{c}{\delta n l}, \quad (3.50)$$

um número muito maior que D , a separação entre pares de modos sinal e complementar permitidos.

Usando (3.48), a relação (3.47) fornece o intervalo em frequência W em torno de $\Delta\nu$ em que a dessintonia do bombeio ainda permite oscilação,

$$W = \frac{c \gamma_0}{2\pi \delta n l} \sqrt{\sigma - 1}. \quad (3.51)$$

Assim, a cavidade de um OPO deve ser escolhida de tal forma que a largura da ressonância do bombeio em que há oscilação seja algumas vezes maior que a separação entre frequências de batimento $\Delta\nu$ permitidas para sinal e complementar (figura 3.3). Se isso não for satisfeito, torna-se necessário procurar a região de oscilação através de ajustes finos no índice de refração do cristal variando-se sua temperatura, algo em geral trabalhoso.

Acordo de Fase

Dentre os modos discretos $\Delta\nu$ encontrados em (3.36) cuja oscilação é permitida pelas ressonâncias da cavidade, o acordo de fase Δk irá ainda selecionar apenas uma parte deles como realmente factíveis. Isso porque o acordo de fase atua no coeficiente de acoplamento χ de (3.3), aumentando o limiar de oscilação caso não seja exatamente satisfeito. Substituindo as relações (3.33) e (3.37) em (3.4),

$$\Delta k = \frac{2\pi}{c} [(n_0 - \bar{n})\nu_0 - \delta n \Delta\nu], \quad (3.52)$$

vê-se que o acordo de fase perfeito ocorre para

$$\Delta\nu_k = \nu_0 \frac{n_0 - \bar{n}}{\delta n}, \quad (3.53)$$

valor que corresponde ao mínimo limiar de oscilação e mostra que o OPO se torna degenerado quando $n_0 = \bar{n}$.

Assim como definimos a potência de limiar do bombeio em ressonância $|\alpha_{res}^{in}|^2$,

$$|\alpha_{res}^{in}|^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2}{8\chi_{ef}^2 l^2 \gamma_0} \text{sinc}^{-2} \left(\frac{\Delta k l}{2} \right), \quad (3.54)$$

introduzimos a potência de limiar com o bombeio em ressonância e em acordo de fase $|\alpha_{af}^{in}|^2$,

$$|\alpha_{af}^{in}|^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1 \gamma'_2}{8\chi_{ef}^2 l^2 \gamma_0}. \quad (3.55)$$

Usando o mesmo raciocínio anterior (3.46), calcula-se o máximo erro no acordo de fase em torno de seu valor ideal que ainda permite oscilação,

$$|\Delta k l| = 2\sqrt{3(\sigma - 1)}, \quad (3.56)$$

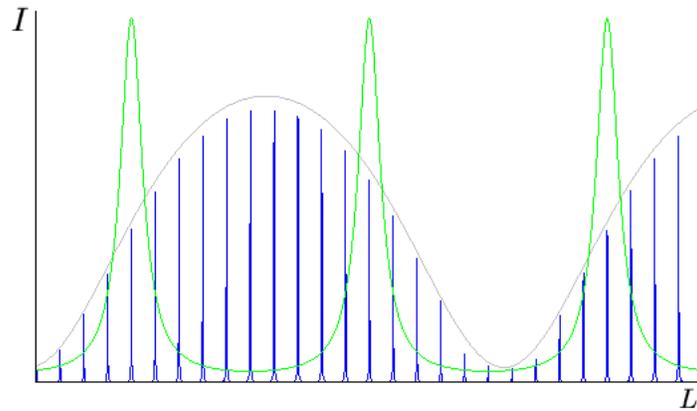


Figura 3.4: Com a inclusão do acordo de fase na figura 3.3, alguns modos do sinal (“pente” de lorentzianas) são mais efetivamente acoplados ao bombeio por possírem valores menores de limiar de oscilação, o que é esquematizado na figura pela modulação em amplitude do “pente” de modos ressonantes.

e, com o uso de (3.52), deduz-se o intervalo em frequência permitido em torno da frequência de batimento $\Delta\nu$,

$$D_{am} = \frac{2c}{\pi\delta n l} \sqrt{3(\sigma - 1)}. \quad (3.57)$$

Este valor é da mesma ordem de D_0 . O efeito de D_{am} é selecionar os grupos de frequências de batimento que se encontram próximas a $\Delta\nu_k$ (figura 3.4).

Cavidade Fabry-Perot

Quando a cavidade do OPO é do tipo Fabry-Perot, o campo não interage apenas uma vez durante uma volta completa na cavidade, mas duas. Entretanto, não há acoplamento entre modos propagantes e contrapropagantes e, como o ganho é muito pequeno a cada passagem pelo cristal, o efeito da segunda passagem é apenas adicionar um termo de ganho às equações (3.6); este termo, porém, possuirá uma fase a mais, resultante do erro no acordo de fase e também das fases que os feixes ganham quando são refletidos pelos espelhos.

Após um cálculo detalhado [6], descobre-se que a única influência desta configuração de cavidade assiste no coeficiente de acoplamento efetivo χ_{ef} , que sofrerá algumas mudanças por conta da alteração do acordo de fase: todo o resto da discussão permanece inalterado.

3.2 Formalismo Quântico

As propriedades de compressão de ruído do OPO são genuinamente quânticas, necessitando portanto da mecânica quântica para descrevê-las apropriadamente³.

Trataremos o OPO como três modos quantizados de uma cavidade interagindo através da destruição de um fóton de um modo (bombeio) e criação de dois fótons em dois outros modos (sinal e complementar) [36, 37, 38], situação representada pela hamiltoniana de interação

$$V = 2i\hbar \frac{\chi}{\tau} (a_1 a_2 a_0^\dagger - a_1^\dagger a_2^\dagger a_0), \quad (3.58)$$

em que a_j , $j \in \{0, 1, 2\}$, são, respectivamente, os operadores de aniquilação dos campos bombeio, sinal e complementar dos modos intracavidade, e $\tau = L/c$ é o tempo de vôo de um fóton pela cavidade. A constante de acoplamento efetivo χ inclui o valor da suscetibilidade não linear de segunda ordem do cristal e o acordo de fase.

Além da interação, cada campo possui sua hamiltoniana própria quantizada, representando os modos quase normais de oscilação com frequência ω_j internos à cavidade,

$$H_0 = \hbar(\omega_0 - 2\omega_c) a_0^\dagger a_0, \quad H_{1,2} = \hbar(\omega_{1,2} - \omega_c) a_{1,2}^\dagger a_{1,2}, \quad (3.59)$$

em que a energia do vácuo foi escolhida nula. A frequência ω_c é a frequência de ressonância da cavidade para a qual sinal e complementar são quase ressonantes. O feixe de bombeio é quase ressonante com $2\omega_c$. Subtrair estas frequências nas hamiltonianas é equivalente a usar operadores lentamente variáveis do tipo $a \rightarrow a e^{-i\omega_c t}$.

As perdas dos modos intracavidade são calculadas segundo a expressão (2.67),

$$\Lambda_j \rho \equiv \frac{\gamma_j'}{\tau} (2a_j \rho a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j), \quad (3.60)$$

em que γ_j' são as perdas totais do modo (transmissão de amplitude t_j pelos espelhos das cavidades mais perdas espúrias μ_j), definidas em (3.9).

Por fim, o feixe de bombeio é acoplado ao modo de bombeio intracavidade pela hamiltoniana

$$H_\varepsilon = \hbar \frac{t_0}{\tau} \varepsilon (a_0 - a_0^\dagger), \quad (3.61)$$

em que $t_0 = \sqrt{2\gamma_0}$ é o coeficiente de transmissão de amplitude do espelho de entrada para bombeio, e ε , a amplitude clássica do feixe de bombeio incidido sobre a cavidade. Tomaremos esta última quantidade como real, ou seja, escolheremos a fase do campo de entrada como referência para as outras fases.

A hamiltoniana total se escreve como a soma das hamiltonianas,

$$H = \sum_j H_j + H_\varepsilon + V + \sum_j \Lambda_j \rho. \quad (3.62)$$

Usando esta hamiltoniana, obtém-se a seguinte equação mestra (2.65)

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \rho &= -i \sum_j \Delta_j \gamma_j' (a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j) + t_0 \varepsilon (a_0 \rho - \rho a_0 - a_0^\dagger \rho + \rho a_0^\dagger) + \\ &+ 2(\chi a_1^\dagger a_2^\dagger a_0 \rho - \chi \rho a_1^\dagger a_2^\dagger a_0 - \chi a_1 a_2 a_0^\dagger \rho + \chi \rho a_1 a_2 a_0^\dagger) + \\ &+ \sum_j \gamma_j' (2a_j \rho a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j \rho - \rho a_j^\dagger a_j). \end{aligned} \quad (3.63)$$

³Na verdade, qualquer ruído fundamental é genuinamente quântico, pois não há qualquer justificativa clássica para sua existência. Entretanto, é muitas vezes possível obter resultados quanticamente consistentes supondo um ruído estocástico clássico com as mesmas propriedades do ruído quântico (embora a justificativa deste ruído seja quântica), o denominado método semiclássico [35]. Esse é o tratamento utilizado em [16] para o OPO.

Executando as correspondências de (2.86), é encontrada a equação equivalente para a representação P ,

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} P(\vec{\alpha}) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [\gamma'_0(1 + i\Delta_0)\alpha_0 + 2\chi\alpha_1\alpha_2 - t_0 \varepsilon] + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [\gamma'_1(1 + i\Delta_1)\alpha_1 + 2\chi\alpha_0\alpha_2^*] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [\gamma'_2(1 + i\Delta_2)\alpha_2 + 2\chi\alpha_0\alpha_1^*] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} 2\chi\alpha_0 + \text{c.c.} \right\} P(\vec{\alpha}), \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que se usaram as dessintonias em unidades de γ'_j , análogas às definidas em (3.10),

$$\Delta_0 = \frac{\omega_0 - 2\omega_c}{\delta\omega_0}, \quad \Delta_{1,2} = \frac{\omega_{1,2} - 2\omega_c}{\delta\omega_{1,2}}, \quad (3.65)$$

sendo $\delta\omega_j$ a largura de banda da cavidade para o modo j (equação (2.130)).

Esta equação obtida para $P(\vec{\alpha})$ tem a forma de uma equação de Fokker-Planck (2.103).

Nas equações a seguir, mediremos o tempo em unidades de τ por conveniência, de modo que faremos $t \rightarrow t/\tau$.

Definindo o vetor de variáveis

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_0^*, \alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*)^T, \quad (3.66)$$

é fácil verificar que as matrizes de arrasto \mathbf{A} e de difusão \mathbf{D} se escrevem

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & - \begin{pmatrix} \gamma'_0(1 + i\Delta_0)\alpha_0 + 2\chi\alpha_1\alpha_2 - t_0 \varepsilon \\ \gamma'_0(1 - i\Delta_0)\alpha_0^* + 2\chi\alpha_1^*\alpha_2^* - t_0 \varepsilon \\ \gamma'_1(1 + i\Delta_1)\alpha_1 + 2\chi\alpha_0\alpha_2^* \\ \gamma'_1(1 - i\Delta_1)\alpha_1^* + 2\chi\alpha_0^*\alpha_2 \\ \gamma'_2(1 + i\Delta_2)\alpha_2 + 2\chi\alpha_0\alpha_1^* \\ \gamma'_2(1 - i\Delta_2)\alpha_2^* + 2\chi\alpha_0^*\alpha_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} = & 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi\alpha_0^* \\ 0 & 0 & \chi\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi\alpha_0^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

A fim de se escrever o sistema equivalente de equações de Langevin (2.104), determina-se a matriz \mathbf{B} que satisfaz $\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{D}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0} e^{i\pi/4} & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0^*} e^{i\pi/4} & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0^*} e^{-i\pi/4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0} e^{-i\pi/4} & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0^*} e^{-i\pi/4} & 0 & \sqrt{2\chi\alpha_0^*} e^{i\pi/4} \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

O vetor \mathbf{E} de forças de Langevin é da forma

$$\mathbf{E} = [0, 0, \epsilon_1(t), \epsilon_2(t), \epsilon_3(t), \epsilon_4(t)]^T, \quad (3.69)$$

tal que

$$\langle \epsilon_i(t) \epsilon_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t') , \quad (3.70)$$

em que tomamos os primeiros elementos de \mathbf{E} como nulos porque não aparecerão nas equações de Langevin, já que as duas primeiras linhas de \mathbf{B} são nulas.

