

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

# Excesso de Ruído no Oscilador Paramétrico Ótico

Jônatas Eduardo da Silva César

Dissertação de mestrado apresentada ao  
Instituto de Física para a obtenção  
do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Martinelli (IF-USP)

Prof. Dr. Arnaldo Gammal (IF-USP)

Prof. Dr. Kaled Dechoum (UFF)

São Paulo

2008

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

César, Jônatas Eduardo da Silva

Excesso de ruído no oscilador paramétrico ótico – São Paulo - 2008

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física – Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli  
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Informação quântica; 2. Física experimental; 3. Feixes ópticos.

USP/IF/SBI-075/2008

*À minha família e amigos*



## *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- Agradeço ao Marcelo Martinelli por sua orientação e por sua ajuda em vários aspectos relacionados ao experimento.
- Agradeço ao Paulo Nussenzeig pela orientação.
- Agradeço aos membros convidados da banca examinadora Prof. Kaled Dechoum e Prof. Arnaldo Gammal pela leitura cuidadosa desse texto.
- Agradeço às pessoas do suporte técnico, especialmente às secretárias Edi e Ivanei, ao pessoal da eletrônica e serviços gerais, pois sem eles nosso trabalho seria praticamente inviável.
- Agradeço ao meu amigo Antônio por compartilhar comigo várias horas de trabalho nesse experimento.
- Agradeço aos meus amigos Felipe, Rodrigo, Laércio, Fábio e Paulo Valente por suas inúmeras e valiosas ajudas durante redação dessa dissertação e por tornarem os meus dias de convivência no laboratório muito mais agradáveis.
- Agradeço aos meus ex-colegas de grupo Katiúscia e Alessandro por me passarem parte de seus conhecimentos e me ajudarem nos primeiros momentos no laboratório.
- Agradeço também a minha namorada Layra e aos meus amigos de fora do laboratório, João, Diego, Carlos, entre os outros que cometo a injustiça de não citar seus nomes, por fazerem de São Paulo um lugar muito mais agradável de se viver.
- Por fim, agradeço à minha família, que é tão numerosa quanto próxima do meu pensamento e coração, por ter me moldado do jeito que sou.



# *Resumo*

Apesar de ser um experimento bem conhecido na literatura relacionada ao estudo da informação quântica, o Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) operando acima do limiar não forneceu sempre os resultados esperados por sua teoria, pois apresentava excesso de ruído na fase de seus feixes, de origem desconhecida.

Neste trabalho apresentamos de forma sistemática a teoria padrão do Oscilador Paramétrico Ótico no contexto quântico. Além disso, introduzimos um modelo ad-hoc para o excesso de ruído de fase do OPO que reproduz os resultados obtidos em nossos experimentos.

Em nosso modelo, inserimos um ruído na fase de cada feixe do OPO proporcional à intensidade dos campos intracavidade. Este ruído apresenta correlações não perfeitas entre os feixes, como foi demonstrado experimentalmente. Apesar de desconhecidas a origem desse excesso de ruído, temos indicações de que ele é causado por centros espalhadores de luz no cristal do OPO devido à presença de fônons de origem térmica.



# *Abstract*

In spite of the fact that the Optical Parametric Oscillator (OPO) is one of the most known experiments related with quantum information research, its experimental results did not have a good agreement with the theory, in the above threshold regime, because of an unexpected excess noise in the phase quadrature on its beams.

In this work we systematically present the quantum theory of OPO. Moreover, we introduce an ad-hoc model for the excess noise in the phase quadrature in the OPO that reproduces our experimental data.

In our model, the excess noise in the phase quadrature is proportional of the intensity of each OPO beam. This noise presents non-perfect correlations among the fields, as is experimentally observed. Despite of the unknown origin of this excess noise, we have some indications that it is caused by scattering centers produced by fonons of thermal origin.



# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 1
<b>1 Conceitos preliminares em Ótica Quântica</b>	p. 5
1.1 Princípio da incerteza . . . . .	p. 5
1.2 Matriz Densidade . . . . .	p. 7
1.3 Decomposição Espectral e Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	p. 8
1.3.1 Quantização do Campo Elétrico . . . . .	p. 11
1.3.2 Estados de Fock . . . . .	p. 13
1.4 Processo de medida e estados coerentes . . . . .	p. 14
1.4.1 Estados Coerentes . . . . .	p. 15
1.5 Quadraturas do Campo Elétrico . . . . .	p. 18
1.5.1 Estados comprimidos . . . . .	p. 21
1.6 Espaço das frequências . . . . .	p. 23
1.6.1 Espectro de ruído . . . . .	p. 24
1.7 Equação Mestra . . . . .	p. 24
1.8 Espaço de Fase Quântico e Função de Wigner . . . . .	p. 25
1.8.1 Matriz de covariância e Relação de Incerteza . . . . .	p. 28
1.8.2 Estados Gaussianos . . . . .	p. 29
1.9 Equação de Fokker-Planck e Equação de Langevin . . . . .	p. 30
1.10 Medida de Quadraturas . . . . .	p. 32
1.10.1 Cavidades Óticas . . . . .	p. 33

1.10.2	Auto Homodinagem . . . . .	p. 35
<b>2</b>	<b>Emaranhamento</b>	p. 39
2.1	Paradoxo EPR . . . . .	p. 39
2.2	Emaranhamento . . . . .	p. 41
2.2.1	Critérios de Emaranhamento . . . . .	p. 42
2.3	Positividade sob Transposição Parcial . . . . .	p. 43
2.3.1	Aplicação em Variáveis Contínuas . . . . .	p. 44
2.4	Somas de Variâncias . . . . .	p. 45
2.4.1	Caso Tripartite . . . . .	p. 46
<b>3</b>	<b>Oscilador Paramétrico Ótico</b>	p. 51
3.1	Descrição Quântica do OPO . . . . .	p. 52
3.2	Valores Estacionários . . . . .	p. 55
3.3	Flutuações Quânticas Linearizadas . . . . .	p. 56
3.4	Espectro de ruído do OPO . . . . .	p. 59
3.5	Feixes Gêmeos e Emaranhamento no OPO . . . . .	p. 62
3.6	Excesso de Ruído no OPO . . . . .	p. 69
<b>4</b>	<b>Experimento</b>	p. 75
4.1	Aparato Experimental . . . . .	p. 75
4.1.1	Cavidade de filtro . . . . .	p. 75
4.1.2	OPO . . . . .	p. 77
4.1.3	Cavidades de análise . . . . .	p. 78
4.1.4	Deteção . . . . .	p. 79
4.2	Caracterização Experimental do Excesso de Ruído . . . . .	p. 80
4.3	Excesso de Ruído Durante a Oscilação do OPO . . . . .	p. 84
4.4	Análise do excesso de ruído sobre o emaranhamento no OPO . . . . .	p. 87

---

<b>Conclusão e Perspectivas</b>	p. 93
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 95
<b>5 Operações Simpléticas</b>	p. 101



# *Introdução*

Atualmente, o estudo da informação quântica é uma das principais áreas de pesquisa em física, com vários artigos sendo publicados em revistas de amplo impacto como *Physical Review*, *Nature* e *Science*. O elemento principal para o estudo da computação quântica é uma propriedade totalmente não trivial de sistemas quânticos denominada emaranhamento. O estudo da informação quântica aborda temas como o próprio processo de computação [1] e maneiras de se transferir os dados processados para diferentes localidades [2].

Dizemos que um sistema quântico está emaranhado quando não podemos escrever a função de onda total do sistema como o produto das funções de onda de cada uma de suas partes [3]. Nesse caso as correlações quânticas podem ser muito mais fortes do que correlações clássicas [4].

O emaranhamento é por si só um grande objeto de estudo em física, ele foi pela primeira vez notado em um trabalho publicado por Einstein em 1935 [5] como um paradoxo na teoria quântica. Nesse mesmo ano, Niels Bohr publicou um trabalho em resposta a Einstein, mostrando que o paradoxo apontado por Einstein era apenas aparente e propôs uma série de experimentos mentais na tentativa de mostrar que a teoria quântica estava correta [6]. Ainda nesse ano, Schrödinger cunhou a palavra emaranhamento [7] para estados quânticos que tinham a característica mostrada por Einstein. Ele conclui que o emaranhamento é a característica dos sistemas quânticos que rompe totalmente com as idéias da física clássica.

Em nosso laboratório trabalhamos com um sistema físico chamado de Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) capaz de gerar feixes de luz intensos que apresentam essa importante propriedade. O OPO consiste de uma cavidade Fabry-Perot onde é inserido um cristal com susceptibilidade elétrica não-linear de segunda ordem,  $\chi^{(2)}$ .

Incidimos na cavidade do OPO um feixe laser intenso com frequência  $\omega_0$  denominado bombeio, então a partir do acoplamento desse feixe com o termo não-linear da susceptibilidade do cristal dois novos feixes intensos de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são criados e são denominados feixes sinal e complementar respectivamente. Por conservação de energia,

teremos que a soma das frequências dos feixes sinal e complementar deverá ser igual a frequência do feixe de bombeio  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Quanticamente, podemos pensar nesse processo como a aniquilação de um fóton do bombeio para a criação de dois novos fótons dos feixes sinal e complementar.

É intuitivo pensar, devido ao processo de conversão paramétrica, que os feixes bombeio sinal e complementar estejam fortemente correlacionados, sendo essas correlações tão intensas que esse feixes podem estar emaranhados. O emaranhamento entre os feixes sinal e complementar foi previsto teoricamente no ano de 1989 [8], sendo a principal característica que evidencia o emaranhamento, a compressão no ruído da subtração das amplitudes e da soma dos ruídos de fase desses feixes, ou seja, as variâncias dessas grandezas são menores que a variância da flutuação do vácuo.

A medida da compressão do ruído na subtração das amplitudes foi feita já no ano de 1987 na referência [9], no entanto, a compressão do ruído na soma das fases dos feixes gêmeos só foi medida recentemente pelo nosso grupo [10, 11], comprovando o emaranhamento bipartite entre os feixes sinal e complementar. Além disso, o emaranhamento entre o feixe de bombeio com os feixes sinal e complementar foi previsto também recentemente pelo nosso grupo [12]. No entanto, as medidas feitas até hoje ainda não foram capazes de comprovar essa propriedade entre os três campos [13, 14].

O principal motivo para isso e também um dos principais motivos que impediu por tanto tempo a verificação do emaranhamento bipartite entre os feixes gêmeos, é um excesso de ruído presente na fase desses feixe que até então tinha origem desconhecida.

Portanto, a principal motivação para essa dissertação é introduzir um modelo para esse excesso de ruído que ajusta muito bem todos os resultados obtidos pelo nosso grupo até hoje. O principal ingrediente do nosso modelo para o excesso de ruído é a introdução de um ruído de fase proporcional à potência intracavidade de cada feixe, considerando correlações não perfeitas entre esses ruídos. Ao que tudo indica, esse termo de excesso de ruído, que será introduzido nas equações do OPO, é gerado pela presença de centros espalhadores de luz no cristal devido a presença de fônons causados por agitações térmicas na rede cristalina.

No primeiro capítulo dessa dissertação introduzimos alguns conceitos de ótica quântica que são essenciais para o entendimento do nosso trabalho. Esses conceitos vão desde a quantização do campo eletromagnético até distribuição de quase-probabilidade. Abordamos também os conceitos de matriz densidade, e matriz de covariância e descrevemos o método que usamos no laboratório para medirmos diferentes quadraturas do campo

elétrico. No capítulo 2 falamos detalhadamente sobre emaranhamento e métodos para identificá-lo.

Já no capítulo 3, discorremos sobre o OPO, onde damos uma melhor noção de seu funcionamento a partir de princípios quânticos e mostramos as correlações entre seus feixes. No fim desse capítulo, introduzimos o nosso modelo teórico para o excesso de ruído no OPO. O quarto capítulo da dissertação mostra os resultados de nosso experimento corroborando com o nosso modelo para o excesso de ruído. Por fim, apresentamos as conclusões e perspectivas obtidas nesse trabalho.



# 1 *Conceitos preliminares em Ótica Quântica*

## 1.1 Princípio da incerteza

Na mecânica clássica o erro sobre uma medida decorre simplesmente por se considerar que existe uma certa imprecisão no aparato de medida. No entanto, na mecânica quântica a incerteza sobre uma medida é intrínseca à teoria, e decorre de que as grandezas físicas medidas no laboratório são auto-valores de operadores que atuam no espaço de Hilbert [15]. Dessa forma, a natureza quântica de muitos sistemas físicos só pode ser percebida na análise minuciosa das incertezas relacionadas ao processo da medida, pois os valores médios de muitas grandezas podem ser entendidos apenas usando a física clássica.

A flutuação sobre o valor médio de um operador  $\hat{o}$  é definida por

$$\delta\hat{o} = \hat{o} - \langle\hat{o}\rangle, \quad (1.1)$$

onde  $\langle\hat{o}\rangle$  é a média sobre a função de onda do sistema e sobre outros elementos estatísticos<sup>1</sup>.

Seguindo a descrição dada na referência [16], sabemos que para qualquer operador  $\hat{A}$  e seu conjugado Hermitiano  $\hat{A}^\dagger$ ,

$$\langle\hat{A}\hat{A}^\dagger\rangle \geq 0. \quad (1.2)$$

Definindo dois operadores Hermitianos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  tais que  $\hat{A} = \delta\hat{x} + \lambda e^{i\theta}\delta\hat{y}$  ( $\{\lambda, \theta\} \in \mathbb{R}$ ), logo,

$$\langle\delta\hat{x}^2\rangle + \lambda^2\langle\delta\hat{y}^2\rangle + \lambda\langle(\cos\theta\{\delta\hat{x}, \delta\hat{y}\} - i\sin\theta[\delta\hat{x}, \delta\hat{y}])\rangle \geq 0, \quad (1.3)$$

onde  $[\cdot, \cdot]$  é o comutador e  $\{\cdot, \cdot\}$  é o anticomutador. Para que a desigualdade (1.3) seja satisfeita  $[\delta\hat{x}, \delta\hat{y}]$  deve ser igual a zero ou a um número imaginário puro, além disso, como

---

<sup>1</sup>Como veremos na seção (1.2),  $\langle\hat{o}\rangle = \text{tr}(\hat{o}\hat{\rho})$  onde  $\hat{\rho}$  é a matriz densidade do sistema.