Escrevendo explicitamente as equações de Langevin, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_0 &= -\gamma'_0(1 + i\Delta_0)\alpha_0 - 2\chi\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0}\varepsilon , \\ \frac{d}{dt} \alpha_1 &= -\gamma'_1(1 + i\Delta_1)\alpha_1 + 2\chi\alpha_0\alpha_2^* + \sqrt{2\chi\alpha_0}(e^{i\pi/4}\epsilon_1 + e^{-i\pi/4}\epsilon_3) , \\ \frac{d}{dt} \alpha_2 &= -\gamma'_2(1 + i\Delta_2)\alpha_2 + 2\chi\alpha_0\alpha_1^* + \sqrt{2\chi\alpha_0}(e^{-i\pi/4}\epsilon_1 + e^{i\pi/4}\epsilon_3) . \end{aligned} \quad (3.71)$$

além de suas equações complexas conjugadas (a menos de forças de Langevin).

O estado estacionário do sistema $\bar{\alpha}_j$, obtido impondo-se $\frac{d}{dt}\alpha_j = 0$ e tomando a média das equações (3.71) acima, fornece equações idênticas às equações clássicas (3.11), (3.12) e (3.13) caso se faça $\Delta_j \rightarrow -\Delta_j$.

Portanto, os resultados para os campos estacionários são os mesmos determinados anteriormente. Em particular,

$$\Delta_1 = \Delta_2 . \quad (3.72)$$

Por razões de simplicidade, suporemos feixes balanceados, $\gamma'_1 = \gamma'_2 \equiv \gamma'$ ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu$), e também acordo de fase tal que $\chi = \chi$. Com isso, as equações (3.71) ficam

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_0 &= -\gamma'_0(1 + i\Delta_0)\alpha_0 - 2\chi\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0}\varepsilon , \\ \frac{d}{dt} \alpha_1 &= -\gamma'(1 + i\Delta)\alpha_1 + 2\chi\alpha_0\alpha_2^* + \sqrt{2\chi\alpha_0}(e^{i\pi/4}\epsilon_1 + e^{-i\pi/4}\epsilon_3) , \\ \frac{d}{dt} \alpha_2 &= -\gamma'(1 + i\Delta)\alpha_2 + 2\chi\alpha_0\alpha_1^* + \sqrt{2\chi\alpha_0}(e^{-i\pi/4}\epsilon_1 + e^{i\pi/4}\epsilon_3) . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Este sistema pode ser simplificado definindo-se

$$\alpha_+ = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) , \quad \alpha_- = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) . \quad (3.74)$$

Definindo-se ainda novas forças de Langevin,

$$\eta_+ = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3) , \quad \eta_- = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_3) , \quad (3.75)$$

que ainda satisfazem relações análogas à (3.70), o sistema (3.73) se torna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_0 &= -\gamma'_0(1 + i\Delta_0)\alpha_0 - 2\chi(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) + \sqrt{2\gamma_0}\varepsilon , \\ \frac{d}{dt} \alpha_+ &= -\gamma'(1 + i\Delta)\alpha_+ + 2\chi\alpha_0\alpha_+^* + 2\sqrt{\chi\alpha_0}\eta_+ , \\ \frac{d}{dt} \alpha_- &= -\gamma'(1 + i\Delta)\alpha_- - 2\chi\alpha_0\alpha_-^* + 2\sqrt{\chi\alpha_0}\eta_- . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Nosso interesse maior é tratar quanticamente as flutuações $\delta\alpha_j$, as quais supomos pequenas $\delta\alpha_j \ll \alpha_j$ para escrever

$$\alpha_j = \bar{\alpha}_j + \delta\alpha_j . \quad (3.77)$$

Com isso, as equações que governam a evolução temporal das flutuações são

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\alpha_0 &= -\gamma'_0(1+i\Delta_0)\delta\alpha_0 - 4\chi\bar{\alpha}_+\delta\alpha_+ + \sqrt{2\gamma_0}\delta\varepsilon, \\ \frac{d}{dt}\delta\alpha_+ &= -\gamma'(1+i\Delta)\delta\alpha_+ + 2\chi(\bar{\alpha}_+\delta\alpha_0 + \bar{\alpha}_0\delta\alpha_+) + 2\sqrt{\chi\bar{\alpha}_0}\eta_+, \\ \frac{d}{dt}\delta\alpha_- &= -\gamma'(1+i\Delta)\delta\alpha_- - 2\chi\bar{\alpha}_0\delta\alpha_-^* + 2\sqrt{\chi\bar{\alpha}_0}\eta_-, \end{aligned}\quad (3.78)$$

em que usamos $\bar{\alpha}_- = 0$.

Vemos que a equação para $\delta\alpha_-$ se desacoplou das outras. Nesta seção, trataremos apenas desta equação; a parte relativa a $\delta\alpha_+$ será deixada para o próximo capítulo, no estudo de emaranhamento entre os feixes sinal e complementar acima do limiar.

Entretanto, este sistema, obtido na representação P , mostra-se pouco intuitivo, pois surgem forças de Langevin apenas nos modos sinal e complementar, apesar de sabermos que o vácuo também atua sobre o modo do bombeio.

A fim de melhorar esse aspecto, podemos determinar as equações de evolução para as flutuações na representação de Wigner.

Usando a equação mestra (3.63) e as regras de correspondência (2.101) e (2.102), obtém-se [36]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(\vec{\alpha}) &= \left\{ \sum_j \gamma'_j(1+i\Delta_j) \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_j^*} \alpha_j^* - \frac{\partial}{\partial\alpha_j} \alpha_j \right) + \right. \\ &+ 2\chi \left(\alpha_1\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_0^*} + \alpha_1^*\alpha_2^* \frac{\partial}{\partial\alpha_0} - \alpha_0\alpha_1^* \frac{\partial}{\partial\alpha_2} - \alpha_0^*\alpha_1 \frac{\partial}{\partial\alpha_2^*} - \alpha_0\alpha_2^* \frac{\partial}{\partial\alpha_1} - \alpha_0^*\alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_1^*} \right) - \\ &\left. - \sqrt{2\gamma_0}\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_0^*} + \frac{\partial}{\partial\alpha_0} \right) + \sum_j \gamma'_j \frac{\partial^2}{\partial\alpha_j\alpha_j^*} - \frac{\chi}{2} \frac{\partial^3}{\partial\alpha_0^*\partial\alpha_1^*\partial\alpha_2^*} \right\} W(\vec{\alpha}). \end{aligned}\quad (3.79)$$

Podemos desprezar o último termo, a derivada de ordem superior, para obter uma equação de Fokker-Planck. Utilizamos o mesmo procedimento anterior para se obter as equações que regem a evolução temporal das flutuações. Para a flutuação da subtração das amplitudes dos feixes $\delta\alpha_-$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\alpha_- &= -\gamma'(1-i\Delta)\delta\alpha_- - 2\chi\alpha_0\delta\alpha_-^* + \sqrt{2\gamma'}\sigma_a, \\ \frac{d}{dt}\delta\alpha_-^* &= -\gamma'(1+i\Delta)\delta\alpha_-^* - 2\chi\alpha_0^*\delta\alpha_- + \sqrt{2\gamma'}\sigma_b. \end{aligned}\quad (3.80)$$

Usamos então o tratamento mostrado na seção **2.2** para determinar o espectro de ruído. Definindo a transformada de Fourier de $\delta\alpha_-(t)$, resolve-se a equação acima facilmente. Entretanto, para se obter o espectro de ruído da subtração dos feixes que deixam as cavidades, é preciso combinar a parte refletida dos feixes transmitidos pelo espelho de acoplamento com o vácuo refletido pelo mesmo,

$$\delta\alpha_{out}(\Omega) = \sigma(\Omega) - \sqrt{2\gamma}\delta\alpha_-(\Omega). \quad (3.81)$$

A fim de se obter teoricamente o resultado físico da medida, calcula-se o ruído da subtração das quadraturas amplitude dos feixes (2.20), a grandeza que apresenta compressão, obtendo-se

$$\delta p_-(\Omega) = \left(1 - \frac{2\gamma}{2\gamma' - i\Omega\tau} \right) \delta p_a(\Omega) - \frac{2\sqrt{\gamma\mu}}{2\gamma' - i\Omega\tau} \delta p_b(\Omega), \quad (3.82)$$

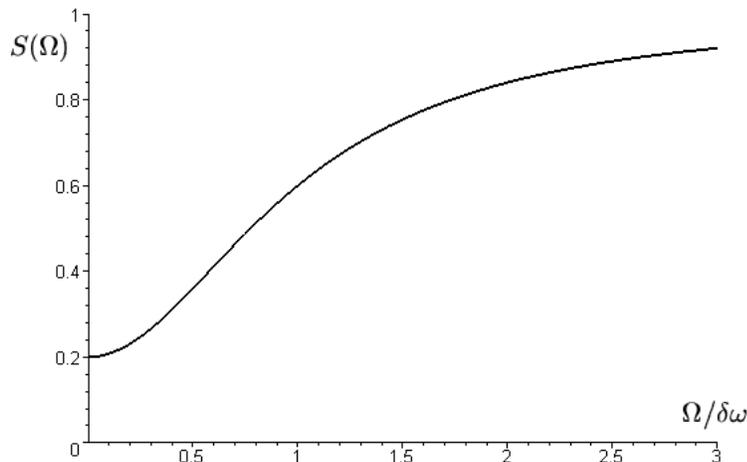


Figura 3.5: Espectro de ruído da subtração das amplitudes dos feixes sinal e complementar.

em que $\delta p_a(\Omega)$ e $\delta p_b(\Omega)$ são as quadraturas amplitude das forças estocásticas $\sigma_a(\Omega)$ e $\sigma_b(\Omega)$ ligadas à ação do vácuo sobre o sistema.

Finalmente, a expressão para o espectro de ruído da subtração das amplitudes $S_-(\Omega)$, mostrado na figura 3.5, é

$$S(\Omega) = 1 - \frac{\xi}{1 + (\Omega/\delta\omega)^2}, \quad (3.83)$$

em que $\xi = \gamma/\gamma'$ é a razão entre as perdas pelo espelho da cavidade e as perdas espúrias.

A normalização deste ruído é tal que o *shot noise* vale 1. A compressão é máxima em frequência nula, diminuindo rapidamente conforme a frequência de análise se torna da ordem da largura de banda da cavidade para sinal e complementar.

Esse efeito se origina do fato de que a cavidade mantém os fótons em seu interior durante um tempo característico da ordem do inverso da largura de banda. Quando se tenta medir correlação entre sinal e complementar em frequências muito altas (tempos curtos), aumenta-se a probabilidade de um dos fótons do par ainda não ter saído da cavidade. Por outro lado, quando se espera um tempo muito grande (frequências de análise baixas), a probabilidade de se ter medido os dois fótons do par aumenta conformemente.

Embora a correlação seja máxima em frequência nula, não se realizam medidas em baixas frequências por causa do ruído eletrônico, que se torna muito grande.

A compressão também depende da razão entre a quantidade de luz que deixa a cavidade transmitida pelo espelho de acoplamento e a quantidade perdida por efeitos espúrios de perda. Novamente, isso pode ser interpretado em termos de fótons gêmeos. Quanto maiores as perdas espúrias ($\xi \rightarrow 0$), maior a probabilidade de que um dos fótons do par se perca sem ser medido (com o que $S_-(\Omega) \rightarrow 1$).

3.3 O OPO de São Paulo

Nosso OPO consiste de um cristal de potássio titanil fosfato, mais conhecido como KTP, em forma de paralelepípedo, com um comprimento longitudinal de $10(\pm 0,3)$ mm e faces transversas (em relação à direção de propagação do feixe) quadradas com lados de comprimento igual a $4(\pm 0,1)$ mm, colocado no centro de uma cavidade quase confocal.

A cavidade é formada por dois espelhos esféricos, com diâmetros de 2,54cm, e raios de curvatura de 20mm. O espelho de entrada, aquele no qual incide o feixe de bombeio, possui refletividade igual a 84% para bombeio e maior que 99,8% para sinal e complementar; o espelho de saída, por outro lado, possui refletividade maior que 99,8% para bombeio e igual a 99% para sinal e complementar.

O laser de bombeio é um aparelho comercial da empresa Lightwave, modelo 142. Seu funcionamento baseia-se em dobrar a frequência de um laser interno (comprimento de onda igual a 1064nm) com o uso de um cristal não linear colocado numa cavidade ótica, obtendo assim um feixe de saída com comprimento de onda igual a 532nm. O laser interno em 1064nm é obtido através do bombeamento de um cristal de Nd:YAG (neodímio dopado com ítrio, alumínio e granada) por um diodo laser. Sua potência máxima de saída em 532nm é atualmente 150mW, porém apenas parte desta, aproximadamente 120mW, chega ao espelho de entrada do OPO após passar pela montagem ótica.

O cristal de KTP é um cristal birrefringente, com índices de refração $n_0 = 1,7881$, $n_1 = 1,8296$ e $n_2 = 1,7466$ para bombeio, sinal e complementar, respectivamente. Segundo as especificações técnicas, o tratamento anti-refletor nas faces do cristal faz com que suas reflexões de intensidade de luz sejam menores que 0,5% em 532nm e 0,1% em 1064nm. Pela medida de finesse da cavidade em 532nm (entre 30 e 50), as perdas neste comprimento de onda são causadas quase completamente pela transmissão do espelho de entrada. Entretanto, a julgar pela compressão de ruído de intensidade obtida (aproximadamente 20% em frequências de análise iguais a 5MHz e 10MHz), as perdas espúrias em 1064nm devem totalizar cerca de 2%.

Um problema técnico deste tipo de cristal é a formação de centros de cor (*gray tracking*) [39, 40, 41], principalmente na frequência do bombeio, o que aumenta a absorção do cristal e, conseqüentemente, o limiar de oscilação do OPO. Por este motivo, a operação de nosso OPO em regime contínuo (CW) só é possível por no máximo alguns minutos. Após este período, a potência de limiar cresce acima da potência disponível em nosso laser, obrigando-nos a deslocar ligeiramente o cristal para reiniciar a oscilação.

Nosso OPO triplamente ressonante apresenta limiar de oscilação próximo de 30mW, podendo variar até uma dezena de mW em torno deste número por causa de pequenos desvios de alinhamento. Isso nos permite trabalhar com uma potência de bombeio máxima que é aproximadamente três vezes a potência de limiar no início da oscilação. Nesta situação, obtemos compressão de 20% na subtração das intensidades.

Mais informações podem ser encontradas na tese de doutorado de M. Martinelli [42], responsável pela construção de nosso OPO.

Capítulo 4

Medida de Emaranhamento no OPO

Como vimos, o OPO é uma ótima fonte de estados comprimidos do campo; de fato, como vimos, é teoricamente possível que os feixes nele produzidos sejam *gêmeos*. Porém, ainda não foi demonstrado experimentalmente que os feixes sinal e complementar gerados num OPO *não-degenerado* acima do limiar são emaranhados (embora um OPO forçado a operar na exata degenerescência pela injeção de uma semente [3], assim como OPO's abaixo do limiar, tanto degenerados [4] quanto não-degenerados [5], possam apresentar emaranhamento sob certas condições).

Neste capítulo é apresentado um estudo teórico desta situação, além de se propor um método de medida e de se mostrar alguns resultados preliminares da experiência que realizamos.

4.1 Proposta

Como mostraremos, os feixes sinal e complementar gerados no OPO acima do limiar podem estar emaranhados numa região de parâmetros acessível experimentalmente. Para caracterizar o emaranhamento, adotamos o critério de Duan e colaboradores [2] (aqui denominado DGCZ).

Basicamente, este critério verifica se a soma das variâncias de um par tipo-EPR de observáveis de dois sistemas contínuos viola uma desigualdade tipo-Bell [43]. Um par tipo-EPR é formado pela combinação linear de operadores conjugados dos dois sistemas. No caso dos feixes em que estamos interessados, este par são os operadores $p_- = p_1 - p_2$ e $q_+ = q_1 + q_2$, em que p_j e q_j , $j \in \{1, 2\}$, são respectivamente as quadraturas amplitude e fase dos feixes sinal e complementar (equação (2.20)). Como se pode verificar facilmente, $[p_-, q_+] = 0$, o que permite conhecer p_- e q_+ simultaneamente com precisão arbitrária.

Já calculamos no capítulo anterior (seção 3.2) que o operador p_- , apresenta flutuações menores que o ruído padrão, ou *shot noise* (equação (3.83)). Portanto, nossa medida pretende demonstrar que q_+ flutua suficientemente pouco de modo a violar a desigualdade DGCZ. Assim, se q_+ possuir um excesso de ruído menor que a compressão em p_- , os feixes estarão emaranhados. Contudo, q_+ pode estar também comprimido, como mostraremos ser possível em teoria, o que permite a implementação de um protocolo de criptografia [8].

Propomos, então, uma montagem experimental para medir o emaranhamento. Como flutuações de fase são de difícil acesso via detecção homodina [44] em nosso caso, por causa da diferença de frequências (da ordem de GHz) entre os feixes sinal e complementar, propomos o uso de cavidades óticas vazias para “girar as elipses de ruído” [7] destes feixes em sincronia para acessar δq_+ .

Será mostrado a seguir que uma cavidade Fabry-Perot, por possuir um coeficiente de reflexão cuja fase depende fortemente da frequência, fornece fases diferentes para as diversas frequências de ruído em relação à fase da amplitude média do campo, mudando a distribuição do ruído nas quadraturas e desse modo projetando flutuação de fase em flutuação de amplitude para determinados valores de dessintonia da cavidade e frequência de análise. Assim, por este método, uma caracterização completa do ruído de quadratura de cada feixe é possível.

4.2 Critério DGCZ

Um sistema quântico composto por dois subsistemas é dito separável caso seu operador densidade ρ possa ser escrito como uma mistura estatística de produtos tensoriais de operadores densidade dos subsistemas (seção 2.5),

$$\rho = \sum_j p_j \rho_{j1} \otimes \rho_{j2} , \quad (4.1)$$

em que $p_j \geq 0$ e $\sum_j p_j = 1$, $j \in \{1, 2\}$

Considerando dois modos do campo eletromagnético, sabemos que os operadores de quadratura amplitude e fase de cada campo, definidos em (2.20), não comutam ($[p_j, q_{j'}] = 2i\delta_{j,j'}$), estando portanto sujeitos a uma relação de incerteza. Entretanto, é possível encontrar operadores que sejam combinações lineares de p_j e q_j e que possuam comutadores nulos, sendo os mesmos chamados de um par tipo EPR [45],

$$q_+ = q_1 + q_2 , \quad p_- = p_1 - p_2 . \quad (4.2)$$

Como q_+ e p_- comutam, podem ser conhecidos simultaneamente com precisão arbitrária. Duan e colaboradores [2] mostraram que, se os subsistemas de um sistema maior são separáveis no sentido da equação (4.1), então vale a desigualdade

$$\langle \Delta^2 q_+ \rangle_\rho + \langle \Delta^2 p_- \rangle_\rho \geq 2 , \quad (4.3)$$

e que sua violação é uma condição *suficiente* para que os subsistemas estejam *emaranhados*.

No caso do OPO, têm-se dois feixes criados, o sinal e o complementar. Para verificar o critério DGCZ, é preciso medir as quadraturas amplitude e fase de cada feixe. Esta última é, em geral, de difícil acesso.

4.3 Emaranhamento dos Feixes Sinal e Complementar

Com mostramos na seção 3.2, a subtração das quadraturas amplitude δp_- apresenta compressão. Para caracterizar emaranhamento, é necessário que a soma das fases δq_+ seja tal que (4.3) seja violada. No que segue, usaremos a mesma notação da seção 3.2.

As equações (3.73) obtidas na representação de Wigner assumem a forma

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \alpha_0 &= -\gamma'_0 (1 + i\Delta_0) \delta \alpha_0 - 2\chi \alpha_2 \delta \alpha_1 - 2\chi \alpha_1 \delta \alpha_2 + \sqrt{2\gamma'_0} \delta \alpha_0^{in} , \\ \tau \frac{d}{dt} \alpha_1 &= -\gamma' (1 + i\Delta) \delta \alpha_1 + 2\chi \alpha_2^* \delta \alpha_0 + 2\chi \alpha_0 \delta \alpha_2^* + \sqrt{2\gamma'} \delta \alpha_1^{in} , \\ \tau \frac{d}{dt} \alpha_2 &= -\gamma' (1 + i\Delta) \delta \alpha_2 + 2\chi \alpha_1^* \delta \alpha_0 + 2\chi \alpha_0 \delta \alpha_1^* + \sqrt{2\gamma'} \delta \alpha_2^{in} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para os campos sinal e complementar, $\delta\alpha_1^{in}$ e $\delta\alpha_2^{in}$ representam as flutuações do vácuo.

Escrevendo estas equações em termos das quadraturas amplitude δp_j e fase δq_j dos campos, as equações de interesse se tornam

$$\begin{aligned}
\tau \frac{d}{dt} \delta p_1 &= -\gamma' \delta p_1 + \gamma' \Delta \delta q_1 + (\chi \alpha_2^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta p_0 + (i\chi \alpha_2^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta q_0 + \\
&\quad + (\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta p_2 - (i\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta q_2 + \sqrt{2\gamma'} \left[\cos \varphi \delta p_1^{in} - \text{sen } \varphi \delta q_1^{in} \right], \\
\tau \frac{d}{dt} \delta q_1 &= -\gamma' \delta q_1 - \gamma' \Delta \delta p_1 + (\chi \alpha_2^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta q_0 - (i\chi \alpha_2^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta p_0 - \\
&\quad - (\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta q_2 - (i\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta p_2 + \sqrt{2\gamma'} \left[\text{sen } \varphi \delta p_1^{in} + \cos \varphi \delta q_1^{in} \right], \\
\tau \frac{d}{dt} \delta p_2 &= -\gamma' \delta p_2 + \gamma' \Delta \delta q_2 + (\chi \alpha_1^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta p_0 + (i\chi \alpha_1^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta q_0 + \\
&\quad + (\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta p_1 - (i\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta q_1 + \sqrt{2\gamma'} \left[\cos \varphi \delta p_2^{in} - \text{sen } \varphi \delta q_2^{in} \right], \\
\tau \frac{d}{dt} \delta q_2 &= -\gamma' \delta q_2 - \gamma' \Delta \delta p_1 + (\chi \alpha_1^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta q_0 - (i\chi \alpha_1^* e^{i(\varphi_0 - \varphi)} + \text{c.c.}) \delta p_0 - \\
&\quad - (\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta q_1 - (i\chi \alpha_0 e^{-2i\varphi} + \text{c.c.}) \delta p_1 + \sqrt{2\gamma'} \left[\text{sen } \varphi \delta p_2^{in} + \cos \varphi \delta q_2^{in} \right],
\end{aligned} \tag{4.5}$$

em que $\varphi \equiv \varphi_1 = \varphi_2$ é a fase dos modos intracavidade α_1 e α_2 , e φ_0 , a fase de α_0 .

Estas equações podem ser escritas para nosso par EPR de interesse. Definindo o vetor de variáveis

$$\mathbf{P} = [\delta p_-, \delta q_-, \delta p_+, \delta q_+, \delta p_0, \delta q_0]^T, \tag{4.6}$$

obtém-se o sistema

$$\tau \frac{d}{dt} \mathbf{P} = -\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{in}. \tag{4.7}$$

Com o uso dos valores estacionários dos campos obtidos na seção 3.1, tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\gamma\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma\Delta & -\sqrt{2}\gamma|\alpha|/|\alpha_0| & \sqrt{2}\gamma\Delta|\alpha|/|\alpha_0| \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma & -2\gamma\Delta|\alpha|/|\alpha_0| & -2\gamma|\alpha|/|\alpha_0| \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\gamma|\alpha|/|\alpha_0| & \sqrt{2}\gamma\Delta|\alpha|/|\alpha_0| & \gamma_0 & -\gamma_0\Delta_0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\gamma\Delta|\alpha|/|\alpha_0| & \sqrt{2}\gamma|\alpha|/|\alpha_0| & \gamma_0\Delta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

que também pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_- & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_+ \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

O vetor de flutuações de entrada \mathbf{P}_{in} é simplesmente o vácuo para os campos sinal e complementar; para o modo do bombeio, entretanto, as flutuações do feixe de bombeio devem ser levadas em conta. A diferença de fase entre os campos de entrada e os campos intracavidades aparecem na matriz \mathbf{B} . Escolheremos as fases dos campos de entrada como referências para as outras fases, sendo portanto nulas. Assim,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_- & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_+ & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_0 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

em que

$$\mathbf{B}_j = \sqrt{2\gamma_j} \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & \text{sen } \varphi_j \\ -\text{sen } \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

As formas das matrizes (4.9) e (4.10), diagonais por blocos, nos mostram novamente que as equações para as flutuações da subtração das amplitudes e das fases são desacopladas das flutuações da soma e do bombeio.