$\left(\sqrt{\langle\delta\hat{x}^2\rangle} - \lambda\sqrt{\langle\delta\hat{y}^2\rangle}\right)^2 \geq 0$ , completando quadrado podemos ver que

$$\langle(\cos\theta\{\delta\hat{x}, \delta\hat{y}\} - i\sin\theta[\delta\hat{x}, \delta\hat{y}])^2\rangle \leq 4\langle\delta\hat{x}^2\rangle\langle\delta\hat{y}^2\rangle. \quad (1.4)$$

Como (1.4) tem que ser válida para todo ângulo  $\theta$  devemos maximizar o lado esquerdo da desigualdade obtendo

$$|\langle\{\delta\hat{x}, \delta\hat{y}\}\rangle|^2 + |\langle[\delta\hat{x}, \delta\hat{y}]\rangle|^2 \leq 4\langle\delta\hat{x}^2\rangle\langle\delta\hat{y}^2\rangle. \quad (1.5)$$

No formalismo clássico, as grandezas físicas são números reais, de forma que a média do comutador entre essas grandezas sempre é nula. Portanto no limite clássico a desigualdade (1.5) se reduziria a

$$\langle\delta x^2\rangle\langle\delta y^2\rangle \geq \sigma_{xy}^2, \quad (1.6)$$

onde,  $\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\langle\delta x\delta y + \delta y\delta x\rangle$ . Classicamente o anulamento de  $\sigma_{xy}$  é uma condição necessária mas não suficiente para a independência das flutuações [17].

Já na Mecânica Quântica, as grandezas físicas são representadas por operadores Hermitianos que atuam no espaço de Hilbert. Além disso, sabemos que dois operadores Hermitianos que são conjugados não comutam entre si, como, por exemplo, no caso dos operadores posição  $\hat{q}$  e momento  $\hat{p}$ , onde o comutador entre eles é  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ . Com isso, teremos que a desigualdade (1.5) se torna

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \sqrt{\frac{1}{4}\hbar^2 + \sigma_{qp}}, \quad (1.7)$$

onde definimos  $\Delta^2\hat{o} = \langle\delta^2\hat{o}\rangle$ . Quando  $\sigma_{qp} = 0$ , ou seja, assumindo que só existem correlações quânticas, encontramos a expressão usual do Princípio da Incerteza de Heisenberg para posição e momento

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}\hbar. \quad (1.8)$$

Essa relação mostra que a posição e o momento de um objeto físico não podem ser medidos simultaneamente com precisão infinita, independentemente de quão perfeito seja o aparato de medida.

## 1.2 Matriz Densidade

Na mecânica quântica, para um sistema isolado, toda a informação física é dada por um vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$ , de forma que o valor médio de um observável  $\hat{A}$  é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle. \quad (1.9)$$

Na prática, um sistema isolado é muito difícil de se construir. Assim as medidas realizadas em laboratório são médias sobre um conjunto funções de onda ponderadas por médias estatísticas, que são obtidas pela repetição sistemática do experimento. Com isso, supondo que um sistema seja preparado em um conjunto de estados  $|\psi_n\rangle$ , sob uma determinada probabilidade estatística clássica  $P_n$ , o valor médio de um operador  $\hat{A}$  é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n P_n \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_n \rangle. \quad (1.10)$$

Definindo agora o operador densidade  $\hat{\rho}$  tal que

$$\hat{\rho} = \sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (1.11)$$

então a média do operador  $\hat{A}$  poderá ser dada através da expressão

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \\ &= \sum_k \langle \psi_k | \sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{A} | \psi_k \rangle \\ &= \sum_k P_k \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Portanto, a partir do operador densidade podemos incorporar tanto a estatística clássica quanto a estatística quântica de sistemas físicos.

**Estado puro e estado mistura:** Se um operador densidade de um sistema pode ser escrito como  $\hat{\rho} = |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$ , esse sistema é denominado como **puro**. O operador densidade desse sistema apresentará a propriedade  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ .

Tendo em vista que  $\sum_n P_n = 1$ , quando a matriz densidade representa um estado puro, teremos que  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ , caso contrário, dizemos que a matriz densidade representa um estado tipo **mistura**, e teremos que  $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ .

**Evolução temporal da Matriz densidade:** A evolução temporal de um estado quântico  $|\psi\rangle$  genérico é descrita pela equação de Schrödinger,

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle. \quad (1.13)$$

Portanto, derivando (1.11) em relação ao tempo, e usando a equação de Schrödinger, vemos que a evolução temporal da matriz densidade será dada por

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho(t)]. \quad (1.14)$$

Essa equação é conhecida na literatura como equação de Von Neumann [16], apesar de parecer com a equação de Heisenberg, para a evolução temporal de operadores, que é dada por,

$$\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \hat{A}]. \quad (1.15)$$

a equação da evolução temporal para a matriz densidade difere da equação de Heisenberg por um sinal, evidenciando que a evolução temporal do operador densidade ocorre no mesmo sentido que a evolução temporal de vetores de estado na descrição de Schrödinger, enquanto a evolução temporal para operadores na descrição de Heisenberg se dá no sentido contrário.

### 1.3 Decomposição Espectral e Quantização do Campo Eletromagnético

As Equações de Maxwell no vácuo para os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$ , na presença das densidades de corrente  $\mathbf{J}$  e carga<sup>2</sup>  $\rho$ , são dadas por [18]

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0, \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = \mu_0\mathbf{J}, \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.19)$$

Sabendo que o divergente de um rotacional é identicamente nulo, a equação (1.19)

---

<sup>2</sup>Apenas nessa seção o caracter  $\rho$  será usado para designar a densidade de carga ao invés da Matriz densidade

nos informa que o campo magnético pode ser descrito por,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.20)$$

onde o termo  $\mathbf{A}$  é denominado potencial vetor.

Substituindo a equação (1.20) em (1.16) e tendo em vista que  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , sendo  $\phi$  um potencial escalar, vemos que o campo elétrico será descrito por

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (1.21)$$

Ao substituírmos as equações (1.20) e (1.21), dos campos elétrico e magnético em termos dos potencial vetor e escalar, na equação de Maxwell (1.17) chegamos na seguinte expressão

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.22)$$

onde foi usado a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ .

Através das equações de Maxwell vemos que os campos elétrico e magnético são invariantes sobre as seguintes transformações sobre os potenciais vetor  $\mathbf{A}$  e escalar  $\phi$ ,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \Xi, \quad (1.23)$$

$$\phi = \phi' + \frac{\partial}{\partial t} \Xi, \quad (1.24)$$

onde  $\Xi$  é uma função escalar arbitrária. Esse tipo de transformação sobre os potenciais preserva os valores dos campos elétricos e magnéticos, sendo denominadas de transformações de calibre.

Obtemos o calibre de Coulomb impondo que o potencial vetor obedeça à condição  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Calculando o divergente da equação (1.18) vemos que esse calibre nos fornece diretamente a equação de Poisson para o potencial elétrico  $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ . Além disso teremos que a expressão (1.22) se reduz a

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.25)$$

Pelo teorema de Helmholtz [19] qualquer equação de campo pode ser reescrita como a soma de duas componentes, uma com o divergente igual a zero e outra componente com o rotacional igual a zero, essas componentes são denominadas componente transversal e longitudinal respectivamente.

Devido ao calibre de Coulomb, o potencial vetor só tem a componente transversal.

Além disso, o gradiente de um potencial escalar só tem a componente longitudinal. Fazendo essa separação para a densidade de corrente,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_T + \mathbf{J}_L$ , onde,  $\nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{J}_L = 0$ , e separando a equação (1.25) em suas componentes transversais e longitudinais encontramos,

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}_T, \quad (1.26)$$

e

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \mu_0 \mathbf{J}_L. \quad (1.27)$$

Portanto, quando não há corrente elétrica, vemos que (1.26) se reduz a uma equação de onda para o potencial vetor [20, 21],

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0. \quad (1.28)$$

Podemos encontrar a solução dessa equação de onda expandindo o potencial vetor numa série de Fourier e impondo uma condição periódica de contorno para um volume  $V = L^3$  do espaço, com isso teremos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} A_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (1.29)$$

onde,

$$A_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}\sigma}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}. \quad (1.30)$$

O vetor de onda  $\mathbf{k}$  define a direção de propagação de um determinado modo do campo dentro da cavidade, sendo que suas componentes são dadas por

$$k_x = \frac{2\pi}{L} \nu_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} \nu_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} \nu_z, \quad (1.31)$$

onde  $\{\nu_x, \nu_y, \nu_z\} \in \mathbb{Z}$ . A partir da equação de onda vemos que a frequência angular  $\omega_k$  se relaciona com o módulo do vetor de onda  $k$  por,  $\omega_k = ck$ .

O vetor unitário  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma}$  é o vetor de polarização do campo. Devido ao calibre de Coulomb o vetor de polarização deve ser perpendicular ao vetor de onda do campo, ou seja,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Além disso, os vetores de polarização são definidos de forma que um seja perpendicular ao outro,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$ .

Pela expressão (1.21) vemos que na ausência de correntes

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (1.32)$$

logo a expressão para o campo elétrico será

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (1.33)$$

onde

$$E_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = i\omega_k (A_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k}\sigma}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}). \quad (1.34)$$

A partir de (1.20) temos que o campo magnético é

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\sigma} B_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (1.35)$$

onde  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$  e

$$B_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = ik (A_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k}\sigma}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}). \quad (1.36)$$

Por fim, temos que a energia total do campo dentro da cavidade de volume  $V = L^3$  é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int dV \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)^2, \quad (1.37)$$

substituindo as expressões para o campo elétrico e para o campo magnético encontraremos que a energia total dos campos pode ser escrita como,

$$\mathcal{H} = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}\sigma} \omega_k^2 (A_{\mathbf{k}\sigma} A_{\mathbf{k}\sigma}^* + A_{\mathbf{k}\sigma}^* A_{\mathbf{k}\sigma}). \quad (1.38)$$

### 1.3.1 Quantização do Campo Elétrico

A Hamiltoniana quantizada de um oscilador harmônico é dada por

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2, \quad (1.39)$$

onde os operadores de posição  $\hat{q}$  e momento  $\hat{p}$  obedecem a relação de comutação usual,  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ . A partir desses operadores podemos definir dois novos operadores adimensionais

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} + i\hat{p}), \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} - i\hat{p}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

que obedecem a relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

Inversamente teremos,

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (1.41)$$

Substituindo (1.41) em (1.39), vemos que a hamiltoniana do oscilador harmônico poderá ser escrita como

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (1.42)$$

Aplicando os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  na Hamiltoniana do oscilador harmônico para um dado auto-estado  $|n\rangle$  com um auto-valor  $E_n$  mostra-se que [15],

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.43)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.44)$$

Por esse motivo, denominamos  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  de operadores criação e aniquilação respectivamente. Para encontrarmos o resultado anterior foi necessário definir um estado  $|0\rangle$  de mínima energia tal que,  $\hat{a}|0\rangle = 0$ .

Dado (1.43) e (1.44) podemos definir o operador número  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ , tal que,

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.45)$$

Com isso, teremos que os auto-valores da hamiltoniana do oscilador harmônico serão dados por

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle. \quad (1.46)$$

A forma na qual foram apresentadas as hamiltonianas do campo eletromagnético e do oscilador harmônico quantizado (apresentados nas fórmulas (1.38) e (1.42) respectivamente), sugere que a quantização do campo eletromagnético é dada por

$$A_{\mathbf{k}\sigma} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \quad A_{\mathbf{k}\sigma}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger. \quad (1.47)$$

Logo, existe um operador de criação e aniquilação para cada modo e polarização do campo. Equivalentemente, poderíamos ter feito a quantização do campo eletromagnético separando as partes real e imaginária de  $A_{\mathbf{k}\sigma}$  na hamiltoniana do campo eletromagnético clássico, e em seguida, identificando a parte real como o operador posição e a parte imaginária como o operador momento.

Como existem infinitos modos possíveis para o campo eletromagnético com duas dire-

ções de polarização a generalização da relação de comutação entre operadores de criação e aniquilação é

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (1.48)$$

Com isso, segue que a hamiltoniana do campo quântizado será dada por

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{n}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.49)$$

Portanto, para uma dada polarização, os modos do potencial vetor e dos campos elétricos e magnéticos serão dados por,

$$A_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right); \quad (1.50)$$

$$E_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = i\omega_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right); \quad (1.51)$$

$$B_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}, t) = ik \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right). \quad (1.52)$$

### 1.3.2 Estados de Fock

Os auto estados da hamiltoniana do campo eletromagnético são denominado estados de Fock ou estados número,

$$\hat{\mathcal{H}} |n\rangle = \omega \hbar \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (1.53)$$

Esses estados determinam o número de fótons para um modo do campo com uma certa polarização. Quando existem vários modos dentro de uma cavidade o estado total é dado pelo produto externo dos estados de cada modo do campo,

$$|n_{\mathbf{k}_1 1}, n_{\mathbf{k}_1 2}, n_{\mathbf{k}_2 1}, n_{\mathbf{k}_2 2}, \dots\rangle = |n_{\mathbf{k}_1 1}\rangle |n_{\mathbf{k}_1 2}\rangle |n_{\mathbf{k}_2 1}\rangle |n_{\mathbf{k}_2 2}\rangle = |\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}\rangle. \quad (1.54)$$

Um resultado fundamental da Mecânica Quântica é que mesmo para o vácuo, isto é, quando o número de fótons é igual a zero, a energia do campo não é nula. Assim numa cavidade com infinitos modos permitidos temos que a energia média do sistema na ausência total de fótons é,

$$\langle \{0_{\mathbf{k}\sigma}\} | \hat{\mathcal{H}} | \{0_{\mathbf{k}\sigma}\} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}\sigma} \quad (1.55)$$

essa energia é conhecida como energia do vácuo ou energia de ponto zero.

Apesar de experimentalmente ser muito difícil produzir estados onde o número de fótons é discreto [22], a base de estados de Fock tem muita utilidade por ser uma base ortonormal, além de ser auto-estado da Hamiltoniana do campo eletromagnético.

## 1.4 Processo de medida e estados coerentes

Em um experimento de ótica quântica a detecção do campo elétrico é feita por detectores que são sensíveis a fótons por meio do efeito foto-elétrico, ou seja, o processo de medida se baseia no processo pelo qual um fóton é aniquilado para que se produza um elétron, gerando assim uma corrente medida [23].

Tomando somente um modo do campo elétrico em uma determinada polarização, a partir de (1.51), vemos que o campo elétrico pode ser decomposto em uma parte com frequência positiva  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e outra com frequência negativa  $E^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ .

$$E(\mathbf{r}, t) = E^{(-)}(\mathbf{r}, t) + E^{(+)}(\mathbf{r}, t), \quad (1.56)$$

onde,

$$E^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{e} \quad E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.57)$$

Classicamente essa separação é somente uma convenção matemática sem acarretar nenhum significado físico, no entanto, não podemos considerar que o mesmo ocorra quanticamente, pois de fato, o operador não hermitiano  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  é o responsável pela aniquilação dos fótons, e por conseguinte, pelo processo de medida. Tendo isso posto, a probabilidade de transição para que um fóton seja absorvido pelo detector será dada por,

$$P_i |\langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2, \quad (1.58)$$

o estado  $|f\rangle$  representa o estado final para o qual o campo elétrico foi projetado, enquanto o estado  $|i\rangle$  representa o estado inicial do campo. No entanto, essa probabilidade deve ser ponderada pela probabilidade  $P_i$  estatística de se encontrar o estado inicial  $|i\rangle$ .