O último passo é calcular as flutuações dos feixes de saída da cavidade, formadas pela combinação dos feixes transmitidos pelo espelho de acoplamento com o vácuo refletido pelo mesmo, assim como em (3.81),

$$P_{out} = \mathbf{B}'P - \mathbf{B}''P_{in}, \quad (4.12)$$

em que

$$\mathbf{B}'_j = \sqrt{2\gamma_j} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_j - \varphi_j^{out}) & -\text{sen}(\varphi_j - \varphi_j^{out}) \\ \text{sen}(\varphi_j - \varphi_j^{out}) & \cos(\varphi_j - \varphi_j^{out}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}''_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi_j^{out} & \text{sen} \varphi_j^{out} \\ -\text{sen} \varphi_j^{out} & \cos \varphi_j^{out} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

As equações (4.6) e (4.13), após combinadas, podem ser facilmente resolvidas no domínio de frequência,

$$\mathbf{P}(\Omega) = \int \mathbf{P}(t) e^{i\Omega t} dt, \quad (4.14)$$

de modo que a matriz de espectros de ruído (2.50)

$$\mathbf{V}_{out} = \langle \mathbf{P}(\Omega) \mathbf{P}^T(-\Omega) \rangle \quad (4.15)$$

é dada por

$$\mathbf{V}_{out} = \left[\mathbf{B}'(\mathbf{A} + i\Omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}'' \right] \mathbf{V}_{in} \left[\mathbf{B}'(\mathbf{A} - i\Omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{B}'' \right]^T \quad (4.16)$$

em que $\mathbf{V}_{in} = \langle \tilde{P}_{in}(\Omega) \tilde{P}_{in}^T(-\Omega) \rangle$ é a matriz de ruído de entrada.

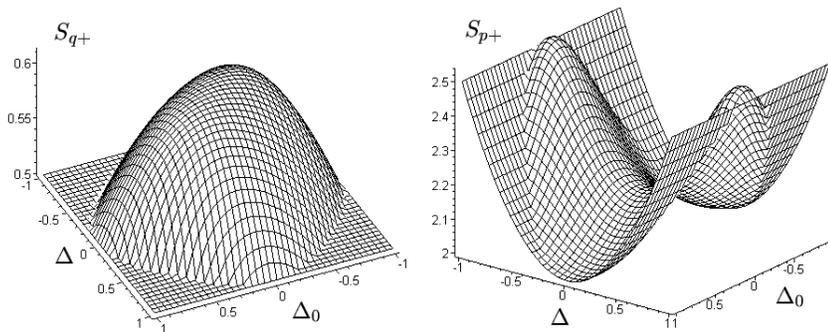


Figura 4.1: Ruído da soma das fases S_{q+} e amplitudes S_{p+} de sinal e complementar para um feixe de bombeio coerente. Usaram-se os parâmetros $\gamma = 0.01$, $\gamma_0 = 0.05$, $\Omega = 2\gamma/\tau$ e $\sigma = 2$.

Com o uso de um computador para fazer as inversões e produtos de matrizes necessários, é possível mostrar que

$$S_{p-}(\Omega) = \langle \delta p_{out-}(\Omega) \delta p_{out-}(-\Omega) \rangle = 1 - \frac{4\gamma^2}{4\gamma^2 + \tau^2\Omega^2},$$

$$S_{q-}(\Omega) = \langle \delta q_{out-}(\Omega) \delta q_{out-}(-\Omega) \rangle = \frac{1}{S_{p-}(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Esse resultado, já obtido em (3.83), assegura que a compressão da subtração das amplitudes dos feixes sinal e complementar é um resultado robusto, independente de parâmetros do feixe de bombeio. Portanto, eventuais excessos de ruído no mesmo não afetam a compressão.

Em contrapartida, a soma das fases depende sensivelmente do ruído de fase e de amplitude do feixe usado como bombeio. Na figura 4.1 são mostradas as curvas teóricas para estes ruídos no caso de um feixe de bombeio coerente, $S_{p0} = S_{q0} = 1$, em função das dessintonias de bombeio Δ_0 e sinal e complementar Δ .

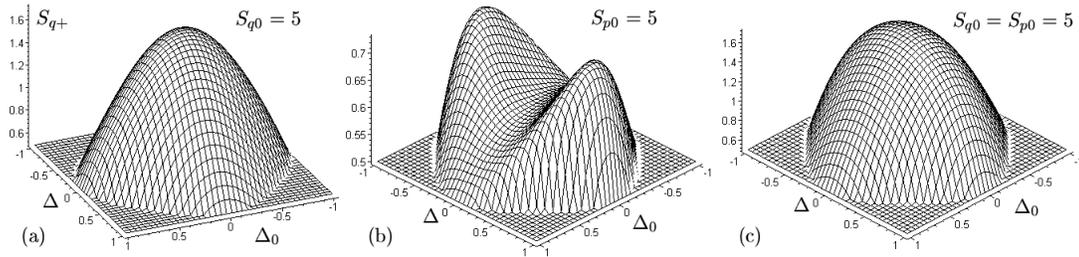


Figura 4.2: Ruído da soma das fases S_{q+} considerando um feixe de bombeio (a) apenas com excesso de ruído na fase $S_{q0} = 5$, (b) apenas com excesso de ruído na amplitude $S_{p0} = 5$, e (c) excesso de ruído em ambas $S_{q0} = S_{p0} = 5$. Foram usados os mesmos parâmetros das curvas 4.1.

Ao contrário de S_{p-} , que pode atingir valor nulo no caso ideal, a compressão em S_{q+} não atinge valores menores que $1/2$ em regiões próximas a dessintonias nulas $\Delta_0 = \Delta = 0$. Entretanto, isso já é suficiente para prever teoricamente o emaranhamento e a possibilidade de compressão necessária à implementação de um protocolo de criptografia quântica [8].

Situações menos favoráveis são mostradas nas curvas 4.1, em que são considerados excessos de ruído apenas na quadratura fase, apenas na amplitude ou em ambas as quadraturas do bombeio.

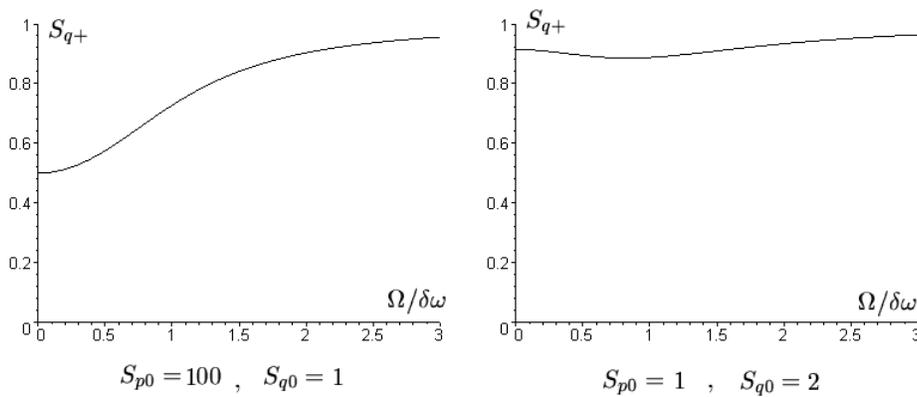


Figura 4.3: Comparação entre o efeito do excesso de ruído na amplitude e na fase de bombeio sobre S_{q+} em dessintonia nula, $\Delta_0 = \Delta = 0$. Os demais parâmetros são os mesmos da figura 4.1.

A partir das curvas 4.2, o ruído S_{q+} parece ser mais sensível a excesso de ruído na fase S_{q0} do bombeio do que em sua amplitude S_{p0} . Esta impressão é confirmada nas curvas 4.3, traçadas em dessintonia nula, $\Delta_0 = \Delta = 0$.

De fato, o excesso de ruído na amplitude de bombeio tende a aumentar o ruído de S_{q+} para dessintonias não nulas, embora seu efeito seja muito pequeno. Nas curvas da figura 4.4 fica claro

que, mesmo com um grande excesso de ruído em S_{p0} , ainda há várias regiões de dessintonia Δ_0 em que a compressão de S_{q+} é acessível.

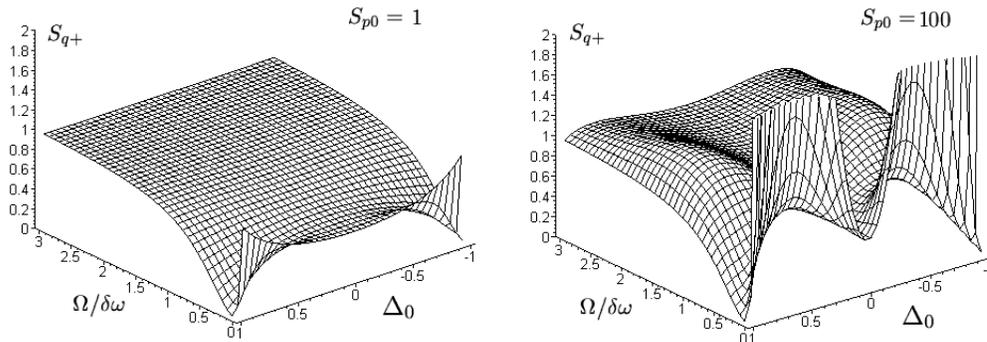


Figura 4.4: O excesso de ruído na amplitude de bombeio atua muito fracamente sobre a compressão em S_{q+} . À direita, $S_{p0} = 1$; à esquerda, $S_{p0} = 100$. Supomos $S_{q0} = 1$. Foram utilizados os mesmos parâmetros da figura 4.1.

Disto concluímos que o parâmetro do feixe de bombeio que pode inviabilizar as medidas é o excesso de ruído de fase S_{q0} do feixe de bombeio. Mesmo valores baixos como $S_{q0} = 2$ já comprometem a compressão em S_{q+} de modo bastante significativo (figura 4.3).

4.4 Rotação da Elipse de Ruído

Como primeiramente apontado por Galatola e colaboradores [7], uma cavidade ótica pode projetar flutuação de quadratura fase em flutuação de quadratura amplitude para uma dada região de parâmetros (frequência de análise e dessintonia da cavidade), o que é aqui chamado de “rodar” ou “girar” a elipse de ruído.

O princípio deste método de medição do ruído de fase de um campo é possível porque, basicamente, uma cavidade Fabry-Perot pode transformar ruído de quadratura fase em ruído de quadratura amplitude porque a fase de seu coeficiente de reflexão depende fortemente da frequência.



Figura 4.5: Situação física considerada.