Vendo que,

$$\sum_f \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \propto \sum_f \langle f | i - 1 \rangle = \delta_{f, i-1}, \quad (1.59)$$

onde  $\delta_{f, i-1}$  representa o delta de Kronecker, então podemos, sem perda de generalidade, fazer uma soma sobre todos os estados finais em (1.58). No entanto, a intensidade média

medida deve ser dada pela soma de todos os possíveis estados iniciais, de onde vem que

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= \sum_{if} P_i |\langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2 \\ &= \sum_{if} P_i \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) | f \rangle \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \end{aligned} \quad (1.60)$$

como  $\sum_f |f\rangle \langle f| = 1$ . Sabendo que a matriz densidade do sistema é  $\rho = \sum_i P_i |i\rangle \langle i|$  segue

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{tr}[\rho E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t)] = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (1.61)$$

Com isso percebemos que a intensidade do campo é proporcional ao operador número  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , ou seja, a intensidade do campo é proporcional ao número de fótons que chega no detector por unidade de tempo. Supondo que o estado inicial do sistema seja o estado de vácuo,  $|0\rangle$ , a intensidade medida será

$$I(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle = 0 \quad (1.62)$$

como esperado. Vale observar que, usando a teoria clássica a intensidade medida seria igual ao quadrado do operador campo elétrico total, logo, para o estado de vácuo

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle^{vac} &= \langle 0 | E(\mathbf{r}, t)^2 | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E^{(-)}(\mathbf{r}, t)]^2 | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle + \langle 0 | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(-)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) E^{(-)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle + \langle 0 | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) E^{(-)}(\mathbf{r}, t) | 0 \rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

que é um resultado fisicamente incompatível, pois implicaria que mesmo para estado de vácuo os detectores mediriam uma intensidade média diferente de zero.

### 1.4.1 Estados Coerentes

Como já foi exposto anteriormente, o operador  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  é proporcional ao operador de aniquilação, então uma representação interessante para os estados do campo elétrico são os estados coerentes, que são auto-estados do operador de aniquilação [24]. A luz emitida por um laser se aproxima muito de um estado coerente [25], assim sendo, vemos que os estados coerentes se aproximam bastante de um estado clássico.

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (1.64)$$

aplicando  $\langle n-1|$  e usando as propriedades do operador de aniquilação, segue que

$$\sqrt{n}\langle n|\alpha\rangle = \alpha\langle n-1|\alpha\rangle, \quad (1.65)$$

e usando essa relação recursivamente encontramos,

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (1.66)$$

Tendo em vista esse resultado, ao expandirmos  $|\alpha\rangle$  nos vetores do espaço de Fock, encontraremos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle, \\ &= \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Ao impormos a condição de normalização  $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ , encontramos que a representação do estado coerente na base dos estados de Fock é dada por,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.68)$$

A partir disso, vemos que o estado coerente apresenta uma distribuição de Poisson no número de fótons

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (1.69)$$

de onde temos que o número médio de fótons é igual à variância, isto é,

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (1.70)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta^2 n &= \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle^2 \\ &= |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Os estados coerentes formam uma base completa mas que não é ortogonal apresentando a seguinte propriedade,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1. \quad (1.72)$$

Usando o operador deslocamento que será introduzido em seguida não é difícil provar

que o produto interno entre dois estados coerentes é

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha\beta^*}, \quad (1.73)$$

onde o valor absoluto do produto interno é

$$|\langle \beta | \alpha \rangle| = e^{-|\alpha - \beta|^2}, \quad (1.74)$$

sendo que no limite em que  $|\alpha - \beta| \rightarrow \infty$  os estados coerentes tendem a ser ortogonais.

Definindo o operador deslocamento como em [24]

$$D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}. \quad (1.75)$$

e usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}, \quad (1.76)$$

que pode ser usada quando  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ , podemos escrever o operador deslocamento em ordem normal, isto é, com as potências de  $\hat{a}^\dagger$  à esquerda das potências de  $\hat{a}$ ,

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}}, \quad (1.77)$$

ou em ordem anti normal, ou seja, com as potências de  $\hat{a}^\dagger$  à direita das potências de  $\hat{a}$ ,

$$D(\alpha) = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha^*\hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}, \quad (1.78)$$

Usando o operador deslocamento em ordem normal podemos mostrar que estado coerente pode ser obtido aplicando-o no estado de vácuo,

$$D(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{\alpha^*\hat{a}} |0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (1.79)$$

É interessante notar que a evolução temporal do oscilador harmônico forçado será dada pelo operador deslocamento vezes a evolução temporal do oscilador harmônico simples [26]. Temos então que o estado coerente pode ser encontrado quando evoluímos temporalmente o vácuo como condição inicial para esse sistema.

Algumas propriedades importantes do operador deslocamento são,

$$D(\alpha)^\dagger a D(\alpha) = a + \alpha, \quad (1.80)$$

$$D(\alpha)^\dagger a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*, \quad (1.81)$$

$$D^{-1}(\alpha) = D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha). \quad (1.82)$$

## 1.5 Quadraturas do Campo Elétrico

Como vimos na seção anterior podemos quantizar o campo elétrico fazendo com que os coeficientes do potencial vetor para cada modo do campo sejam relacionados com os operadores criação e aniquilação do oscilador harmônico. Para um único modo do campo elétrico com frequência  $\omega$  que se propaga na direção  $z$  e considerando que o campo elétrico é medido em unidades de  $\sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0V}$ , a partir da equação (1.51) podemos escrever o operador campo elétrico como

$$\begin{aligned}\hat{E}(x, t) &= i [\hat{a}e^{i(kx-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(kx-\omega t)}] \\ &= \hat{X} \cos(kx - \omega t + \pi/2) + \hat{Y} \sin(kx - \omega t + \pi/2),\end{aligned}\quad (1.83)$$

onde os operadores Hermitianos  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  são denominados operadores de quadratura do campo elétrico, e são definidos como

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad \hat{Y} = -i[\hat{a} - \hat{a}^\dagger], \quad (1.84)$$

de forma que

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i, \quad (1.85)$$

portanto a relação de incerteza será

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} \geq 1. \quad (1.86)$$

Em (1.83) existe uma fase de  $\pi/2$  para que pudéssemos definir os operadores quadratura como em (1.84). De fato, existe uma arbitrariedade de fase do campo eletromagnético, de forma que podemos definir os operadores quadratura por,

$$\hat{X}^\theta = \hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}, \quad \hat{Y}^\theta = -i[\hat{a}e^{-i\theta} - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}], \quad (1.87)$$

onde  $\hat{Y}^\theta = \hat{X}^{\theta+\pi/2}$  é o operador conjugado de  $\hat{X}^\theta$ . Essa arbitrariedade na fase é contornada quando levamos em conta a fase relativa de um campo em relação a um campo de prova. Observamos que a relação de comutação e conseqüentemente a de incerteza são independentes da fase  $\theta$ , ou seja,

$$[\hat{X}^\theta, \hat{Y}^\theta] = 2i, \quad \Delta\hat{X}^\theta\Delta\hat{Y}^\theta \geq 1. \quad (1.88)$$

No caso de um estado de vácuo  $|0\rangle$  a incerteza de qualquer quadratura do campo é constante, ou seja, ao calcularmos a variância de uma quadratura sobre o estado de vácuo

encontraremos

$$\Delta_{vac}^2 X^\theta = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_{vac}^2 Y^\theta = 1. \quad (1.89)$$

Portanto, o estado de vácuo é um estado de mínima incerteza, pois  $\Delta_{vac} X^\theta \Delta_{vac} Y^\theta = 1$ . Definimos então que o ruído de vácuo sobre qualquer quadratura é chamado de *ruído padrão*.

Como os valores médios dos operadores de quadratura são encontrados diretamente numa base de estados coerentes podemos representá-los num diagrama de Fresnel, fig. 1.1, porém, a representação dos estados coerentes nesse diagrama não será dada por um ponto, mas sim, por uma região devido ao princípio da incerteza. O estado coerente assim como o vácuo são estados de mínima incerteza, ou seja, a incerteza sobre qualquer quadratura será sempre igual ao ruído padrão. No diagrama de Fresnel o estado de vácuo é representado por uma circunferência de raio 1 centrada na origem, enquanto o estado coerente é representado por essa mesma circunferência só que agora deslocada de uma distância igual a  $|\alpha|$  da origem.

Para um estado coerente em que o auto-valor do campo elétrico é  $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ , podemos associar como quadraturas amplitude e fase respectivamente [27],

$$\hat{p} = \hat{a}e^{-i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}, \quad (1.90)$$

$$\hat{q} = -i[\hat{a}e^{-i\varphi} - \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}], \quad (1.91)$$

quando  $\langle \hat{p} \rangle \gg 1$ , de onde temos que,

$$\langle \hat{p} \rangle = 2|\alpha| \quad \text{e} \quad \langle \hat{q} \rangle = 0. \quad (1.92)$$

O nome designado a essas quadraturas pode ser melhor entendido ao analisarmos a figura 1.1, de onde podemos ver que,

$$\delta \hat{I} = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2} \delta \hat{p}, \quad (1.93)$$

$$\delta \hat{\varphi} \cong \frac{2}{\langle \hat{p} \rangle} \delta \hat{q}. \quad (1.94)$$

A partir das fórmulas acima vemos que a variância do ruído de amplitude  $\Delta^2 \hat{p}^{vac}$  é proporcional à intensidade média do feixe, enquanto a variância do ruído de fase é inversamente proporcional à intensidade média do feixe.

Lembrando que o operador intensidade é dado por  $\hat{I} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  e reescrevendo os operadores criação e aniquilação como  $\hat{a} = \alpha + \delta \hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger = \alpha^* + \delta \hat{a}^\dagger$ , podemos mostrar que

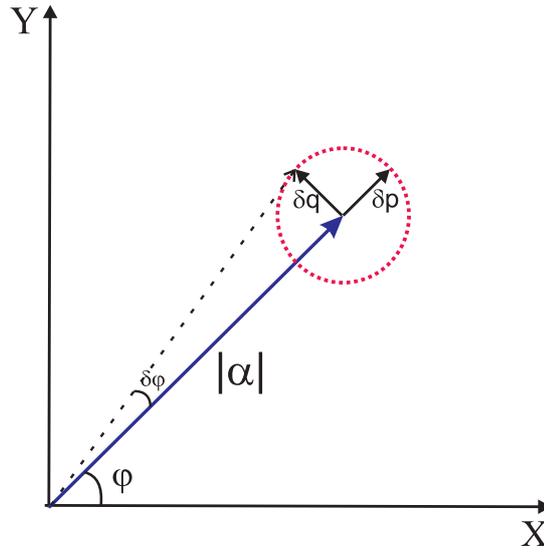


Figura 1.1: Representação do estado coerente no diagrama de Fresnel. O estado de vácuo seria representado pela mesma circunferência só que agora centrada na origem.

a equação (1.93) é válida quando fazemos  $\delta a^\dagger \delta a \rightarrow 0$ . Apesar do operador Hermitiano para a fase não ser de fácil visualização [28, 21], é possível mostrar que no limite de altas intensidades do campo elétrico a expressão (1.94) é válida, de onde se tem

$$[\delta \hat{I}, \delta \hat{\varphi}] = [\hat{p}, \hat{q}] = 1. \quad (1.95)$$

Como os nossos detetores são sensíveis à intensidade dos feixes, experimentalmente a medida do ruído padrão pode ser obtida medindo diretamente a variância do ruído de intensidade  $\Delta^2 \hat{I}$  de um estado coerente, ou a partir de uma detecção balanceada, ou seja, dividindo um feixe em duas partes de mesma intensidade e em seguida subtraindo o ruído de cada parte e calculando a variância do resultado [11]. Assim, a partir da equação (1.93) segue que,

$$\Delta^2 \hat{I} = \Delta_{vac}^2 \hat{p} \langle \hat{I} \rangle = \beta \langle \hat{I} \rangle. \quad (1.96)$$

Vimos na seção 1.4.1 que a variância do ruído de intensidade da luz poissoniana será proporcional à intensidade do feixe, consequência do fato da variância do número de fótons ser igual à média do número de fótons desse feixe. Esse tipo de ruído é característico de sistemas granulares, sendo por esse motivo denominado como "shot noise". Assim, são exemplos de "shot noise" o ruído gerado devido à colisão de um feixe de elétrons no anodo de uma válvula, ou a flutuação da escala de uma balança provocada pela queda de grãos de areia no seu prato.

Então, fazendo a medida da potência de ruído para vários valores de intensidade

podemos montar um gráfico de  $\Delta^2 \hat{I} \times \langle \hat{I} \rangle$ . Mantendo o jargão empregado no laboratório, chamaremos de calibração do "shot noise" a determinação do coeficiente angular da reta que ajusta os pontos medidos. Essa constante de proporcionalidade inclui já todos os ganhos eletrônicos empregados tanto na etapa de alta frequência, empregada na medida do ruído, quando na etapa de baixa frequência, onde medimos a intensidade média. Com essa medida podemos normalizar todos os valores de ruído medidos em nosso experimento pelo "shot noise".

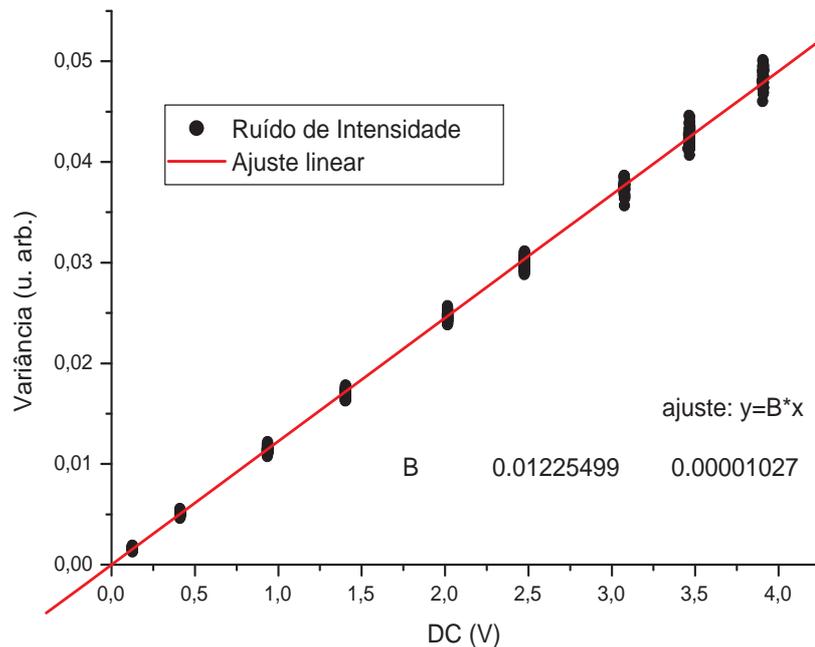


Figura 1.2: *Exemplo de calibração do "shot noise" usando um feixe coerente de luz de 532 nm*

É importante enfatizar que como os nossos detetores medem somente a intensidade do campo, portanto, a medida do ruído de outras quadraturas, que não seja a quadratura amplitude, não pode ser feito diretamente. Sendo assim, devemos usar meios alternativos para medir o ruído de outras quadraturas, os quais serão explicados nas próximas seções.

### 1.5.1 Estados comprimidos

Outra classe de estados de incerteza mínima são os estados comprimidos do campo eletromagnético, esses estados são de natureza totalmente quântica [29, 30, 31]. Um estado comprimido é caracterizado por uma de suas quadraturas ter um ruído menor que o ruído padrão, e a quadratura conjugada um ruído maior que o ruído padrão, de forma

que o produto das incertezas de ambas quadraturas respeite o princípio da incerteza, ou seja,

$$\Delta X^\theta = e^{-r} \quad e \quad \Delta Y^\theta = e^r. \quad (1.97)$$

Estados dessa natureza podem ser obtidos por uma transformação unitária sobre o vácuo e em seguida aplicando o operador deslocamento, isto é,

$$|\alpha, \epsilon\rangle = D(\alpha)S(\epsilon)|0\rangle. \quad (1.98)$$

O operador  $S(\epsilon)$  é denominado operador de "squeezing" ou compressão e é dado por

$$S(\epsilon) = e^{\epsilon^* a^2 - \epsilon a^{\dagger 2}}. \quad (1.99)$$

onde  $\epsilon = \frac{r}{2}e^{2i\phi}$ ,  $r$  é denominado fator de compressão ou squeeze, enquanto  $\phi$  vai indicar a quadratura de compressão máxima em relação ao argumento de  $\alpha$ .

Na figura 1.3 vemos a representação de um estado comprimido no diagrama de Fresnel.

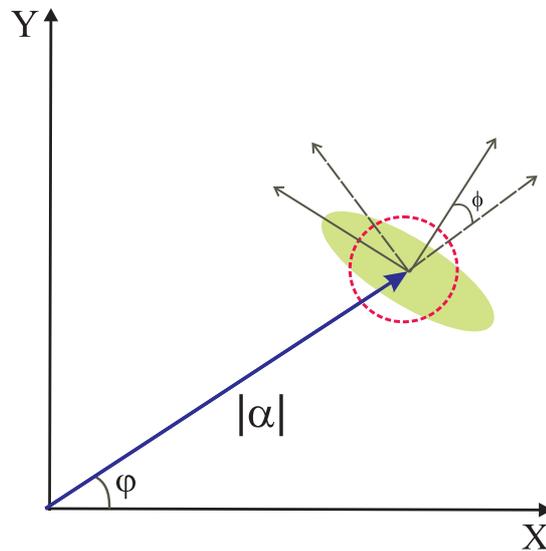


Figura 1.3: Representação de um estado comprimido no diagrama de Fresnel

Em (1.98) caso não apliquemos o operador deslocamento criamos um estado chamado de vácuo comprimido. Diversos grupos em todo mundo produzem esse tipo de estado usando OPO's tipo I abaixo do limiar de oscilação em experimentos relacionados principalmente ao estudo da informação quântica [32].

## 1.6 Espaço das frequências

Como vimos anteriormente, podemos reescrever os nossos operadores de criação e aniquilação como o seu valor médio mais um termo de flutuação, ou seja,

$$\hat{a}(t) = \alpha + \delta\hat{a}(t), \quad (1.100)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(t). \quad (1.101)$$

Em nosso experimento os feixes tratados são monocromáticos e intensos, com isso a grande maioria dos fótons se encontram em uma frequência ótica  $\omega$ , denominada banda central, mas também apresentam flutuações com um número pequeno de fótons em frequências  $\omega \pm \Omega$  ( $\Omega \ll \omega$ ), compondo as bandas laterais. Sendo assim, a física do nosso sistema pode ser mais facilmente entendida no domínio das frequências, então, tomando a transformada de Fourier do operador de aniquilação temos [16]

$$a(\Omega) = \int dt e^{i\Omega t} (\alpha + \delta\hat{a}(t)), \quad (1.102)$$

$$= \alpha\delta(\Omega) + \delta\hat{a}(\Omega). \quad (1.103)$$

Definimos a transformada de Fourier sobre o operador de criação como

$$\delta\hat{a}^\dagger(\Omega) = [\delta\hat{a}(\Omega)]^\dagger. \quad (1.104)$$

A relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação no domínio temporal é dada por  $[\delta\hat{a}(t), \delta\hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t - t')$ , portanto no domínio das frequências essa relação de comutação será dada por

$$[\delta\hat{a}(\Omega), \delta\hat{a}^\dagger(\Omega')] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega'). \quad (1.105)$$

Assim, tomando a transformada de Fourier dos operadores de quadratura dados nas equações (1.87) teremos que

$$\delta\hat{X}^\theta(\Omega) = e^{-i\theta}\delta\hat{a}(\Omega) + e^{i\theta}\delta\hat{a}^\dagger(-\Omega), \quad (1.106)$$

$$\delta\hat{Y}^\theta(\Omega) = -i[e^{-i\theta}\delta\hat{a}(\Omega) - e^{i\theta}\delta\hat{a}^\dagger(-\Omega)]. \quad (1.107)$$

Pela hermiticidade dos operadores de quadratura no domínio temporal segue,

$$[\delta\hat{X}^\theta(\Omega)]^\dagger = \delta\hat{X}^\theta(-\Omega), \quad [\delta\hat{Y}^\theta(\Omega)]^\dagger = \delta\hat{Y}^\theta(-\Omega). \quad (1.108)$$

Vemos então, que a relação de comutação entre esses operadores é dada por

$$\left[ \delta \hat{X}^\theta (\Omega), \delta \hat{Y}^\theta (\Omega') \right] = 4\pi i \delta (\Omega - \Omega'). \quad (1.109)$$

### 1.6.1 Espectro de ruído

Como vimos nas seções anteriores, os termos de flutuação de nossos operadores apresentam toda a natureza quântica dos processos físicos envolvidos no sistema, pois esses são tratados a princípio como operadores sendo que os valores médios são números que devem estar de acordo com a teoria clássica. Sendo assim, vamos definir o **espectro de ruído** de nossos operadores de quadratura como [11]

$$\langle \delta \hat{X}^\theta (\Omega) \delta \hat{X}^\theta (-\Omega') \rangle = 2\pi \delta (\Omega - \Omega') S_{X^\theta} (\Omega). \quad (1.110)$$

O espectro de ruído  $S_{X^\theta} (\Omega)$  é proporcional à variância de uma quadratura  $\delta X^\theta (-\Omega')$  a menos de uma divergência que deve ser removida. De fato, experimentalmente essa divergência não existe pois se mede o espectro de ruído num intervalo de tempo finito, sendo que ainda a frequência  $\Omega$  é definida dentro de uma certa largura, além de usarmos filtros de frequência [33]. Sendo assim, nos nossos experimentos temos que

$$\Delta^2 \hat{X}^\theta (\Omega) \propto S_{X^\theta} (\Omega). \quad (1.111)$$

Como vimos na seção , a variância do ruído de vácuo e dos estados coerentes para qualquer quadratura serão normalizadas pelo "shot noise" de forma que sejam igual a unidade. Logo teremos que,  $S_{X^\theta}^{vac} (\Omega) = 1$ .

## 1.7 Equação Mestre

Devido ao acoplamento do sistema com ambiente existe um processo de perda associado a todo sistema físico. De maneira genérica, iremos considerar um sistema regido pela Hamiltoniana  $\hat{\mathcal{H}}_s$  e o ambiente será considerado como um reservatório térmico dado por um conjunto de osciladores harmônicos que têm sua evolução temporal descrita pela Hamiltoniana  $\hat{\mathcal{H}}_R$ . Supondo que o sistema interaja fracamente com o reservatório térmico através da Hamiltoniana  $\hat{\mathcal{V}}$ , logo a evolução temporal do operador densidade total que representa tanto o sistema quanto o reservatório será [16]

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_T = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\mathcal{H}}_s + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{V}}, \hat{\rho}_T \right]. \quad (1.112)$$

O operador densidade do sistema é obtido calculando o traço parcial sobre as variáveis do reservatório, ou seja,

$$\hat{\rho}(t) = \text{tr}_R [\hat{\rho}_T(t)]. \quad (1.113)$$

Dado um sistema físico descrito como um conjunto de osciladores harmônicos de frequência  $\omega_0$  (como por exemplo fônons numa rede cristalina ou fótons em uma cavidade), podemos modelar a interação do sistema com o ambiente pela hamiltoniana [31],

$$\hat{\mathcal{V}}(t) = \hbar \left[ \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma}(t) e^{i\omega_0 t} + \hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t} \right], \quad (1.114)$$

onde

$$\hat{\Gamma}(t) = \sum_j g_j \hat{b}_j e^{-i\omega_j t}, \quad (1.115)$$

sendo que  $\hat{b}_j$  e  $\hat{b}_j^\dagger$  são operadores de criação e aniquilação do ambiente relacionados a um modo com frequência  $\omega_j$ , e  $g_j$  é um termo de acoplamento.

Assumindo que o sistema é inicialmente desacoplado do meio, ao retirarmos o traço parcial da matriz densidade em relação aos auto-estados do banho térmico, encontramos uma equação para a matriz densidade referente ao sistema, denominada equação mestra, que é dada pela seguinte fórmula quando a temperatura do banho térmico é nula,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\mathcal{H}}_s, \hat{\rho} \right] + \hat{\Lambda} \hat{\rho}, \quad (1.116)$$

onde  $\hat{\Lambda}$  é o operador de Lindblad [31],

$$\hat{\Lambda} \hat{\rho} = \gamma (2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}). \quad (1.117)$$

Assim, o operador de Lindblad representa as perdas do sistema para o ambiente a partir de um acoplamento do mesmo com os modos do vácuo através dos operadores de criação e destruição do próprio sistema. Nas referências [31, 16] mostra-se que  $\gamma = \rho(\omega)^2 g(\omega)^2$  é uma constante de acoplamento. Onde  $\rho(\omega)$  é a densidade de estados do sistema com frequência  $\omega$ , e  $g(\omega)$  é o termo de acoplamento do vácuo para a frequência  $\omega_j = \omega$ .

## 1.8 Espaço de Fase Quântico e Função de Wigner

Na Mecânica Clássica qualquer sistema pode ser descrito por uma função de probabilidade  $f(\{q\}, \{p\})$ ,  $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ ,  $\{p\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  no espaço de fase, tal que

$f(\{q\}, \{p\})d^N q d^N p$  fornece a probabilidade de encontrarmos o sistema clássico no volume  $d^N q d^N p$  centrado em torno do ponto  $(\{q\}, \{p\})$ . No entanto, na Mecânica Quântica não é possível definir pontos no espaço de fase, pois  $p_i$  e  $q_i$  são dados por operadores que não podem ser medidos simultaneamente com precisão infinita. Apesar disso, podemos definir distribuições de quasi-probabilidade para sistema quânticos. Devido a não comutatividade dos operadores de posição e momento [34], existem vários tipos de funções de distribuição, sendo as mais conhecidas a função-P de Glauber, função-Q de Husini, e função de Wigner [31, 16]. Nessa dissertação trataremos somente sobre a função de Wigner por motivos que ficarão claros ao longo do texto.

Para um sistema quântico constituído de vários outros subsistemas, e em analogia a sistemas clássicos, podemos definir um operador vetorial  $\hat{\xi}$  de  $2N$  dimensões, a partir do par de operadores posição e momento  $(\hat{p}_i, \hat{q}_i)$  que estão relacionados a cada subsistema [35, 13],

$$\hat{\xi} = \{\hat{p}_1, \hat{q}_1, \dots, \hat{p}_N, \hat{q}_N\}. \quad (1.118)$$

Assim, relação de comutação entre os operadores de cada subsistema pode ser escrita como

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j] = 2i\Omega_{ij}, \quad (1.119)$$

onde  $\Omega$  é uma matriz dada por,

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^N J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.120)$$

A função de Wigner foi a primeira função de quasi-probabilidade definida, sendo introduzida por Wigner em 1932 [36]. Para um único subsistema, podemos introduzir a função de Wigner a partir da função característica que é definida por

$$\chi_W(\eta, \eta^*) = \text{tr} \left[ e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} \rho \right] = \text{tr} \left( \hat{D} \hat{\rho} \right), \quad (1.121)$$

onde  $\hat{D} = e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}}$  é o operador deslocamento.

Com isso, definimos a função de Wigner pela transformada de Fourier da função característica, ou seja,

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \eta e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi_W(\eta, \eta^*). \quad (1.122)$$

Podemos escrever a função de Wigner em termos dos auto-valores dos operadores

quadratura posição  $\hat{q}$  e momento  $\hat{p}$ , como foi proposto inicialmente por Wigner [16, 13],

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi} \int dp' \langle p - p' | \hat{\rho} | p + p' \rangle e^{2ip'q}. \quad (1.123)$$

No caso mais geral, onde existem vários subsistemas podemos generalizar a função de Wigner fazendo,

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi^N} \int d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' | \hat{\rho} | \mathbf{x} + \mathbf{x}' \rangle e^{2i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}}, \quad (1.124)$$

onde  $\mathbf{x} = (p_1, \dots, p_n)$  e  $\mathbf{y} = (q_1, \dots, q_n)$ .