Considerando que os feixes da figura 4.5 são intensos, podendo portanto ser linearizados com ótima aproximação em torno de valores médios bem definidos, com frequências iguais a ω_0 , apresentando pequenas flutuações no tempo em frequências Ω , $\Omega \ll \omega_0$, como no caso do OPO, é possível escrever seus operadores de destruição na forma genérica

$$a(t) = \alpha(t) + \delta\tilde{a}(t) = [\alpha + \delta a(t)] e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.18)$$

As componentes de Fourier para as flutuações lentamente variáveis $\delta a(t)$ são definidas como

$$\begin{aligned}\delta a(\Omega) &= \int a(t) e^{i\Omega t} dt, \\ \delta a^\dagger(\Omega) &= \int a^\dagger(t) e^{-i\Omega t} dt = [a(\Omega)]^\dagger.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Se definirmos também as componentes de Fourier da flutuação rápida,

$$\delta \tilde{a}(\omega) = \int \tilde{a}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.20)$$

vemos que

$$\delta a(\Omega) = \int \delta \tilde{a}(t) e^{i(\omega_0 + \Omega)t} dt = \delta \tilde{a}(\omega_0 + \Omega), \quad (4.21)$$

e, de maneira análoga,

$$\delta a^\dagger(\Omega) = \delta \tilde{a}^\dagger(\omega_0 + \Omega). \quad (4.22)$$

Por se tratar de um contínuo de frequências, as relações de comutação satisfeitas por estes operadores são

$$[a(t), a^\dagger(t')] = \delta(t - t') \quad \Longrightarrow \quad [a(\omega), a^\dagger(\omega')] = 2\pi \delta(\omega - \omega'). \quad (4.23)$$

Na situação quase clássica de que estamos tratando, a cavidade age sobre as componentes de frequência dos campos quânticos incidentes segundo as mesmas equações usadas para campos clássicos (ver capítulo 2, seção 2.4). Associando ao feixe incidente o operador de destruição a_{in} , ao feixe refletido pela cavidade, a_{out} , ao vácuo que entra pelo espelho de saída, b_{in} , e ao feixe transmitido, b_{out} , tem-se

$$\begin{aligned}a_{out}(\omega) &= r(\omega) a_{in}(\omega) + t(\omega) b_{in}(\omega), \\ b_{out}(\omega) &= t(\omega) a_{in}(\omega) - r'(\omega) b_{in}(\omega),\end{aligned}\quad (4.24)$$

em que $r(\omega)$ e $t(\omega)$ são os coeficientes de reflexão e transmissão de amplitude da cavidade para o feixe incidente e $r'(\omega)$, o coeficiente de reflexão para o vácuo incidente, dados, no caso de uma cavidade Fabry-Perot, por

$$r(\omega) = \frac{r_1 - r_2 e^{i2\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}, \quad r'(\omega) = \frac{r_2 - r_1 e^{i2\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}, \quad (4.25)$$

$$t(\omega) = \frac{t_1 t_2 e^{i\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}{1 - r_1 r_2 e^{i2\pi(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}}, \quad (4.26)$$

com $\Delta\omega_c$ sendo o intervalo espectral livre da cavidade, ω_c , sua frequência de ressonância mais próxima de ω_0 , e r_1 , r_2 , t_1 e t_2 , os coeficientes de reflexão e transmissão de amplitude de seus espelhos de entrada (índice 1) e saída (índice 2).

Como o valor médio β_{in} do vácuo é nulo, a média das equações (4.24) fornece

$$\begin{aligned}\alpha_{out} &= r(\omega_0) \alpha_{in}, \\ \beta_{out} &= t(\omega_0) \alpha_{in},\end{aligned}\quad (4.27)$$

o que mostra serem os valores médios dos campos também girados pela cavidade (ganham uma fase). A fim de se medir as mesmas quadraturas na entrada e na saída do feixe em relação ao

valor médio, é preciso levar em conta essa rotação no momento de definir as quadraturas dos feixes refletido e transmitido.

Definem-se, então, $p(t)$ e $q(t)$ respectivamente como as quadraturas amplitude e fase do feixe de entrada, $x(t)$ e $y(t)$ como as do vácuo, e $P_r(t)$ e $P_t(t)$ como as quadraturas amplitude dos feixes refletido e transmitido (não estaremos interessados nas quadraturas fase destes feixes), do seguinte modo: se o feixe de entrada é escolhido real por simplicidade¹, $\alpha_{in} = \alpha_{in}^*$, e se escreva

$$r(\omega_0) = |r(\omega_0)| e^{i\varphi_r}, \quad (4.28)$$

tem-se, para as flutuações lentamente variáveis (isto é, com frequência Ω em torno de ω_0),

$$\begin{aligned} p(t) &= a_{in}(t) e^{i\omega_0 t} + a_{in}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}, & q(t) &= -i [a_{in}(t) e^{i\omega_0 t} - a_{in}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}], \\ x(t) &= b_{in}(t) e^{i\omega_0 t} + b_{in}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}, & y(t) &= -i [b_{in}(t) e^{i\omega_0 t} - b_{in}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}], \\ P_r(t) &= e^{-i\varphi_r} a_{out}(t) e^{i\omega_0 t} + e^{i\varphi_r} a_{out}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}, & P_t(t) &= e^{-i\varphi_r} b_{out}(t) e^{i\omega_0 t} + e^{i\varphi_r} b_{out}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

No domínio de frequência, definem-se as transformadas de Fourier destes operadores,

$$\hat{o}(\omega) = \int \hat{o}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.30)$$

em que $\hat{o}(t)$ é um dos operadores definidos em (4.29), de forma que suas componentes de frequência possam ser escritas em termos das componentes de frequência dos operadores de criação e aniquilação definidas em (4.19). Por exemplo, tem-se para a flutuação de amplitude do feixe refletido,

$$\delta P_r(\Omega) = \int \delta P_r(t) e^{i\Omega t} dt \implies \delta P_r(\Omega) = e^{-i\varphi_r} \delta a_{out}(\Omega) + e^{i\varphi_r} \delta a_{out}^\dagger(-\Omega). \quad (4.31)$$

O próximo passo é escrever as flutuações de operadores de saída (campos refletido e transmitido) em função de flutuações dos operadores de entrada (feixe incidente e vácuo). Para tal, utilizam-se as equações (4.24). A primeira delas fornece

$$\delta \tilde{a}_{out}(\omega) = r(\omega) \delta \tilde{a}_{in}(\omega) + t(\omega) \delta \tilde{b}_{in}(\omega). \quad (4.32)$$

Mas, de acordo com (4.21), isto implica em

$$\delta a_{out}(\Omega) = r(\omega_0 + \Omega) \delta a_{in}(\Omega) + t(\omega_0 + \Omega) \delta b_{in}(\Omega). \quad (4.33)$$

Para a equação adjunta, usa-se (4.22), obtendo-se

$$\delta a_{out}^\dagger(-\Omega) = r(\omega_0 - \Omega) \delta a_{in}^\dagger(\Omega) + t(\omega_0 - \Omega) \delta b_{in}^\dagger(-\Omega). \quad (4.34)$$

Neste ponto, basta escrever as flutuações de amplitude dos campos refletido $\delta P_r(\Omega)$ e transmitido $\delta P_t(\Omega)$ em termos das flutuações de quadratura do feixe incidente $\delta p_{in}(\Omega)$ e $\delta q_{in}(\Omega)$. Substituindo-se (4.33) e (4.34) em (4.31), obtém-se δP_r em função de $\delta a_{in}(\Omega)$, $\delta a_{in}^\dagger(-\Omega)$, $\delta b_{in}(\Omega)$ e $\delta b_{in}^\dagger(-\Omega)$. Finalmente, usam-se as relações (4.29) para se eliminar os operadores de criação e aniquilação do feixe incidente e do vácuo em função de operadores de quadratura.

¹Basta escolher sua fase como nula, posto que a mesma é definida a menos de uma constante: somente as fases relativas guardam importância.

Com isso, obtém-se para o feixe refletido

$$\delta P_r(\Omega) = g_1(\Omega) \delta p(\Omega) + i g_2(\Omega) \delta q(\Omega) + g_3(\Omega) \delta x(\Omega) + i g_4(\Omega) \delta y(\Omega) , \quad (4.35)$$

em que

$$\begin{aligned} g_1(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_r} r(\omega_0 + \Omega) + e^{i\varphi_r} r^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ g_2(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_r} r(\omega_0 + \Omega) - e^{i\varphi_r} r^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ g_3(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_r} t(\omega_0 + \Omega) + e^{i\varphi_r} t^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ g_4(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_r} t(\omega_0 + \Omega) - e^{i\varphi_r} t^*(\omega_0 - \Omega)] . \end{aligned} \quad (4.36)$$

A equação (4.35) expressa que a flutuação de amplitude do feixe refletido é uma função das flutuações das quadraturas amplitude e fase do feixe de entrada e do vácuo. Variando-se o comprimento da cavidade, varia-se sua dessintonia em relação ao feixe sob estudo; como a participação da flutuação de cada quadratura (coeficientes $g_j(\omega)$) depende da dessintonia, varrer a cavidade é equivalente a girar a elipse de ruído (na representação de Fresnel) do feixe de entrada projetando-a no ruído de amplitude do feixe refletido.

Em outras palavras, a fase que a cavidade fornece a cada frequência de ruído é diferente da fase fornecida ao valor médio do campo, e, por serem estas fases função da dessintonia da cavidade, é possível atrasar determinadas componentes de ruído em relação ao valor médio. Para uma configuração específica de atrasos, ruído de fase do feixe incidente se torna ruído de amplitude do feixe refletido.

As curvas da figura 4.6 mostram como variam estes coeficientes em função da dessintonia da cavidade em relação ao feixe sob estudo e também como se comportam em diferentes frequências de análise.

O espectro de ruído do feixe refletido é calculado como indicado no capítulo 2, seção 2.2,

$$\langle \delta P_r(\Omega) \delta P_r^\dagger(\Omega') \rangle = 2\pi S_r(\Omega) \delta(\Omega - \Omega') , \quad (4.37)$$

e, definindo

$$\begin{aligned} \langle \delta p(\Omega) \delta q(-\Omega') + \delta q(\Omega') \delta p(-\Omega) \rangle &= 2\pi C_{pq+}(\Omega) \delta(\Omega - \Omega') , \\ \langle \delta p(\Omega) \delta q(-\Omega') - \delta q(\Omega') \delta p(-\Omega) \rangle &= 2\pi C_{pq-}(\Omega) \delta(\Omega - \Omega') , \end{aligned} \quad (4.38)$$

como as correlações entre as quadraturas amplitude e fase, chega-se finalmente a

$$\begin{aligned} S_r(\Omega) &= |g_1(\Omega)|^2 S_p(\Omega) + |g_2(\Omega)|^2 S_q(\Omega) + |g_3(\Omega)|^2 + |g_4(\Omega)|^2 + \\ &+ 2 \operatorname{Im}\{g_1(\Omega)g_2^*(\Omega)\} C_{pq+} + 2 \operatorname{Re}\{g_1(\Omega)g_2^*(\Omega)\} C_{pq-} , \end{aligned} \quad (4.39)$$

em que $S_p(\Omega)$ e $S_q(\Omega)$ são respectivamente os espectros de ruído de $p(t)$ e $q(t)$ – definidos a partir de uma relação análoga à (4.37) –, exatamente aquilo que se quer determinar a partir da medida de $S_r(\Omega)$ (note que $S_x(\Omega)$ e $S_y(\Omega)$ são iguais a 1 por se tratar do campo de vácuo ²).

As correlações $C_{pq\pm}$ podem ser calculadas a partir de (4.16) usando os elementos não diagonais de \mathbf{V}_{out} ; entretanto, o que se objetiva durante a medida é $|g_2| \approx 1$ e $|g_1| \approx 0$, situação em que os coeficientes de $C_{pq\pm}$ em (4.39) devem se tornar desprezíveis. O efeito de correlações não nulas é tornar assimétrica a curva de ruído de amplitude do feixe refletido em função da dessintonia da cavidade de análise.

²Além disso, é simples mostrar a partir de (4.23) que termos do tipo $\langle \delta x(\Omega) \delta y(-\Omega') \rangle$ são nulos.