A função de Wigner apresenta propriedades compatíveis com distribuições de probabilidade pois ela é uma função real e normalizável. Além disso, ela é muito útil para acharmos os valores médios do produto de operadores quando esses são escritos em ordem simétrica, ou seja,

$$\langle \{\hat{p}^n \hat{q}^m\}_{sim} \rangle = \int dpdq p^n q^m W(p, q), \quad (1.125)$$

ou

$$\langle \{\hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^m\}_{sim} \rangle = \int d^2\alpha \alpha^n (\alpha^*)^m W(\alpha, \alpha^*). \quad (1.126)$$

O produto em ordem simétrica de operadores quer dizer que eles estarão multiplicados de todas as maneiras possíveis, por exemplo,

$$\{\hat{a}(\hat{a}^\dagger)\}_{sim} = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (1.127)$$

Portanto, percebemos que a função de Wigner permite uma grande simplificação no tratamento de sistemas quânticos, pois permite representar um vetor de operadores por um vetor de números reais, ou seja,

$$\hat{\xi} = \{\hat{p}_1, \hat{q}_1, \dots, \hat{p}_N, \hat{q}_N\} \rightarrow \xi = (p_1, q_1, \dots, p_N, q_N). \quad (1.128)$$

Apesar dessas características a função de Wigner é uma distribuição de quasi-probabilidade pois pode apresentar valores negativos, sendo esta uma das assinaturas de que o estado representado é gerado por fontes não-clássicas. Mas além dos estados com valores negativos de  $W$ , existem outros estados com características intrinsecamente quânticas que podem ser observadas na função de Wigner mesmo quando esta apresenta uma distribuição gaussiana, como por exemplo a compressão de ruído. Exemplos destes estados serão abordados nesta dissertação.

### 1.8.1 Matriz de covariância e Relação de Incerteza

Reescrevendo o operador de quadratura  $\hat{\xi}$  um termo de valor médio mais um termo de flutuação,  $\hat{\xi} = \xi + \delta\hat{\xi}$ , podemos calcular as correlações simetrizadas entre suas componentes, ou momentos de segunda ordem, e organizá-los numa matriz denominada de *Matriz de Covariância*,

$$\langle \{\delta\hat{\xi}_n \delta\hat{\xi}_m\}_{sim} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{\delta\hat{\xi}_n, \delta\hat{\xi}_m\} \rangle = V_{nm}. \quad (1.129)$$

A partir da equação (1.125), vemos que os termos da matriz de covariância podem ser calculados diretamente a partir da função de Wigner,

$$V_{nm} = \int d^{2N} \xi W(\xi) \delta\xi_n \delta\xi_m. \quad (1.130)$$

Uma matriz de covariância  $V$  correspondente a um estado físico deve ser *real positiva e simétrica*. A partir da definição dos termos da matriz de covariância (1.129), segue,

$$\langle \delta\hat{\xi}_n \delta\hat{\xi}_m \rangle = tr \left( \hat{\rho} \frac{[\delta\hat{\xi}_n, \delta\hat{\xi}_m]}{2} + \hat{\rho} \frac{\{\delta\hat{\xi}_n, \delta\hat{\xi}_m\}}{2} \right) = V_{nm} + i\Omega_{nm}. \quad (1.131)$$

Como  $\hat{\rho}$  é positivo e os elementos do operador quadratura  $\delta\hat{\xi}$  são hermitianos [37], teremos que

$$V + i\Omega \geq 0. \quad (1.132)$$

Esse resultado tem grande importância pois corresponde ao princípio da incerteza em uma forma mais genérica. Por exemplo, considerando apenas um único sistema a matriz de covariância será dada por [38],

$$V = \begin{pmatrix} \Delta^2 q & C_{qp} \\ C_{qp} & \Delta^2 p \end{pmatrix},$$

onde o termo  $C_{qp}$  é a correlação entre os operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  e é definida por,

$$C_{qp} = \frac{1}{2} \langle \{\delta\hat{p}, \delta\hat{q}\} \rangle \quad (1.133)$$

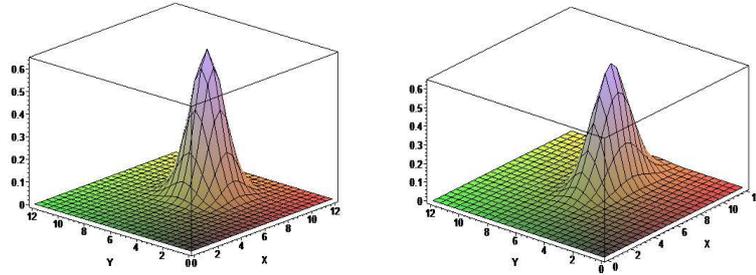
Assumindo que  $C_{qp}$  é nulo e calculando os auto-valores da equação (1.131) encontraremos  $(\Delta^2 q - \lambda)(\Delta^2 p - \lambda) = 1$ . Portanto, ao se impor a positividade dada na inequação (1.132), ou seja,  $\lambda \geq 0$ , verifica-se que é necessário que  $\Delta^2 p \Delta^2 q \geq 1$ , que é o Princípio da Incerteza de Heisenberg. Com isso, recuperamos totalmente os resultados obtidos na

seção 1.1

## 1.8.2 Estados Gaussianos

Existe uma classe de estados físicos em variáveis contínuas que tem suas funções de Wigner completamente caracterizada pela matriz de covariância. Esses estados são denominadas estados gaussianos, e suas funções de Wigner são dadas por [39, 13],

$$W(\xi) = \frac{1}{\pi^N |V|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi V \xi^T\right). \quad (1.134)$$



(a) Função de Wigner de um estado coerente de amplitude  $\alpha = 10$

(b) Função de Wigner para um estado comprimido de amplitude  $\alpha = 10$  e fator de compressão  $r = 1/4$

Figura 1.4: Funções de Wigner de um estado coerente 1.4(a) e de um estado comprimido 1.4(b)

Os estados Gaussianos são encontrados em uma grande gama de experimentos. Por exemplo, o estado coerente  $|\alpha\rangle = |X + iY\rangle$ , onde  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  são as quadraturas dadas em (1.84), tem sua função de Wigner dada por uma distribuição Gaussiana centrada em  $\alpha$ ,

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \exp\left[-\frac{(x - X)^2}{2} - \frac{(y - Y)^2}{2}\right]. \quad (1.135)$$

Já o estado comprimido terá sua função de Wigner como uma Gaussiana que será achatada em uma das quadraturas e alongada em outra,

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \exp\left[-\frac{e^{-2r}(x - X)^2}{2} - \frac{e^{2r}(y - Y)^2}{2}\right]. \quad (1.136)$$

Para estados número a função de Wigner é dada por,

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4r^2) e^{-2r^2}, \quad (1.137)$$

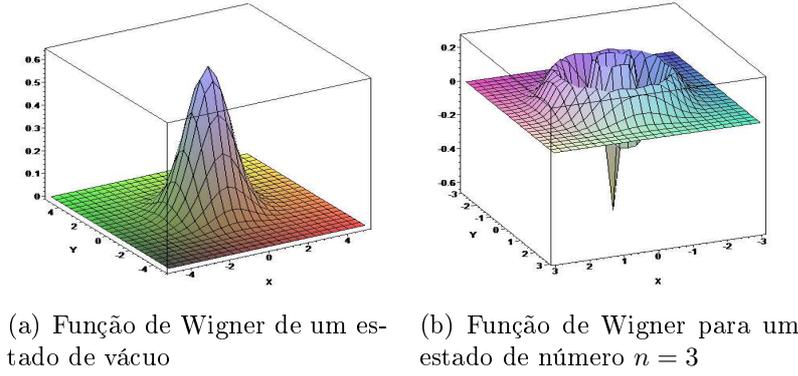


Figura 1.5: Funções de Wigner para o estado de vácuo 1.5(a) e para um estado de Fock 1.5(b)

onde  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $L_n$  são polinômios de Laguerre que na fórmula de Rodrigues são escritos como [19],

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (1.138)$$

Com isso, podemos observar que os estados de Fock não são estados gaussianos, além disso, a função de Wigner para esses estados sempre apresenta valores negativos, exceto para o estado do vácuo que será uma Gaussiana centrada na origem.

## 1.9 Equação de Fokker-Planck e Equação de Langevin

A equação de Fokker-Planck é uma equação diferencial parcial de segunda ordem para a evolução temporal de uma distribuição de probabilidade  $\Psi(\vec{x})$ . Esse tipo de equação foi primeiramente utilizada no estudo do movimento estocástico de pequenas partículas que ficam suspensas em superfícies de líquidos, conhecido como movimento Browniano [40].

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} A_j(\vec{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}(\vec{x}) \right] \Psi(\vec{x}). \quad (1.139)$$

O termo  $\mathbf{A} = A_j$  atua sobre o valor médio da distribuição de probabilidade sendo denominado assim de vetor de arrasto, já o termo  $\mathbf{D} = D_{ij}$ , é responsável pelo alargamento da distribuição sendo denominado de termo de difusão.

No entanto, a equação de Fokker-Planck pode ser representada de maneira completamente equivalente por equações de Langevin, que são equações diferenciais estocásticas [40, 31],

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(\vec{x}, t) + \mathbf{E}(\vec{x}) \mathbf{B}(t), \quad (1.140)$$

de tal forma que  $\mathbf{B}\mathbf{B}^t = \mathbf{D}$ , sendo que  $\mathbf{E}$  é um vetor de forças estocásticas tal que  $\langle \mathbf{E}(t) \rangle = 0$  e  $\langle E_i(t) E_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$ .

Como vimos na seção 1.8, existe uma equivalência no tratamento de um estado quântico a partir de sua matriz densidade e a partir de sua função de Wigner. Logo, a evolução temporal de um sistema quântico, que é dada pela equação mestra para a matriz de densidade (seção 1.7) pode ser transformada numa equação de movimento para essa distribuição de probabilidade. Caso essa equação de movimento não tenha derivadas de ordem maior que dois ela será uma equação Fokker-Planck para função de Wigner <sup>3</sup>.

Portanto, escrevendo o operador deslocamento em ordem normal  $\hat{D} = e^{-\frac{1}{2}\eta\eta^*} e^{\eta\hat{a}^\dagger} e^{-\eta^*\hat{a}}$  e tomando a derivada em relação a  $\eta$  encontramos,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{D} = -\frac{1}{2}\eta^* \hat{D} + \hat{a}^\dagger \hat{D}, \quad (1.141)$$

de onde percebemos a relação,

$$\hat{a}^\dagger \hat{D} = \left( \frac{1}{2}\eta^* + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \hat{D}, \quad (1.142)$$

tomando a derivada em relação a  $\eta^*$  encontraremos que

$$\hat{D} \hat{a} = - \left( \frac{1}{2}\eta + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right) \hat{D}. \quad (1.143)$$

Escrevendo o operador deslocamento em ordem antinormal  $D = e^{\frac{1}{2}\eta\eta^*} e^{-\eta^*\hat{a}} e^{\eta\hat{a}^\dagger}$ , de maneira análoga, ao calcularmos a derivada em relação a  $\eta$  e  $\eta^*$  encontraremos

$$\hat{D} \hat{a}^\dagger = \left( -\frac{1}{2}\eta^* + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \hat{D}, \quad (1.144)$$

$$\hat{a} \hat{D} = \left( \frac{1}{2}\eta - \frac{\partial}{\partial \eta^*} \right) \hat{D}. \quad (1.145)$$

Portanto, tomando a transformada de Fourier sobre o traço das relações (1.142)-(1.145) vezes a matriz de densidade, podemos mostrar que fazer uma operação sobre a

---

<sup>3</sup>Como veremos adiante, é necessário algumas aproximações para que a equação de movimento da função de Wigner do OPO operando acima do limiar se torne uma equação de Fokker-Planck.

matriz densidade corresponde a uma operação sobre a função de Wigner,

$$\begin{aligned}
 \hat{a}\rho &\rightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)W(\alpha, \alpha^*); \\
 \hat{a}^\dagger\rho &\rightarrow \left(\alpha^* - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)W(\alpha, \alpha^*); \\
 \hat{\rho}\hat{a} &\rightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)W(\alpha, \alpha^*); \\
 \hat{\rho}\hat{a}^\dagger &\rightarrow \left(\alpha^* + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)W(\alpha, \alpha).
 \end{aligned} \tag{1.146}$$

## 1.10 Medida de Quadraturas

Um método muito utilizado para medir as quadraturas do campo eletromagnético é a detecção homodina, esse método consiste em misturar, utilizando um divisor de feixes 50:50, um feixe  $\alpha$  que se quer medir com um feixe geralmente muito mais intenso e de mesmo comprimento de onda chamado de oscilador local  $\alpha_{Loc}$ .

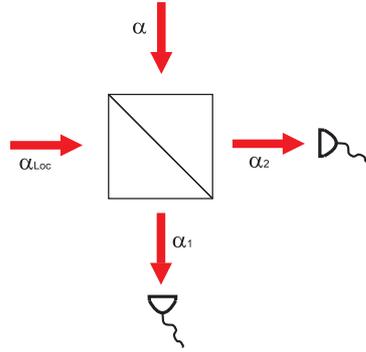


Figura 1.6: *Homodinagem*

Os campos de saída serão dados por,

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha_{Loc}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha - \alpha_{Loc}}{\sqrt{2}}. \tag{1.147}$$

As intensidade dos campos de saída são dadas por  $I_1 = \alpha_1\alpha_1^*$  e  $I_2 = \alpha_2\alpha_2^*$ , tomando a subtração da intensidade dos dois campos encontramos,

$$I_- = \alpha\alpha_{Loc}^* + \alpha^*\alpha_{Loc} = |\alpha_{Loc}|(\alpha e^{i\theta} + \alpha^* e^{-i\theta}), \tag{1.148}$$

onde  $\alpha_{Loc} = |\alpha_{Loc}|e^{i\theta}$ . Variando a fase do oscilador local  $\theta$  relativa entre os dois campos, podemos acessar qualquer quadratura do campo que se deseja medir as quadraturas. Como foi dito, a detecção homodina só pode ser usada quando os campos de prova e o

oscilador local tiverem a mesma frequência. No caso do nosso experimento, não controlamos a frequência dos feixes gêmeos gerados pelo OPO, por esse motivo, o método da detecção homodina não pode ser empregado.

### 1.10.1 Cavidades Óticas

As cavidades óticas usadas em nosso laboratório podem ser representadas por cavidades Fabry-Perot. Nessas cavidades o espelho com reflexão  $R_1$  é chamado de espelho de acoplamento, enquanto que o espelho altamente refletor de reflexão  $R_2$  representa as perdas espúrias da cavidade, por onde modos de vácuo são acoplados ao sistema [11].

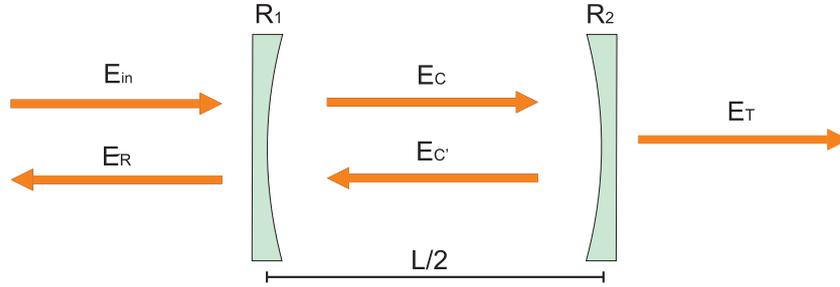


Figura 1.7: *Cavidade Fabry-Perrot*

As amplitudes dos campos refletidos  $E_R$  e transmitidos  $E_T$  pela cavidade, assim como os campos intracavidade  $E_c$  e  $E_c'$ , dependem da distância entre os dois espelhos. Logo, temos que os campos refletido e transmitido pela cavidade serão dados por,

$$E_R(L) = r(L)E_{in} \quad \text{e} \quad E_T(L) = t(L)E_{in}. \quad (1.149)$$

Os coeficientes de reflexão  $r(L)$  e transmissão  $t(L)$  são

$$r(L) = \frac{r_1 - r_2 e^{ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{ikL}} \quad \text{e} \quad t(L) = \frac{t_1 t_2 e^{ikL/2}}{1 - r_1 r_2 e^{ikL}}, \quad (1.150)$$

em que  $r_1 = \sqrt{R_1}$  e  $r_2 = \sqrt{R_2}$ . Com isso podemos calcular a reflexão mínima e a transmissão máxima de intensidade da cavidade, observadas quando o tamanho da cavidade é um múltiplo inteiro do comprimento de onda. Nessa situação dizemos que a cavidade se encontra em ressonância,

$$R_{min} = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}, \quad (1.151)$$

$$T_{max} = 1 - R_{min}. \quad (1.152)$$

Outros parâmetros importantes para a caracterização de cavidades óticas são o inter-

valo espectral livre  $\Delta\nu_c$ , a largura de banda  $\delta\nu_c$ , e a Finesse  $F$  da cavidade. O intervalo espectral livre é dado pelo inverso do tempo  $\tau$  que um fóton leva para percorrer o perímetro  $L$  da cavidade, isto é,  $\Delta\nu_c = \tau^{-1} = c/L$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no interior da cavidade.

A largura de banda da cavidade é duas vezes a distância em frequência do ponto de ressonância até o ponto onde a intensidade transmitida seja metade da intensidade da transmissão máxima,

$$\delta\nu_c = \frac{2}{\pi\tau} \left[ \arcsin \left( \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{2(R_1 R_2)^{1/4}} \right) \right] \approx \frac{1}{\pi\tau} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{(R_1 R_2)^{1/4}}. \quad (1.153)$$

A Finesse é um parâmetro que representa a qualidade da cavidade, ela indica o seu poder de resolução espectral, definimos a finesse como a razão entre o intervalo espectral livre e a largura de banda da cavidade,

$$F = \frac{\Delta\nu_c}{\delta\nu_c}. \quad (1.154)$$

No limite de alta finesse, ou seja, quando  $T_1$  e  $T_2$  são pequenos, a finesse fornece uma medida direta das perdas da cavidade,

$$F = \frac{2\pi}{T_1 + T_2}. \quad (1.155)$$

Dadas essas grandezas podemos definir uma outra denominada dessintonia relativa a largura de banda que é definida por

$$\Delta = \frac{\nu - \nu_c}{\delta\nu_c}, \quad (1.156)$$

onde  $\nu_c$  é a frequência de ressonância da cavidade e  $\nu$  é a frequência ótica do feixe incidente.

Com isso, não é muito difícil de se mostrar que podemos reescrever os coeficientes de transmissão e reflexão de uma cavidade como,

$$r(\Delta) = \frac{r_1 - r_2 e^{i\Delta/F}}{1 - r_1 r_2 e^{i\Delta/F}} \quad \text{e} \quad t(\Delta) = \frac{t_1 t_2 e^{i\Delta/2F}}{1 - r_1 r_2 e^{i\Delta/F}}. \quad (1.157)$$

Um efeito muito importante a ser notado, é que quando um determinado campo incide sobre uma cavidade ótica o campo refletido, além de sua intensidade ser atenuada de  $R(\Delta) = |r(\Delta)|^2$ , também ganha uma fase que depende da dessintonia da cavidade  $e^{i\varphi_r} = r(\Delta)/|r(\Delta)|$ . Como podemos observar na figura 1.8 a intensidade da luz varia com a dessintonia da cavidade através de uma lorentizana, enquanto a fase recebida varia de

acordo com uma função arcotangente.

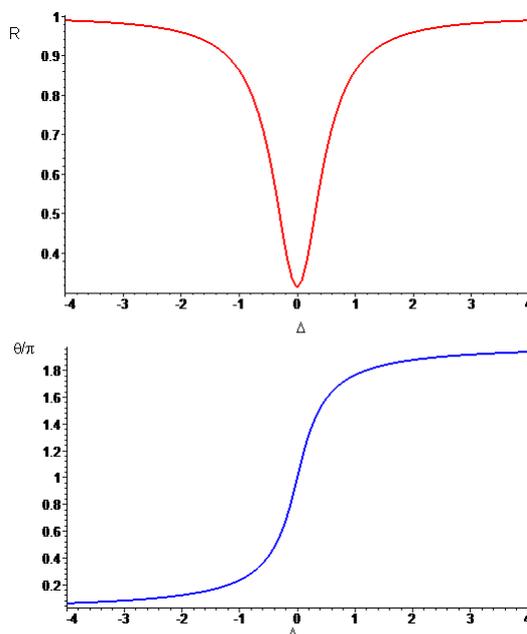


Figura 1.8: A figura de cima mostra a variação do coeficiente de reflexão da intensidade da luz em relação a dessintonia da cavidade, já a figura de baixo mostra a fase do feixe refletido em função da dessintonia.

### 1.10.2 Auto Homodinagem

Nessa seção analisaremos o efeito de uma cavidade ótica sobre as bandas laterais de um feixe intenso, verificando assim, que é possível a partir desse efeito ter acesso ao ruído de todas as quadraturas do campo incidente a partir do giro da elipse de ruído do feixe incidente na cavidade. Como o princípio básico desse método é a interferência do feixe refletido pela cavidade com o feixe intracavidade que é transmitido, e em analogia com o método da detecção homodina, denominaremos esse método de detecção auto-homodina. Esse efeito foi primeiramente proposto na referência [41] e foi estudado em teses de doutorado do nosso grupo [11, 13], um resumo sobre esse assunto pode ser encontrado na referência [42].

Fazendo a decomposição do campo em termos de uma banda central e ruído nas bandas laterais podemos analisar qual é a influência de uma cavidade ótica sobre esses termos no espaço de frequências. A expressão para o zero da banda central refletido pela cavidade deve ser

$$\alpha_R(0) = r(\Delta)\alpha_{in}(0). \quad (1.158)$$

Lembrando que associado às perdas espúrias da cavidade teremos que modos de vá-

cuo serão acoplados ao campo refletido a partir da transmissão da cavidade, então as expressões para as bandas laterais refletidas pela cavidade serão

$$\begin{aligned}\delta\alpha_R(\nu') &= r(\Delta + \nu')\delta\alpha_{in}(\nu') + t(\Delta + \nu')\delta\alpha_v(\nu'), \\ \delta\alpha_R^*(-\nu') &= r(\Delta - \nu')\delta\alpha_{in}^*(-\nu') + t^*(\Delta - \nu')\delta\alpha_v^*(-\nu'),\end{aligned}\quad (1.159)$$

onde  $\nu' = \nu/\delta\nu_c$  é a frequência de análise relativa a largura de banda da cavidade.

É importante notar dessas expressões que como as bandas laterais tem uma frequência um pouco diferente da banda central, o efeito da cavidade ótica sobre cada banda irá depender de sua frequência própria. Logo, cada termo do campo será atenuado por um fator  $|r(\vartheta)|$  e reberá uma fase

$$e^{i\theta_R(\vartheta)} = r(\vartheta)/|r(\vartheta)|, \quad (1.160)$$

onde  $\vartheta$  é o argumento da função.

Com isso posto, e a partir das definições (1.91) e (1.106), podemos escrever a expressão para a quadratura amplitude do campo refletido pela cavidade como

$$\delta p_R(\Delta, \nu') = \frac{\alpha_R^*}{|\alpha_R|}\delta\alpha_R(\nu') + \frac{\alpha_R}{|\alpha_R|}\delta\alpha_R^*(-\nu'). \quad (1.161)$$

Reescrevendo os termos de flutuação do lado direito da expressão (1.159) em suas componentes amplitude a fase e substituindo na equação anterior, teremos que a quadratura amplitude do feixe refletido será dada por

$$\delta p_R(\Delta, \nu') = g_p(\Delta, \nu')\delta p_{in} + ig_q(\Delta, \nu')\delta q_{in} + g_{vp}(\Delta, \nu')\delta p_v + ig_{vq}(\Delta, \nu')\delta q_v, \quad (1.162)$$

onde,

$$\begin{aligned}g_p(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2}[e^{-i\theta_R(\Delta)}r(\Delta + \nu') + e^{i\theta_R(\Delta)}r^*(\Delta - \nu')], \\ g_q(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2}[e^{-i\theta_R(\Delta)}r(\Delta + \nu') - e^{i\theta_R(\Delta)}r^*(\Delta - \nu')], \\ g_{vp}(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2}[e^{-i\theta_R(\Delta)}t(\Delta + \nu') + e^{i\theta_R(\Delta)}t^*(\Delta - \nu')], \\ g_{vq}(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2}[e^{-i\theta_R(\Delta)}t(\Delta + \nu') - e^{i\theta_R(\Delta)}t^*(\Delta - \nu')].\end{aligned}\quad (1.163)$$

Portanto, a partir da equação (1.110), o espectro de ruído da quadratura amplitude do feixe refletido será dado por

$$S_R(\Delta, \nu') = \langle \delta p_R(\Delta, \nu')\delta p_R(\Delta, -\nu') \rangle, \quad (1.164)$$

então, pela equação (1.162) segue,

$$S_R(\Delta, \nu') = |g_p(\Delta, \nu')|^2 S_p(\nu') + |g_q(\Delta, \nu')|^2 S_q(\nu') + |g_{vp}(\Delta, \nu')|^2 + |g_{vq}(\Delta, \nu')|^2. \quad (1.165)$$

A equação (1.165) foi obtida normalizando as auto-correlações de amplitude e fase do vácuo a 1, e além disso, consideramos a correlação entre as quadraturas amplitude e fase do campo incidente nulas,  $C_{pq} = 0$ , onde

$$\delta(\nu' - \nu'') C_{pq} = \frac{1}{2} \langle \{ \delta p(\nu'), \delta q(\nu'') \} \rangle. \quad (1.166)$$

Quando a correlação entre essas quadraturas é diferente de zero, podemos procurar um novo sistema de coordenadas no qual a correlação entre as novas quadraturas se anulem, esse assunto é explicado mais detalhadamente na referência [11].

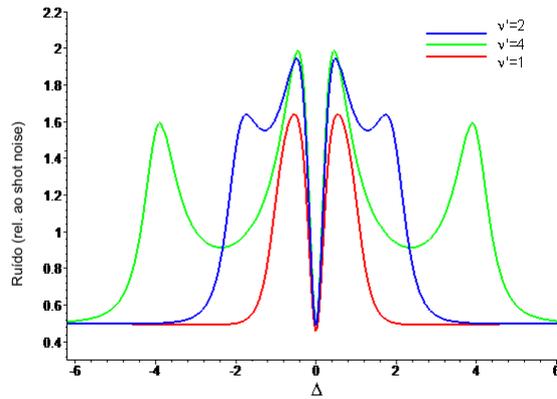


Figura 1.9: Espectro de ruído de amplitude do feixe refletido pela cavidade ótica para três diferentes frequências de análise. O ruído de amplitude do feixe de entrada era  $S_p = 0.5$  enquanto o ruído de fase do feixe de entrada era  $S_q = 2$

Podemos entender o real efeito da cavidade sobre as quadraturas do feixe refletido observando o gráfico 1.9. Para dessintonias muito grandes, a cavidade funciona apenas como um espelho, sendo assim, nessa condição o ruído refletido pela cavidade será o ruído de amplitude do feixe de entrada. No entanto, para as frequências de análise  $\nu' = 2$  e  $\nu' = 4$ , percebemos que o ruído de amplitude do feixe de entrada é convertido continuamente em ruído de fase para quatro valores de dessintonia. Duas dessas conversões ocorrem quando a dessintonia da cavidade é aproximadamente igual a frequência de análise, ou seja, quando  $\Delta = \nu'$ . As outras duas conversões ocorrem quando a dessintonia da cavidade é  $\Delta = 0.5$ , que é a região onde a transmissão da cavidade é igual a metade da transmissão máxima.

Como podemos perceber por esse mesmo gráfico, o ruído de amplitude não é to-

talmente convertido em ruído de fase para a frequência de análise  $\nu' = 1$ , isso ocorre, pois a conversão completa de ruído de amplitude em ruído de fase ocorre somente para frequências de análise  $\nu' > \sqrt{2}$ , essa condição pode ser demonstrada ao impormos que  $\theta_R(\Delta) - \theta_R(\Delta - \nu') \geq \pi/2$  sobre a equação (1.160) [11].

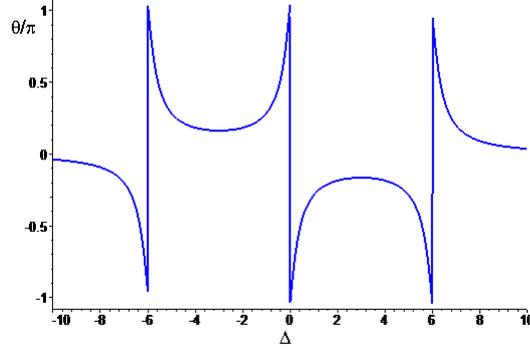


Figura 1.10: Diferença de fase entre as bandas laterais e a banda portadora para uma frequência de análise  $\nu' = 6$ , a descontinuidade no gráfico é devido ao fato da diferença de fase ser calculada em *modulo*( $\pi$ ).

O efeito das perdas espúrias, introduzido pelo acoplamento do vácuo nesse método, é o de atenuar o ruído das quadraturas quando a cavidade está em ressonância com as bandas laterais. Já quando ela está em ressonância com a portadora o ruído é refletido e a elipse girada completamente, sem que nenhum outro ruído seja adicionado. Isso é uma das vantagens sobre os métodos tradicionais de detecção homodina, pois nesses métodos, o ruído do feixe a ser medido é adicionado ao ruído de amplitude do feixe intenso, que geralmente é o ruído de vácuo.

Com isso, temos desenvolvido em nosso grupo um excelente meio de se medir o ruído de qualquer quadratura dos feixes intensos gerados no laboratório. Por acessarmos todas as quadraturas do feixe, é possível fazer a reconstrução completa da função de Wigner (ou tomografia) dos feixes gerados [43, 44].