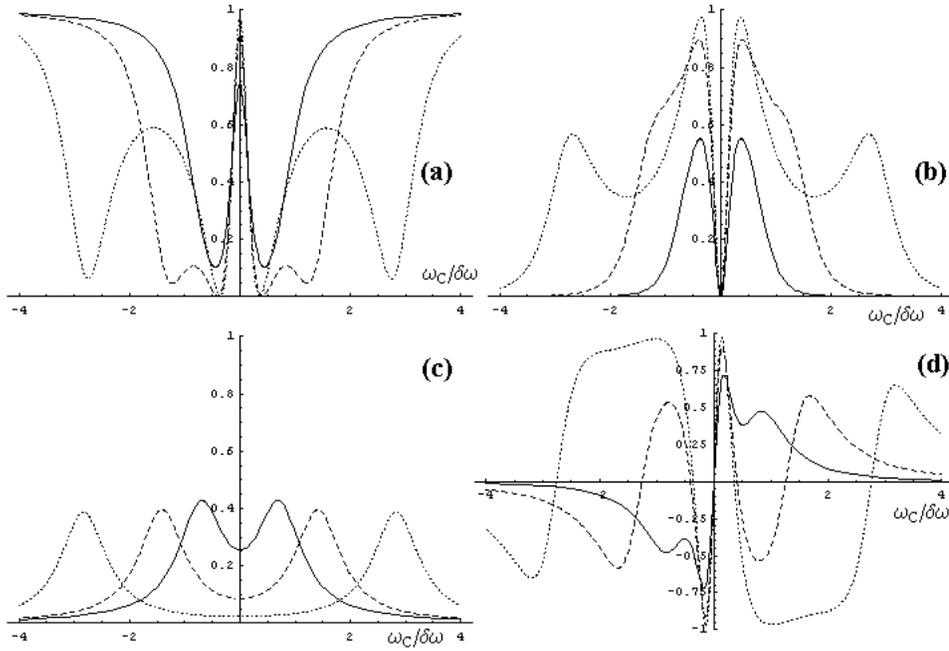


Figura 4.6: Curvas dos módulos dos coeficientes de (4.36) em função da dessintonia da cavidade de análise. (a) $|g_1|^2$, (b) $|g_2|^2$, (c) $|g_3|^2 + |g_4|^2$, (d) $2 \operatorname{Re}\{g_1 g_2^*\}$. Cada coeficiente é mostrado em três frequências de análise diferentes: Linha pontilhada: $\Omega = 2\sqrt{2}\delta\omega$; Linha tracejada: $\Omega = \sqrt{2}\delta\omega/2$; Linha contínua: $\Omega = \sqrt{2}\delta\omega$. Foram adotados os seguintes valores para os parâmetros relevantes: largura de banda (FWHM) da cavidade $\delta\omega = 5$ MHz e finesse $F = 270$, bem como ruído de amplitude $S_p = 2$ e de fase $S_q = 10$ (em unidades de *shot noise*) para o feixe incidente.

Na figura 4.7 são mostradas algumas curvas de rotação de elipse de ruído para diversas frequências de análise. Em particular, é de se notar que se torna possível girar completamente a elipse (ou seja, o coeficiente $|g_1(\Omega)|^2$ vai a zero para algum valor de dessintonia da cavidade) apenas para frequências de análise que satisfaçam

$$\Omega \geq \sqrt{2}\delta\omega, \quad (4.40)$$

em que $\delta\omega$ é a largura de banda da cavidade (FWHM), em total acordo com [7] (ver também figura 4.6). Isto implica que as cavidades de análise devem ter altas finesses e/ou grandes comprimentos, já que a largura de banda é o quociente da finesse pelo intervalo espectral livre.

Os coeficientes $|g_1|^2$ e $|g_2|^2$ são sempre menores que 1, podendo ser quase interpretados como o seno e o cosseno do ângulo de rotação da elipse. O único problema com esta interpretação é que $|g_1|^2 + |g_2|^2 \leq 1$, a igualdade só valendo se o espelho de saída for perfeito (reflexão unitária), caso em que o vácuo não entra por este espelho. Portanto, o efeito da transmissão do espelho de saída é atrapalhar a rotação da elipse de ruído.

Outro fato interessante é que, para frequências de análise típicas, o máximo de $|g_2(\Omega)|$ (e, conseqüentemente, o mínimo de $|g_1(\Omega)|$) ocorre aproximadamente quando a dessintonia da cavidade é tal que a intensidade transmitida é metade da transmissão máxima. Isso significa que é nessa região, na metade do valor máximo da curva de transmissão (ou reflexão), que as flutuações do feixe refletido são quase totalmente formadas por flutuação da quadratura fase do feixe incidente.

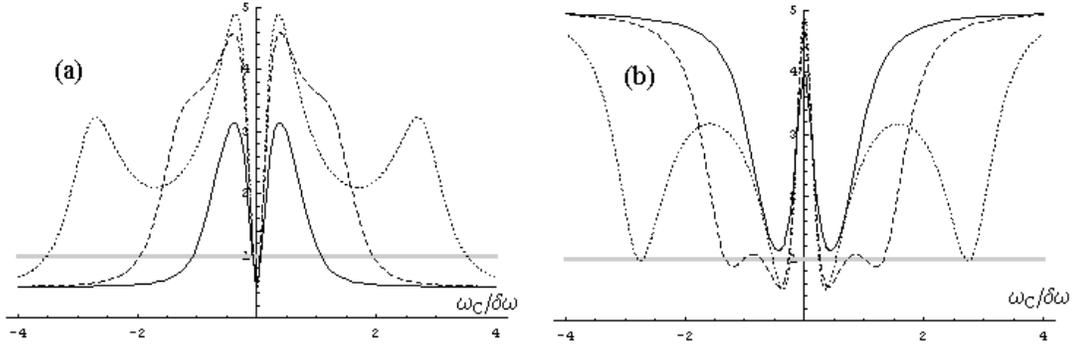


Figura 4.7: Ruído do feixe refletido S_r em função da dessintonia da cavidade de análise. Feixe incidente comprimido na quadratura **(a)** amplitude, com $S_p = 0, 5$ e $S_q = 5$ em unidades de *shot noise* (representado pela linha horizontal cinza) ou **(b)** fase, com $S_p = 5$ e $S_q = 0, 5$. As frequências de análise são: Linha tracejada: $\Omega = \sqrt{2}\delta\omega/2$; Linha contínua: $\Omega = \sqrt{2}\delta\omega$; Linha pontilhada: $\Omega = 2\sqrt{2}\delta\omega$. Os mesmos parâmetros da figura 4.6 são utilizados.

Um cálculo análogo revela que a flutuação do feixe transmitido também é função das flutuações dos feixes de entrada,

$$\delta P_t(\Omega) = h_1(\Omega) \delta p(\Omega) + i h_2(\Omega) \delta q(\Omega) + h_3(\Omega) \delta x(\Omega) + i h_4(\Omega) \delta y(\Omega) , \quad (4.41)$$

em que, escrevendo $t(\omega_0) = |t(\omega_0)| e^{i\varphi t}$, tem-se

$$\begin{aligned} h_1(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi t} t(\omega_0 + \Omega) + e^{i\varphi t} t^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ h_2(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi t} t(\omega_0 + \Omega) - e^{i\varphi t} t^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ h_3(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi t} r(\omega_0 + \Omega) + e^{i\varphi t} r^*(\omega_0 - \Omega)] , \\ h_4(\Omega) &= \frac{1}{2} [e^{-i\varphi t} r(\omega_0 + \Omega) - e^{i\varphi t} r^*(\omega_0 - \Omega)] , \end{aligned} \quad (4.42)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} S_r(\Omega) &= |h_1(\Omega)|^2 S_p(\Omega) + |h_2(\Omega)|^2 S_q(\Omega) + |h_3(\Omega)|^2 + |h_4(\Omega)|^2 + \\ &+ 2 \text{Im}\{h_1(\Omega)h_2^*(\Omega)\} C_{pq+} + 2 \text{Re}\{h_1(\Omega)h_2^*(\Omega)\} C_{pq-} , \end{aligned} \quad (4.43)$$

Entretanto, o ruído do feixe transmitido não é uma informação de grande valia por algumas razões. Primeiramente, a elipse jamais é completamente rodada. Em segundo lugar, os coeficientes $h_1(\Omega)$ e $h_2(\Omega)$ são muito parecidos, seus módulos apresentando valores máximos na mesma região de dessintonia da cavidade, o que impede ver flutuação de fase numa região diferente da flutuação de amplitude. Finalmente, a intensidade do feixe transmitido é não desprezível apenas na ressonância da cavidade, local em que a elipse de ruído ainda não é girada para frequências típicas de análise. Esse resultado está em acordo com o fato de que uma cavidade ótica pode ser usada para filtrar ruído de um feixe [46].

4.5 Arranjo Experimental

Nossa proposta de arranjo para a medida é mostrada na figura 4.8. Os feixes gêmeos gerados no OPO são separados por um divisor de feixe polarizante (PBS) – sinal e complementar têm polarizações ortogonais num OPO tipo II – e cada um segue para sua cavidade de análise. Antes de ingressar na cavidade, cada feixe é transmitido por um outro PBS seguido por uma lâmina de quarto de onda, ficando circularmente polarizado: o feixe refletido pela cavidade, ao passar pela mesma lâmina no caminho de volta, é polarizado na direção ortogonal à de entrada, sendo refletido pelo segundo cubo. Daí ele parte para a detecção balanceada (figura 4.8).

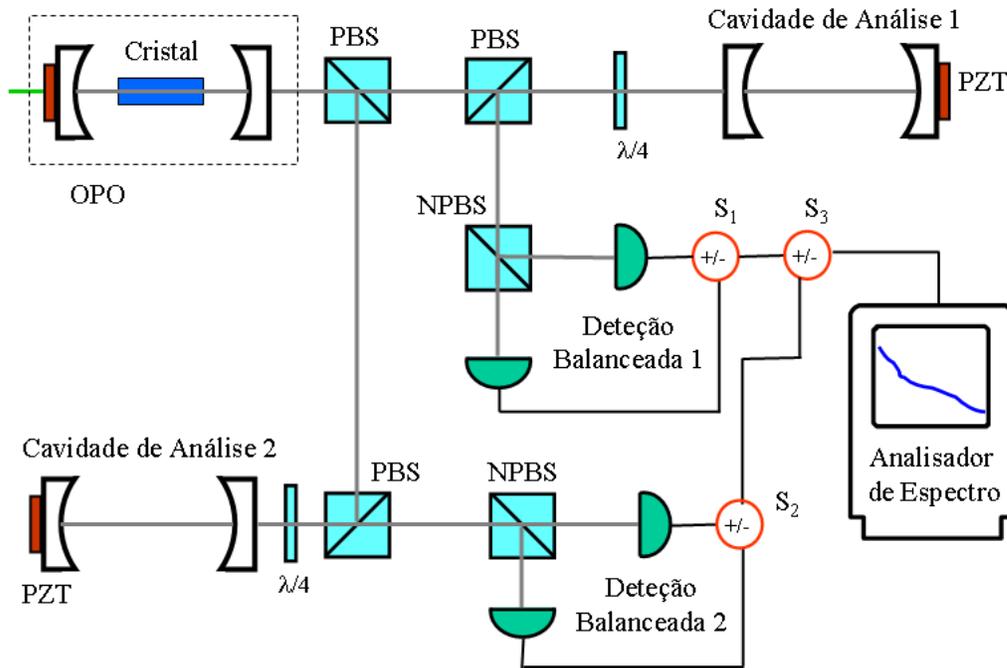


Figura 4.8: Arranjo experimental proposto para a medida de emaranhamento entre feixes intensos no OPO.

Cada detecção balanceada permite somar ou subtrair os sinais de fotocorrentes de seus dois detetores (suas chaves somadoras serão denotadas por S_1 e S_2). Além disso, outra chave (denotada por S_3) permite somar ou subtrair os sinais das detecções balanceadas.

Para se medir o *shot noise*, a base de comparação para as medidas de ruído, colocam-se S_1 e S_2 em subtração e S_3 em soma (ou subtração, o resultado deve ser o mesmo). Por outro lado, a medida de correlação propriamente dita é feita em duas etapas: com S_1 e S_2 em posição de soma e S_3 em subtração mede-se o ruído da subtração dos feixes; com S_1 , S_2 e S_3 em soma, o ruído da soma.

As cavidades são varridas em comprimento durante as medidas, o que faz girar a elipse de ruído. A parte mais delicada da medida é o fato de se ter de manter as cavidades com os picos de ressonância perfeitamente superpostos durante a varredura, a fim de que as duas elipses de ruído, uma de cada feixe, girem em sincronia.

O sinal de alta frequência da fotocorrente saído da chave S_3 é enviado a um aparelho analisador de espectro, que fornece a potência do ruído na frequência escolhida. O resultado de interesse da medida é a flutuação na quadratura amplitude da subtração e a flutuação na quadratura fase da soma das fotocorrentes dos dois feixes em determinada frequência de análise.

Naturalmente, cada cavidade não precisa ser necessariamente varrida durante a medida, mas pode ser mantida com o comprimento fixo exatamente na posição em que sua dessintonia em relação ao feixe permite a projeção máxima de flutuação de fase em flutuação de intensidade com o uso de um sistema de *lock-in*.