## 2 *Emaranhamento*

### 2.1 Paradoxo EPR

Em 1935 Einstein, Podolsky e Rosen [5] em um trabalho intitulado "*Can Quantum Mechanics Description of Physical Reality be Considerd Complete?*" evidenciaram um estranho comportamento de sistemas quânticos na tentativa de mostrar que a teoria quântica não era uma teoria completa, apesar de explicar dados experimentais, sendo necessário que ela fosse complementada por informações que ainda estavam ocultas. Para isso, eles definiram que existe um elemento de **realidade física** (Realismo local) quando, sem que se perturbe um sistema, for possível prever uma grandeza física com certeza absoluta (i.e. probabilidade igual a um).

Dada essa definição de realidade física, eles propuseram um experimento mental ( *Gedankenexperiment*) no qual duas partículas são colocadas próximas uma da outra para que interajam entre si. Em seguida, essas partículas são separadas até que não exista mais nenhuma interação entre elas, sendo que distância entre elas é bem determinada, ou seja,  $x_1 - x_2 = L$ . Além disso, por conservação de momento a soma dos momentos das partículas em relação ao centro de massa deve ser nulo ( $p_1 + p_2 = 0$ ).

A função de onda desse estado na representação da posição será  $\Psi(x_1 - x_2) = \delta(x_1 - x_2 - L)$  e na representação dos momentos será  $\Psi(p_1 + p_2) = \delta(p_1 + p_2)$ . Usando essa função de onda eles exemplificam um aparente paradoxo na mecânica quântica, pois, por exemplo, se medíssemos a posição  $x_1$  de uma partícula determinaríamos com precisão absoluta a posição  $x_2$  da segunda partícula. No entanto, se no mesmo instante que for efetuada a medida de  $x_1$  na primeira partícula, for medido o momento  $p_2$  da segunda partícula, pode-se pensar que ouve uma violação do princípio da incerteza de Heisenberg, além de uma aparente violação da causalidade.

A violação do princípio da incerteza se daria pois teríamos acesso ao mesmo tempo ao valor de dois observáveis que não comutam entre si. Além disso, haveria uma violação da

causalidade, pois a informação obtida na medida da partícula 1 seria transferida para a partícula 2 instantaneamente, ou seja, essa informação seria transmitida numa velocidade acima da velocidade da luz no vácuo.

De fato, a interpretação de Einstein sobre realidade física está de acordo com teorias clássicas, o que levaria a essas contradições. Esse trabalho teve implicações profundas no estudo de sistemas quânticos por explicitar uma propriedade até então não analisada. Já nesse mesmo ano, Niels Bohr publicou um trabalho de mesmo título em resposta ao trabalho de Einstein [6]. Nesse trabalho, de leitura difícil, Niels Bohr apresenta em uma nota de rodapé uma transformação de variáveis de forma que o paradoxo mostrado por Einstein deixa de ser aparente. No entanto, a resposta de Niels Bohr não foi suficiente para fechar a questão sobre o paradoxo EPR por definitivo. Em 1957 Bohm e Aharonov [45] propõem um experimento com spins nos moldes do trabalho de Einstein para que se pudesse verificar ou não a teoria quântica.

Assim, inspirado nesses trabalhos, somente em 1964 John Bell [4] resolveu a questão levantada por Einstein, colocando o problema em uma base matemática rigorosa. Nesse trabalho, Bell chega em uma série de desigualdades para correlações de medidas, para as quais o limite superior é maior quando se assume que correlações são quânticas ao invés de clássicas, ou seja, com isso ele mostrou que sistemas quânticos apresentam uma maior correlação que os sistemas clássicos. Com isso, em 1969 Clauser, Horne, Shimony e Holtz [46] propuseram um experimento novamente usando spins, para os quais eles obtiveram uma série de novas desigualdades fazendo com que o paradoxo EPR pudesse ser de fato testado experimentalmente. Mais tarde esse conjunto de desigualdades ficaram conhecidas como critério CHSH.

No entanto, o paradoxo mostrado por Einstein é apenas aparente, pois a Mecânica Quântica, ou mais precisamente, o princípio da incerteza de Heisenberg, trata somente de medidas que foram realizadas experimentalmente, ou seja, medidas pelas quais o processo de medida ou aniquilou o estado ou reduziu o pacote de onda [47]. De forma que, no experimento proposto por Einstein, um dos valores dos observáveis é *inferido* e outro é de fato *medido*. Por esse mesmo motivo, vemos que não existe uma violação de causalidade, pois o valor inferido sobre a posição da partícula dois deve ser transmitido para o local onde foi feita a medida de seu momento numa velocidade menor ou igual a velocidade da luz no vácuo.

Atualmente, já foram realizados vários experimentos que violaram as desigualdades de Bell [48] fazendo com que a hipótese de realismo local perdesse grande parte do in-

terresse. Inicialmente esses experimentos sofriam com a baixa eficiência de detecção por serem feitos medindo polarização de fótons no regime de foto-contagem. Porém, em 2001 foram realizados experimentos usando ions armadilhados no qual a eficiência de detecção é próxima de 100% [49].

Nessa dissertação trataremos somente da interpretação usual da Mecânica Quântica, deixando de lado as interpretações não canônicas e especulações acerca de sua completeza. Além dos trabalhos citados anteriormente, uma discussão mais aprofundada e didática sobre o tema podem ser encontrados nas referências [11, 50, 51].

## 2.2 Emaranhamento

Na verdade, o paradoxo EPR enfatizou uma importante propriedade quântica denominada emaranhamento. O termo emaranhamento, no inglês "entanglement", apareceu pela primeira vez em 1935 em um trabalho de Schrödinger [7] onde ele considera que essa é a propriedade mais marcante da Mecânica Quântica. Nesse artigo, Schrödinger diz que um estado emaranhado tem a característica de que o melhor conhecimento do sistema como todo não necessariamente inclui o melhor conhecimento sobre as partes.

De maneira geral podemos descrever um estado quântico por intermédio da matriz densidade do sistema, então a melhor maneira de definirmos o que é um sistema emaranhado, é mostrando o que é um sistema não emaranhado, ou sistema separável. Então um sistema constituído de N sub-sistemas é dito separável quando a matriz densidade do sistema completo pode ser escrita como a produto externo das matrizes densidade de cada sub-sistema [3, 11], ou seja, um sistema é dito separável quando

$$\hat{\rho}_{sep} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2)} \cdots \otimes \hat{\rho}_j^{(N)}, \quad (2.1)$$

então quando um sistema não pode ser separado como um produto tensorial de cada subsistema ele é denominado como um sistema emaranhado.

Sendo assim, as desigualdades de Bell e o critério CHSH podem ser pensadas não somente como uma validação da teoria quântica em detrimento de uma teoria de realismo local, mas também, como uma maneira de identificar estados emaranhados.

Para verificarmos o grau de separabilidade de um sistema podemos testar todas as possibilidade de separabilidade desse sistema dois a dois, e em seguida três a três e assim sucessivamente [52]. De forma que, quando foi testada a separabilidade para todas as

maneiras possíveis de se dividir o sistema, dizemos que ele tem um emaranhamento  $N$ -partite genuíno.

Os estados emaranhados são, atualmente, um importante objeto de pesquisa, pois além de sua obtenção em laboratório e estudo teórico serem uma prova de conceito essencial da teoria quântica, esses estados são imprescindíveis para a implementação da computação quântica e estudo da informação quântica de maneira geral[3].

Um dos maiores motivos pelo qual o paradoxo EPR foi considerado como uma questão aberta na teoria quântica é devido ao fato de que é muito difícil se produzir e medir estados emaranhados em laboratório, além do fato de que quando esse tipo de estado é produzido, ele pode ser facilmente perdido pelo seu acoplamento com o ambiente [53]. O processo de perda de emaranhamento é denominado de decoerência, e também é objeto de estudo em vários grupos de pesquisa em todo o mundo [54], pois ela é, além de outras coisas, o principal limitante para a implementação da computação quântica.

### 2.2.1 Critérios de Emaranhamento

Encontrar maneiras de se identificar o emaranhamento de um determinado sistema não é uma tarefa simples, de forma que existem diferentes tipos de critérios de emaranhamento que podem ser usados em diferentes tipos de experimento, de acordo com sua especificidade. Inspirado no paradoxo EPR, uma das primeiras propostas de se identificar emaranhamento em meios contínuos foi feita na referência [8], artigo no qual foi proposto que os feixes sinal e complementar do OPO acima do limiar poderiam ser emaranhados. A idéia desse artigo consiste em medir os observáveis  $p_1$  e  $q_1$  e então inferir os valores  $p_2^{inf} = g_p p_1$  e  $q_2^{inf} = g_q q_1$ , com isso calcularíamos a variância inferida, portanto

$$\Delta(p_1 - p_2^{inf})\Delta(q_1 + q_2^{inf}) \not\geq 1. \quad (2.2)$$

Notemos que nesse critério não existe nenhuma violação do princípio da incerteza de Heisenberg, já que as variâncias são calculadas a partir de valores inferidos. A grande desvantagem desse método é que as constantes  $g_p$  e  $g_q$  são calculadas considerando que o estado do sistema seja puro, assim sendo, ao considerarmos um estado real essa desigualdade é muito restritiva, impossibilitando a caracterização do emaranhamento do OPO. Nas próximas seções desse capítulo trataremos de critérios de emaranhamento que são genéricos e não impõem nenhuma restrição sobre a pureza do sistema.

## 2.3 Positividade sob Transposição Parcial

Asher Peres em 1996 [55] propôs uma maneira simples de verificar se um sistema apresenta emaranhamento, usando características que uma matriz densidade que representa um sistema físico deve obedecer.

Seguindo o tratamento proposto no artigo, vamos supor um sistema composto por dois sub-sistemas, caso esse sistema seja separável podemos escrever sua matriz densidade como,

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2)}. \quad (2.3)$$

Uma característica fundamental de uma matriz densidade é que ela é hermitiana e positiva, ou seja todos os autovalores de uma matriz densidade devem ser reais positivos.

Para entender mais claramente o critério de separabilidade é interessante escrever essa matriz de densidade em termos de suas componentes,

$$\rho_{m\mu, n\nu} = \sum_j P_j (\hat{\rho}_j^{(1)})_{mn} (\hat{\rho}_j^{(2)})_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

os índices latinos se referem a primeiro sub-sistema enquanto os índices gregos se referem ao segundo sub-sistema.

Definindo a uma nova matriz  $\hat{\sigma}$  tal que

$$\sigma_{m\mu, n\nu} \equiv \rho_{n\mu, m\nu}, \quad (2.5)$$

onde para chegarmos a essa nova matriz a única coisa feita foi a transposição dos índices latinos. A operação feita não é unitária, no entanto a matriz  $\hat{\sigma}$  ainda é uma matriz hermitiana. Quando podemos escrever a matriz densidade como em (2.3) essa operação pode ser vista como,

$$\hat{\sigma} = \sum_j P_j \left( \hat{\rho}_j^{(1)} \right)^T \otimes \hat{\rho}_j^{(2)}. \quad (2.6)$$

Já que a matriz transposta do primeiro subsistema  $\left( \hat{\rho}_j^{(1)} \right)^T = \left( \hat{\rho}_j^{(1)} \right)^*$  continua sendo hermitiana e positiva, ela ainda pode ser considerada como uma matriz densidade legítima. Isso implica que a matriz  $\hat{\sigma}$  *não pode apresentar nenhum auto-valor negativo*, i.e.,  $\hat{\sigma} > 0$

Caso exista algum autovalor negativo, o sistema não pode ser escrito em uma forma separável, ou seja, o sistema é dito emaranhado. Portanto esse critério é uma forma *suficiente* para qua exista emaranhamento em qualquer sistema.

### 2.3.1 Aplicação em Variáveis Contínuas

O critério PPT (Peres Partial Transpose), no caso de variáveis contínuas, especialmente para sistemas Gaussianos, é uma condição *necessária e suficiente* para emaranhamentos bipartites [35]. No caso de sistemas contínuos, a transposição parcial (PT) tem uma bonita interpretação geométrica de uma reflexão no espaço de fases da função de Wigner, ou seja,

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}^T \iff W(q, p) \rightarrow W(q, -p) \quad (2.7)$$

Considerando novamente um sistema bipartite, definiremos os seguintes vetores para descrevermos o critério PPT em sistemas de variáveis contínuas,

$$\xi = (q_1 \ p_1 \ q_2 \ p_2), \quad \hat{\xi} = (\hat{q}_1 \ \hat{p}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{p}_2). \quad (2.8)$$

Logo, efetuando a transposição parcial sobre apenas sobre o sistema 2 por exemplo, a função de Wigner será reescrita como

$$W(p_1, q_1, p_2, q_2) \xrightarrow{PT} W(p_1, q_1, p_2, -q_2). \quad (2.9)$$

Caso o sistema seja separável, após a transposição parcial a nova função de Wigner  $W(\Lambda\xi)$ ,  $\Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$  ainda deve ser considerada como uma função de Wigner legítima, assim como aconteceu quando analisamos o efeito da transposição parcial sobre a matriz densidade. No caso de sistemas Gaussianos (1.134) a função de Wigner depende da matriz de covariância do sistema  $V_{ij} = \{\xi_i, \xi_j\}/2$ . Por essa razão, vemos que a transposição parcial sobre a matriz de covariância deve atuar da seguinte forma,

$$V \xrightarrow{PT} \tilde{V} = \Lambda V \Lambda. \quad (2.10)$$

Como vimos na seção 1.8, podemos reescrever o princípio da incerteza em termos da matriz densidade, de forma que se um sistema for separável, a equação (1.132) ainda deve ser válida após a transposição parcial do sistema, ou seja,

$$\tilde{V} + i\Omega \geq 0. \quad (2.11)$$

Com isso, para uma matriz de covariância genérica, escrita como

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

e usando alguns invariantes simpléticos, Simon mostra em seu artigo [35], a partir do critério PPT, que qualquer sistema gaussiano separável deve obedecer à seguinte desigualdade,

$$\det(A) \det(B) + \left(\frac{1}{4} + |\det(C)|\right)^2 - \text{tr}(AJBJCJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det(A) + \det(B)). \quad (2.13)$$

No entanto, como podemos ver no apêndice 5 uma matriz de varância pode ser escrita em termos de autovalores simpléticos. Logo, reescrevendo a matriz de covariância parcial transporta em sua forma simplética teremos

$$S_\omega \tilde{V} S_\omega^T + i\Omega \geq 0, \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} S_\omega \tilde{V} S_\omega^T &= \text{Autovalores}[-(\tilde{V}\Omega)^2] \\ &= \text{diag}(\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_N, \tilde{\nu}_N). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, é condição necessária e suficiente para que um sistema gaussiano seja separável que todos os autovalores simpléticos sejam maiores que um após a transposição parcial do sistema, ou seja,

$$\tilde{\nu}_k^{\min} \geq 1. \quad (2.16)$$

## 2.4 Somas de Variâncias

Seguindo a referência [56], suponhamos que um sistema é constituído por dois outros sub-sistemas, então definindo os pares de operadores genéricos  $\hat{x}_j$  e  $\hat{p}_j$ ,  $j = 1, 2$  tais que <sup>1</sup>,  $[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = 2i\delta_{kj}$ .