4.6 Medidas Preliminares

Efetuamos experimentalmente a proposta de medida discutida na seção anterior. Nossos resultados são inconclusivos devido a dificuldades que enfrentamos com nossa montagem experimental específica, sendo por isso preliminares; são, porém, bastante encorajadores e úteis por nos indicar a presença de emaranhamento e nos mostrar as dificuldades e pontos chave da experiência a serem melhorados.

Medidas passadas [42] e as medidas preliminares apresentadas a seguir já revelaram que nosso OPO gera feixes sinal e complementar dos quais a subtração direta das fotocorrentes (quadratura amplitude) apresenta aproximadamente 20% de compressão de ruído quando chegam aos fotodetetores. Logo, nossa intenção foi demonstrar que a soma das fases flutua menos que 1,2 vezes o ruído padrão.

Os dados tomados em cada medida foram: intensidade média de cada feixe (sinais DC dos fotodetetores); espectro de ruído da soma ou subtração dos feixes refletidos (sinal HF dos fotodetetores após serem somados ou subtraídos conforme descrito na seção anterior) nas frequências de análise de 5MHz, 10MHz e 20MHz; curva de transmissão das cavidades de análise em unidades arbitrárias (usadas para garantir que as cavidades estivessem em sincronia durante suas varreduras em comprimento); e ruído eletrônico.

Para tratamento de dados, foi feito o seguinte procedimento: subtraiu-se do ruído de interesse (soma, subtração ou *shot noise*) o ruído eletrônico, e então normalizou-se o resultado pela intensidade média total dos dois feixes. Tipicamente, o ruído eletrônico era pelo menos cinco vezes menor que os ruídos de interesse.

As cavidades de análise utilizadas eram formadas por dois espelhos esféricos, com raio de curvatura $R = 100\text{mm}$, um dos quais, o espelho de acoplamento, deveria refletir 98% da intensidade incidente, e o outro, ser altamente refletor, de modo a formar uma cavidade linear (somente um espelho de acoplamento), montadas em configuração quase confocal. Infelizmente, as especificações definidas na compra não foram atendidas, nem mesmo a qualidade de superfície, que se verificou ser abaixo do esperado em alguns espelhos do lote.

Com isso conseguimos, após um bom alinhamento, finesses de aproximadamente 150 e perdas consideráveis na luz refletida, o que é danoso quando se pretende medir correlações quânticas. Possuindo a cavidade pouco mais de 100mm de comprimento, isso implica numa largura de banda de aproximadamente 10MHz, possibilitando teoricamente a rotação completa da elipse de ruído apenas para frequências de análise superiores a 14MHz, comprometendo o nível de compressão obtida.

As medidas foram realizadas com ambas as cavidades de análise sendo varridas em comprimento em torno de suas ressonâncias com auxílio de cerâmicas piezoelétricas (PZT's). As curvas de transmissão das cavidades eram monitoradas e, através das tensões aplicadas aos PZT's, tentava-se mantê-las tão bem superpostas quanto possível. Isso era necessário para assegurar que as elipses de ruído de sinal e complementar eram giradas de forma síncrona.

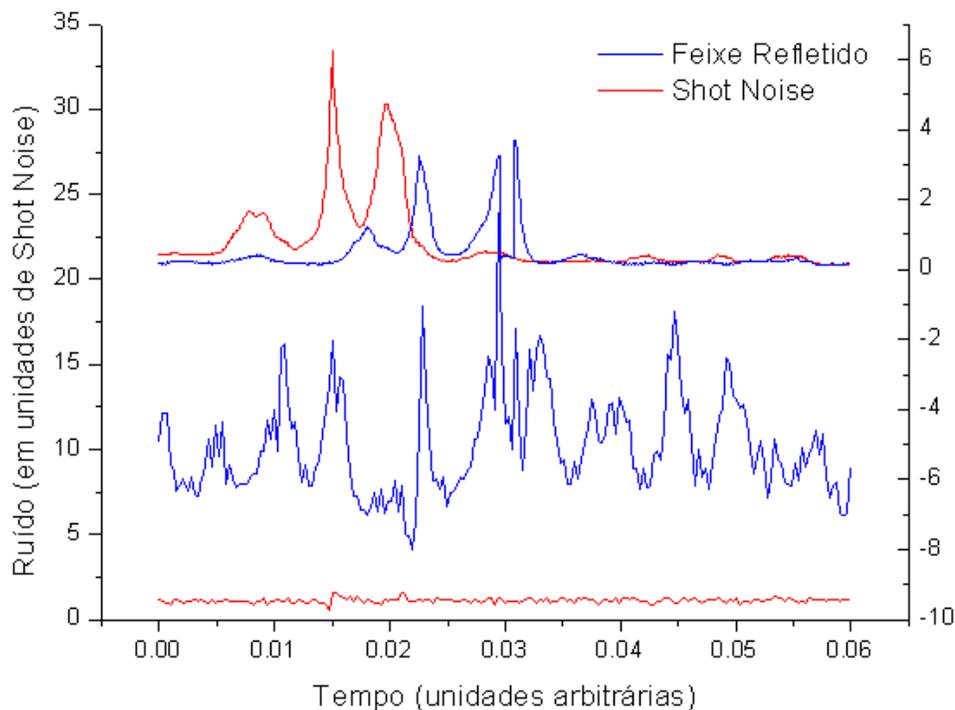


Figura 4.9: Ruído do feixe refletido normalizado pelo *shot noise* medido em função da varredura do comprimento da cavidade (realizada linearmente no tempo). A frequência de análise é igual a 5 MHz. Os sinais no topo da figura são os campos médios transmitidos pelas cavidades (sinais DC dos fotodetetores): em vermelho, na medida de *shot noise*; em azul, na medida de ruído do feixe sinal. Os gráficos na parte inferior são as medidas dos espectros de ruído dos sinais de alta frequência (HF) dos fotodetetores normalizadas pelo sinal DC e em unidades de *shot noise*: em vermelho, o *shot noise* normalizado; em azul, o ruído do feixe refletido.

Em primeiro lugar, testamos as cavidades separadamente a fim de caracterizar o ruído de cada feixe. A figura 4.9 mostra os resultados obtidos para um dos feixes (resultados análogos foram obtidos para o outro feixe). Como se pode ver, a cavidade de análise se encontrava muito instável, seu perfil de transmissão na ressonância estando muito diferente de uma curva lorentziana. Isso impediu que se identificasse a dessintonia da cavidade e, assim, que pontos da curva de ruído do feixe refletido correspondiam a uma flutuação na quadratura fase. Portanto, nada pudemos inferir dos ruídos de cada feixe nesta tentativa.

Em seguida, partimos para a medida de emaranhamento. Nossos resultados estão apresentados na figura 4.10. A coluna da direita abriga os ruídos da soma das fases dos feixes sinal e complementar; à esquerda encontram-se os ruídos da subtração de suas intensidades. Como se vê, as cavidades de análise não puderam girar completamente as elipses de ruído dos feixes, exceto na frequência de análise 20MHz. Entretanto, a compressão em frequências altas diminui sensivelmente (equação (3.83)), tornando a incerteza comparável ao valor medido de compressão. Por isso, são necessárias cavidades que girem as elipses de ruído em frequências de análise menores.

Vemos que, de modo geral, não há uma boa sincronia entre os picos de ressonância das cavidades de análise, o que introduz assimetrias nos ruídos medidos, já que, em alguns pontos no mesmo lado dos picos, suas laterais estão em sincronia, caracterizando bem a soma ou diferença

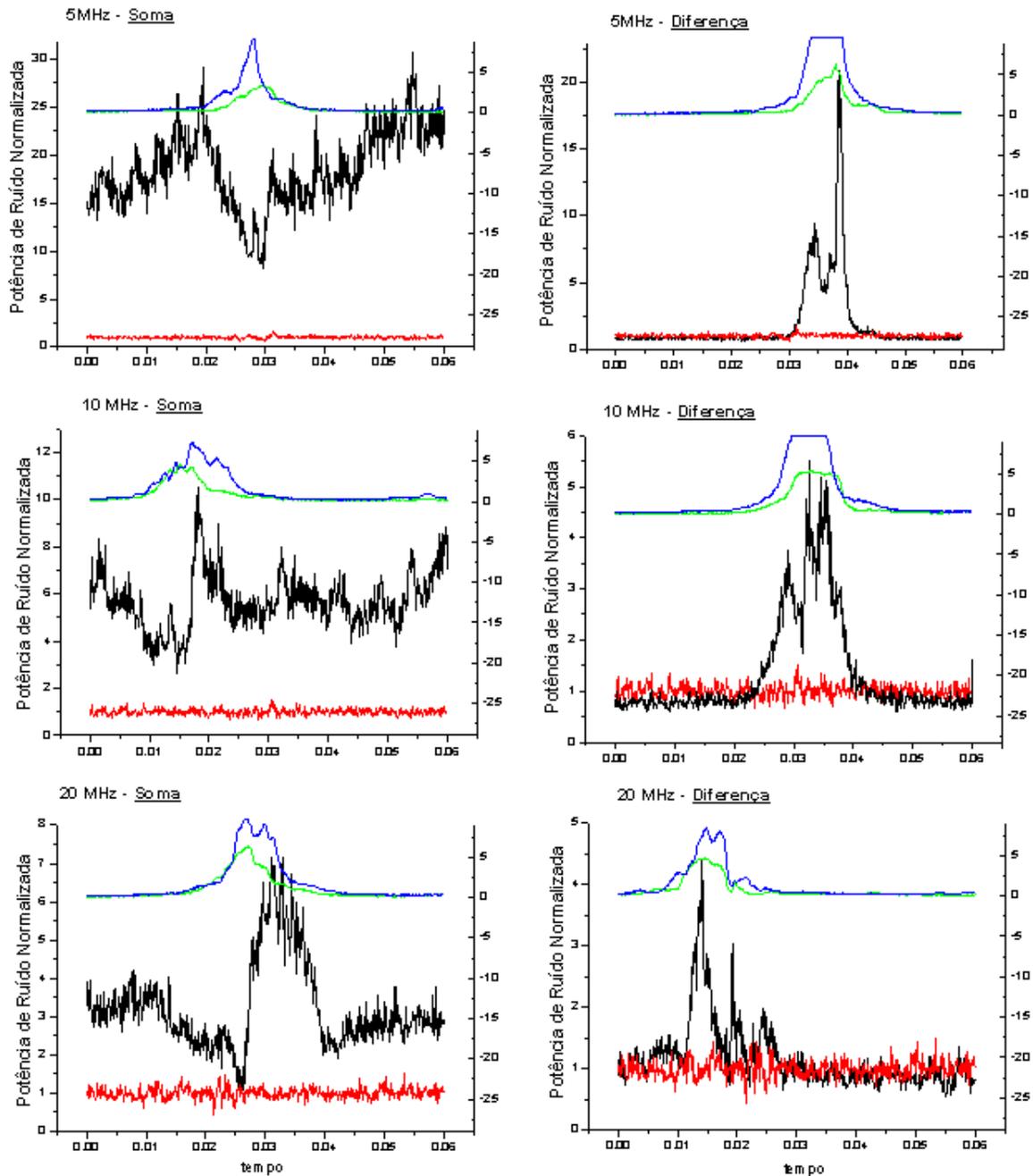


Figura 4.10: Curvas dos espectros de ruído da soma e da subtração das fotocorrentes dos dois feixes para várias frequências de análise. Os sinais na parte superior de cada gráfico (sinais DC das reflexões das cavidades) indicam como foi a superposição obtida entre as ressonâncias das cavidades. Em vermelho, o ruído padrão; em azul, o ruído da soma na coluna à direita, e da subtração à esquerda.

das quadraturas giradas, e, em outros, o máximo de um pico coincide com a lateral do outro, medindo algo que não é de interesse.

Melhorias a serem feitas para evitar estes problemas são: adquirir espelhos que satisfaçam as especificações ótimas de rotação da elipse e permitam pouca perda de luz; investir numa melhor estabilidade das cavidades, criando um desenho mais robusto; fixar as cavidades numa dessintonia otimizada fixa através de métodos de *lock-in*; aumentar a compressão do OPO, melhorando assim o mínimo excesso de ruído na soma das fases em que estaria caracterizado emaranhamento.

4.6.1 Ruído da Subtração

O ruído da diferença possui a função de caracterizar a compressão nas flutuações de intensidades fornecida pelo OPO e verificar se a medida é confiável, visto que o resultado pode ser comparado com medidas anteriores de compressão [42].

As curvas do ruído da diferença mostram que, com as cavidades distantes da ressonância, o ruído normalizado de subtração, em unidades de shot noise, era aproximadamente 0,8 (em unidades de *shot noise*) nas frequências de análise 5MHz e 10MHz (20% de compressão), e 0,9 em 20MHz (10% de compressão). Isto é consistente com o esperado para a compressão do OPO, que deve diminuir em função da frequência de análise até desaparecer para frequências maiores que a largura de banda da cavidade do OPO para os feixes sinal e complementar (figura 3.5), estimada em 15MHz em nosso caso.

Na ressonância das cavidades, nota-se que o ruído aumenta significativamente, caracterizando o excesso de ruído da subtração das fases. Como a subtração das amplitudes e das fases não comutam, a compressão em uma implica no excesso da outra; porém, a subtração das fases dos feixes de nossa experiência apresentam mais excesso do que o mínimo, não estando, portanto, num estado de incerteza mínima.

É durante a entrada na ressonância, na lateral do pico de transmissão, que a cavidade projeta ao máximo ruído de fase em ruído de amplitude. Segundo as curvas mostradas na figura 4.7, no centro da ressonância da cavidade não há projeção de ruído se a frequência de análise Ω satisfizer $\Omega > \delta\omega$, em que $\delta\omega$ é a largura de banda da cavidade de análise. Isso evidencia que nossas cavidades realmente não possuíam ressonâncias suficientemente estreitas em frequência para girar a elipse de ruído nas frequências de análise de 5MHz e 10MHz, como já dito anteriormente. Entretanto, o fato de o ruído aumentar na lateral da ressonância indica que a elipse está sendo parcialmente girada.

4.6.2 Ruído da Soma

O ruído da soma é a parte crucial da medida, por ser o ruído da soma das fases aquilo que falta para demonstrar experimentalmente o emaranhamento entre os feixes sinal e complementar não-degenerados acima do limiar.

As curvas apresentadas na coluna esquerda da figura 4.10 revelam resultados promissores, embora ainda não conclusivos. Nas frequências de análise 5MHz e 10MHz, verifica-se que o ruído da soma das fases sofre uma queda durante a ressonância das cavidades, o que é um bom indicativo, embora não chegue ao nível de *shot noise*. Isto já era esperado tendo em vista os resultados dos ruídos da subtração das intensidades, que demonstram não ser a elipse de ruído de cada feixe girada satisfatoriamente.

É possível ver também que o ruído sofre grandes oscilações mesmo fora da ressonância. Com isso em mente, percebe-se facilmente que uma medida com as cavidades fixas na dessintonia adequada seria muito mais confiável.

Por fim, a medida em frequência de análise 20MHz é extremamente motivadora, posto que esta é a única frequência de análise para a qual a elipse do ruído é completamente girada. Como se vê, sua curva de ruído da soma das fases aproxima-se consideravelmente do nível do *shot noise*. Em números, obtivemos, em unidades de *shot noise*,

$$\Delta^2 p_- = 0,9 \quad , \quad \Delta^2 q_+ \approx 1,15 \quad , \quad (4.44)$$

mas com uma grande imprecisão em $\Delta^2 q_+$, dado que somente alguns pontos adquiridos (aproximadamente 5) representam a região de ruído de fase e, ainda assim, com grande flutuação no valor medido.

Como se vê, a soma destas duas variâncias se encontra muito próxima de 2, sugerindo que melhores condições experimentais possam mostrar a violação da desigualdade 4.3. Por isso, consideramos estes dados um bom indicativo da possível existência de emaranhamento e um incentivo ao aperfeiçoamento da medida.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Foi apresentada uma proposta original de medida para caracterizar o emaranhamento dos feixes sinal e complementar gerados no OPO não-degenerado acima do limiar, a qual realizamos em caráter preliminar.

Basicamente, o emaranhamento seria demonstrado caso a variância de um par de operadores tipo EPR, formados a partir da combinação linear de operadores de quadraturas dos feixes sinal e complementar, violasse uma desigualdade tipo Bell, o critério de Duan e colaboradores.

No caso do OPO, o par EPR é a flutuação da soma das quadraturas fase dos feixes sinal e complementar e a flutuação da subtração de suas quadraturas amplitude. A fim de obter acesso às flutuações de fase dos feixes, utilizamos cavidades óticas para projetar ruído de fase em ruído de intensidade, dessa forma eliminando a necessidade de um oscilador local para cada feixe.

Nossas investigações teóricas indicam existir uma região de parâmetros experimentalmente acessível em que a soma das fases é comprimida, caracterizando emaranhamento, embora o ruído de fase do feixe usado como bombeio, se muito superior ao *shot noise*, possa denegrir esta compressão e até destruir o emaranhamento.

Dentre as dificuldades encontradas para a realização confiável da experiência, as principais foram de caráter técnico, necessitando de ajustes em nosso equipamento de medida.

Os resultados obtidos foram bastante encorajadores, apesar de inconclusivos. Em particular, o ruído da soma das fases em frequência de análise 20MHz, única frequência para a qual os ruídos de fase dos feixes podiam ser, em princípio, completamente inferidos, indicam o emaranhamento.

De modo a fundamentar os conceitos introduzidos nesta proposta, foram apresentadas a teoria clássica e quântica do OPO, abordando, no contexto de interesse, grande parte de seus conceitos essenciais quanto a funcionamento e características, bem como uma descrição resumida de tópicos de Ótica Quântica mais avançados cuja importância se mostrou de algum modo relevante para os cálculos realizados.

Nossas perspectivas são retomar a medida proposta num contexto experimental mais favorável, posterior à execução de algumas das melhorias apontadas, tanto nas cavidades de análise quanto no OPO em si, e possivelmente usar esta técnica para implementar um protocolo de criptografia quântica com feixes intensos.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Heidmann, R.J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, G. Camy, *Observation of quantum noise reduction on twin laser beams*, Phys. Rev. Lett. **59**, 255 (1987).
- [2] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J.I. Cirac, P. Zoller, *Inseparability criterion for continuous variable systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [3] Yui Zhang, Hai Wang, Xiaoying Li, Jietai Jing, Changde Xie, Kunchi Peng, *Experimental generation of bright two mode quadrature squeezed light from a narrow-band nondegenerate optical parametric amplifier*, Phys. Rev. A **62** 023813 (2000).
- [4] Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble, K.C. Peng, *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3663 (1992).
- [5] C. Schori, J.L. Sørensen, E.S. Polzik, *Narrow-band frequency tunable light source of continuous quadrature entanglement*, Phys. Rev. A **66**, 033802 (2002).
- [6] T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino, C. Fabre, *Type-ii continuous-wave optical parametric oscillators: oscillation and frequency-tuning characteristics*, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1668 (1993).
- [7] P. Galatola, L.A. Lugiato, M.G. Porreca, P. Tombesi, G. Leuchs, *System control by variation of the squeezing phase*, Opt. Commun. **85**, 95 (1991).
- [8] C. Silberhorn, N. Korolkova, G. Leuchs, *Quantum key distribution with bright entangled beams*, Phys. Rev. Lett. **88**, 167902 (2002).
- [9] R.J. Glauber, *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev. A **130**, 2529 (1963).
- [10] C.W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [11] C. Fabre, *Quantum Fluctuations in Light Beams*, Les Houches Sessão LXIII, editado por S. Reynaud, E. Giacobino e J. Zinn-Justin, 1997.
- [12] D.F. Walls, G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [13] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique*, Ellipses, Paris, 1997.
- [14] D.T. Pegg, S.M. Barnett, *Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field*, Phys. Rev. A **39**, 1665 (1989).
- [15] W. Schleich, J.A. Wheeler, *Oscillations in photon number distribution of squeezed states*, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 1715 (1987).

- [16] T. Debuisschert, *Reduction des Fluctuations Quantiques de la Lumière à l'Aide d'un Oscillateur Paramétrique Optique*, Tese de Doutorado, Universidade Pierre e Marie Curie, Paris, 1990.
- [17] M.J. Collett, C.W. Gardiner, *Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification*, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
- [18] M.J. Collett, D.F. Walls, *Squeezing spectra for nonlinear optical systems*, Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985).
- [19] B. Yurke, *Use of cavities in squeezed-state generation*, Phys. Rev. A **29**, 408 (1984).
- [20] M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [21] R.P. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985.
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions/Edition du CNRS, Paris, 1988.
- [23] R.J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [24] E.C.G. Sudarshan, *Equivalence of semiclassical and quantum description of statistical light beams*, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [25] E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [26] J. Gea-Banacloche, N. Lu, L.M. Pedrotti, S. Prasad, M.O. Scully, K. Wódkiewicz, *Treatment of the spectrum of squeezing based on the modes of the universe. I. Theory and a physical picture*, Phys. Rev. A **41**, 369 (1990).
- [27] A.E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, 1986.
- [28] H. Kogelnik, *Laser Beams and Resonators*, Proc. IEEE **54**, 1312 (1966).
- [29] C.H. Bennett, Phys. Today **48**, No. 10, 24 (1995); D. P. DiVincenzo, Science **270**, 255 (1995).
- [30] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [31] G. Boyd, D.A. Kleinman, J. Appl. Phys. **39**, 3597 (1968).
- [32] N. Pettiaux, Ruo-Ding Li, P. Mandel, Opt. Commun. **72**, 256 (1989).
- [33] C. Riché, K.I. Petsas, E. Giacobino, C. Fabre, L. Lugiato, *Observation of bistability and delayed bifurcation in a triply resonant optical parametric oscillator*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 456 (1995).
- [34] L.A. Lugiato, C. Oldano, C. Fabre, E. Giacobino, R.J. Horowicz, *Bistability, Self-Pulsing and Chaos in Optical Parametric Oscillators*, Il Nuovo Cimento **10**, 959 (1988).

- [35] C. Fabre, S. Reynaud, *Quantum noise in optical systems: a semi-classical approach*, Les Houches Sessão LIII, editado por J. Dalibard, J.M. Raimond e J.Zinn-Justin, Elsevier Science, 1990.
- [36] M. Martinelli, C.L. Garrido Alzar, P.H. Souto Ribeiro, P. Nussenzeveig, *Classical and quantum properties of optical parametric oscillators*, Braz. J. Phys. **31**, 597 (2001).
- [37] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, S. Reynaud, *Noise characteristics of a non-degenerate optical parametric oscillator – application to quantum noise reduction*, J. Phys. France **50**, 1209 (1989).
- [38] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, L. Lugiato, S. Reynaud, M. VDACCHINO, W. KAIGE, *Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators*, Quantum Opt. **2**, 159 (1990).
- [39] J.P. Féve, B. Boulanger, G. Marnier, *Repetition rate dependence of gray-tracking in $KTiOPO_4$ during second harmonic generation at 532nm*, Appl. Phys. Lett. **70**, 277 (1997).
- [40] B. Boulanger, J.P. Féve, Y. Guillien, *Thermo-optical effect and saturation of nonlinear absorption induced by gray-tracking in 532nm-pumped KTP optical parametric oscillator*, Opt. Lett. **25**, 484 (2000).
- [41] X. Mu, Y.J. Ding, *Investigation of damage mechanisms of $KTiOPO_4$ crystals by use of a continuous-wave argon laser*, Appl. Opt. **39**, 3099 (2000).
- [42] M. Martinelli, *Compressão de Ruído Quântico e Efeitos Transversos em Osciladores Paramétricos Óticos*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2002.
- [43] J.S. Bell, Physics **1**, 195 (1965); J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1988.
- [44] H.A. Bachor, *A Guide to Experiments in Quantum Optics*, Weinheim - Federal Republic of Germany: Wiley-VCH, 1998.
- [45] A. Einstein, B. Podolsky, R. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [46] B. Wilke, N. Uehara, E. Gustafson, R. Byer, P. King, S. Seel, R.S. Jr., *Spatial and temporal filtering on a 10-w nd:Yag laser with a Fabry-Perot cavity premode cleaner*, Opt. Lett. **23**, 1704 (1998).