Para a demonstração do critério devemos definir a seguinte transformação de variáveis sobre os operadores,

$$\hat{u} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2, \quad (2.17)$$

$$\hat{v} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2. \quad (2.18)$$

Se o sistema é constituído de sub-sistemas separáveis então sua matriz densidade poderá ser escrita como em (2.3). Então, será condição necessária para a separabilidade do sistema

---

<sup>1</sup>Esses operadores não necessariamente precisam ser os operadores canônicos de posição e momento

que esses novos operadores obedeçam a inequação,

$$\Delta^2 \hat{u} + \Delta^2 \hat{v} \geq 2 \left( a^2 + \frac{1}{a^2} \right). \quad (2.19)$$

Para provar a asserção acima, só é necessário o cálculo direto das variâncias dos operadores  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ , além disso como o sistema é separável devemos considerar que medidas sobre um sub-espaco não alteram o estado do outro sub-espaco, ou seja, devemos considerar que,

$$\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_i = \langle \hat{x}_1 \rangle_i \langle \hat{x}_2 \rangle_i, \quad \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle_i = \langle \hat{p}_1 \rangle_i \langle \hat{p}_2 \rangle_i. \quad (2.20)$$

Calculando a soma das variâncias de  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ , segue

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{u} + \Delta^2 \hat{v} &= \sum_i P_i (\langle \hat{u}^2 \rangle_i + \langle \hat{v}^2 \rangle_i) - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{v} \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i P_i \left[ a^2 (\langle \hat{x}_1^2 \rangle_i + \langle \hat{p}_1^2 \rangle_i) + \frac{1}{a^2} (\langle \hat{x}_2^2 \rangle_i + \langle \hat{p}_2^2 \rangle_i) \right] \\ &\quad + \frac{a}{|a|} \left[ \sum_i P_i (\langle \hat{x}_1 \rangle_i \langle \hat{x}_1 \rangle_i - \langle \hat{p}_1 \rangle_i \langle \hat{p}_2 \rangle_i) \right] - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{v} \rangle_\rho^2 \\ &= a^2 (\Delta^2 \hat{x}_1 + \Delta^2 \hat{p}_1) + \frac{1}{a^2} (\Delta^2 \hat{x}_2 + \Delta^2 \hat{p}_2) \\ &\quad + \sum_i P_i \langle \hat{u} \rangle_i^2 + \sum_i P_i \langle \hat{v} \rangle_i^2 - \left( \sum_i P_i \langle \hat{u} \rangle_i \right)^2 - \left( \sum_i P_i \langle \hat{v} \rangle_i \right)^2. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Como  $(\Delta \hat{x}_i - \Delta \hat{p}_i)^2 \geq 0$  portanto  $\Delta^2 \hat{x}_i + \Delta^2 \hat{p}_i \geq \Delta \hat{x}_i \Delta \hat{p}_i \geq |[\hat{x}_i, \hat{p}_i]|$ . Além disso pela desigualdade de Cauchy-Schwartz teremos que  $\sum_i P_i \sum_i P_i \langle u \rangle_i^2 \geq (\sum_i P_i \langle u \rangle_i)^2 \geq 0$ , fazendo com que a última linha da equação acima tenha limite inferior igual a zero. Portanto, provamos que a inequação (2.19) é condição necessária para a separabilidade do sistema.

Além disso, como foi mostrado nesse mesmo artigo, esse critério não é somente condição necessária para separabilidade bipartite mas também é condição suficiente, caso o estado do sistema global seja um estado gaussiano.

### 2.4.1 Caso Tripartite

O critério de soma de variância de observáveis, além de verificar emaranhamento bipartites, também pode ser usado para explorar a separabilidade de sistemas compostos por mais de dois sub-sistemas, como foi proposto na referência [52]. Para o caso de um

sistema constituído de três sub-partições podemos definir os seguintes observáveis

$$\hat{u} = h_1\hat{p}_1 + h_2\hat{p}_2 + h_3\hat{p}_3 \quad \text{e} \quad \hat{v} = g_1\hat{x}_1 + g_2\hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3. \quad (2.22)$$

Para verificarmos o emaranhamento tripartite do sistema devemos testar a separabilidade para todas as maneiras de bipartições possíveis,

$$\hat{\rho}_{\text{bisep1}} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2,3)}, \quad (2.23)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bisep2}} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(2)} \otimes \hat{\rho}_j^{(1,3)}, \quad (2.24)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bisep3}} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(3)} \otimes \hat{\rho}_j^{(1,2)}. \quad (2.25)$$

Portanto, com cálculos análogos aos usados na seção anterior (2.21), encontramos as seguintes desigualdades que testam cada uma das bipartições possíveis,

$$\rho_{\text{bisep1}} \Rightarrow \Delta_{bs1}^2 \hat{u} + \Delta_{bs1}^2 \hat{v} \geq 2|h_1g_1| + 2|h_2g_2 + h_3g_3|, \quad (2.26)$$

$$\rho_{\text{bisep2}} \Rightarrow \Delta_{bs2}^2 \hat{u} + \Delta_{bs2}^2 \hat{v} \geq 2|h_2g_2| + 2|h_1g_1 + h_3g_3|, \quad (2.27)$$

$$\rho_{\text{bisep3}} \Rightarrow \Delta_{bs3}^2 \hat{u} + \Delta_{bs3}^2 \hat{v} \geq 2|h_3g_3| + 2|h_1g_1 + h_2g_2|. \quad (2.28)$$

Além disso, se o sistema for totalmente separável, sua matriz densidade será escrita como,

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j^{(1)} \otimes \hat{\rho}_j^{(2)} \otimes \hat{\rho}_j^{(3)}, \quad (2.29)$$

o que implicará que a soma das variâncias dos operadores  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$  terá de obedecer a condição mais restritiva que no caso de que o sistema é separável em bipartições,

$$\rho_{\text{sep}} \Rightarrow \Delta_{\text{sep}}^2 \hat{u} + \Delta_{\text{sep}}^2 \hat{v} \geq 2|h_1g_1| + 2|h_2g_2| + 2|h_3g_3|. \quad (2.30)$$

Salientando que uma matriz de densidade qualquer deve obedecer a seguinte condição menos restritiva para a soma das variância desses observáveis,

$$\rho \Rightarrow \Delta^2 \hat{u} + \Delta^2 \hat{v} \geq 2|h_1g_1 + h_2g_2 + h_3g_3|. \quad (2.31)$$

Os coeficientes  $h_j$  e  $g_j$  são arbitrários, de forma que a escolha de seus valores deve ser feita de acordo com o experimento. Uma maneira conveniente de escolher esses coeficientes pode ser feita tentando-se anular o lado direito da desigualdade (2.31), pois isso permitirá

uma maior violação sobre a desigualdade (2.30).

Como proposto na referência [11] escolhendo os seguintes valores para os coeficientes

- $h_3 = 0$  e  $h_1 = -h_3 = g_1 = g_2 = 1$ ,

teremos a seguinte desigualdade para o caso em que a matriz é totalmente separável (2.31)

$$\hat{\rho}_{\text{sep}} \Rightarrow \Delta_{\text{sep}}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + \Delta_{\text{sep}}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3) \geq 4. \quad (2.32)$$

Analisando o caso em que a matriz densidade pode ser separada em bipartições encontraremos o seguinte resultado para as inequações (2.28),

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p1} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}1}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + \Delta_{\text{bs}1}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3) \geq 4, \quad (2.33)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p2} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}2}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + \Delta_{\text{bs}2}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3) \geq 4, \quad (2.34)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p3} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}3}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + \Delta_{\text{bs}3}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3) \geq 0. \quad (2.35)$$

Logo, escolhendo esses valores para os coeficientes vemos que a violação da desigualdade (2.32) demonstra que a matriz densidade do sistema não pode ser escrita numa forma totalmente separável. Além disso, com essa violação das desigualdades (2.33) e (2.34) mostram que o sistema também não poderá ser escrito como bipartições na forma  $\hat{\rho}_{\text{bise}p1}$   $2 \hat{\rho}_{\text{bise}p2}$ . No entanto, essa escolha dos coeficientes não é suficiente para mostrar que existe um emaranhamento tripartite genuíno nesse sistema, pois a desigualdade (2.35) não traz informação nenhuma sobre bipartições do tipo  $\hat{\rho}_{\text{bise}p3}$ .

Todavia, se juntamente com esse conjunto de valores para os coeficientes  $h_i$  e  $g_i$  escolhermos mais os dois outros conjuntos

- $h_2 = 0$  e  $h_1 = h_3 = g_1 = -g_3 = 1$ ,
- $h_1 = 0$  e  $h_2 = h_3 = g_2 = -g_3 = 1$ ,

poderemos montar mais duas inequações que com juntamente com a inequação (2.32) permitem a verificação de todos os tipos de separabilidade bi-partite além da separabilidade total do sistema [11],

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p(1,2)} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}12}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + \Delta_{\text{bs}12}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_3\hat{x}_3) \geq 4, \quad (2.36)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p(1,3)} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}13}^2(\hat{p}_1 + \hat{p}_3) + \Delta_{\text{bs}13}^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_3 + g_2\hat{x}_2) \geq 4, \quad (2.37)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p(2,3)} \Rightarrow \Delta_{\text{bs}23}^2(\hat{p}_2 + \hat{p}_3) + \Delta_{\text{bs}23}^2(\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + g_1\hat{x}_1) \geq 4. \quad (2.38)$$

---

Portanto, a violação as desigualdades acima é uma condições *suficiente* para demonstramos o emaranhamento tripartite genuíno do sistema.



### 3 Oscilador Paramétrico Ótico

O Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) consiste em um cristal com susceptibilidade elétrica não-linear de segunda ordem,  $\chi^{(2)}$ , inserido em uma cavidade ótica. Sobre essa cavidade incide um feixe intenso de bombeio, e a partir de um processo denominado conversão paramétrica, são gerados dois novos feixes, Sinal e Complementar.



Figura 3.1: Esquema do Oscilador Paramétrico Ótico. O feixe de bombeio é convertido em dois outros feixes, sinal e complementar, via conversão paramétrica

O processo da conversão paramétrica pode ser entendido quanticamente como um fóton do Bombeio, de frequência  $\omega_0$ , sendo aniquilado e convertido em dois outros fótons, Sinal e Complementar, com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  respectivamente. Devido à conservação de energia teremos que a soma das frequências dos feixes sinal e complementar deverá ser igual a frequência do feixe de bombeio, ou seja,

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (3.1)$$

Classicamente, a conversão paramétrica acontece por causa do acoplamento intracavidade de três modos do campo gerado pelo termo não-linear de segunda ordem da susceptibilidade elétrica do cristal [57].

Quando a taxa de criação de fótons dos feixes sinal e complementar supera as perdas devido ao espelho de saída e perdas espúrias<sup>1</sup>, o OPO começa a produzir feixes intensos de luz para esses comprimentos de onda. Esse fenômeno acontece somente a partir de uma

<sup>1</sup>Denominamos como "ganho" do OPO a taxa de produção de fótons dividido pela taxa das perdas de fótons.

certa potência de limiar do feixe de bombeio, denominamos esse regime de funcionamento como regime de Oscilação do OPO.

O OPO é um aparelho extremamente versátil pois o comprimento de onda dos feixes sinal e complementar pode ser ajustado de forma contínua, fazendo com que esse instrumento possa ser usado para criação de feixes laser com comprimentos de onda que seriam difíceis de se obter de outra maneira [33]. Basicamente, existem dois tipos de OPO, o OPO tipo I, cujos feixes sinal e complementar tem a mesma polarização, e o OPO tipo II, cujas polarizações dos feixes sinal e complementar são ortogonais. Nessa dissertação trataremos somente do OPO tipo II.

Além disso, o OPO é um instrumento bastante usado no estudo da informação quântica, pois com ele é possível implementar protocolos de criptografia quântica [58, 13] e de teletransporte quântico [59], entre outras aplicações.

### 3.1 Descrição Quântica do OPO

A hamiltoniana de interação que descreve o processo da conversão paramétrica é dada por [11]

$$\hat{H}_I = \frac{2i\hbar\chi}{\tau} \left( \hat{a}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 \right), \quad (3.2)$$

onde  $\tau$  é o período que um fóton leva para dar uma volta completa na cavidade e  $\chi$  é uma constante de acoplamento. O processo de conversão paramétrica pode ser visto nessa hamiltoniana pela disposição dos operadores de criação e aniquilação. Pois, à medida que dois fótons do sinal e complementar são criados ocorre a aniquilação de um único fóton do bombeio. Nessa expressão também aparece o termo do processo inverso, o que, de fato, tem que ocorrer pela simetria do problema e para que a hamiltoniana seja Hermitiana.

Definimos a dessintonia normalizada pela largura de banda intracavidade,  $\delta\omega_{cj} = 2\gamma'_j/\tau$ , de cada campo como  $\Delta_j = (\omega_j - \omega_{cj})/\delta\omega_{cj}$ , onde  $\omega_{cj}$  é a frequência de ressonância da cavidade mais próxima da frequência  $\omega_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ . A constante  $\gamma'_j$  é definida como a perda total da cavidade sendo dada por  $\gamma'_j = \gamma_j + \mu_j$ , onde  $\gamma_j$  representa as perdas pelo espelho de acoplamento sendo igual à metade de sua transmissão em cada modo, ou seja,  $2\gamma'_j = T_j$ . A constante  $\mu_j$  representa as perdas espúrias devidas às imperfeições dos materiais que compõem a cavidade. Temos que a hamiltoniana de cada campo intracavidade,

escrita em termos de operadores lentamente variáveis,  $a \rightarrow ae^{i\omega_c t}$ , será

$$\hat{H}_j = 2\gamma'_j \Delta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j. \quad (3.3)$$

Tendo em vista que os modos sinal e complementar têm frequências pouco diferentes, então podemos considerar que  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , o que implica que a largura de banda da cavidade para os modos sinal e complementar é aproximadamente a mesma ( $\delta\omega_{c1} = \delta\omega_{c2} = \delta\omega$ ). De fato, como veremos no capítulo 4, a diferença entre a largura de banda entre os feixes sinal e complementar é da ordem de 10%, no entanto, isso não acarreta nenhum prejuízo notável na análise das medidas.

Por fim, devemos levar em conta a fonte de energia do sistema, isto é, devemos considerar o acoplamento entre o campo de bombeio clássico, transmitido para o interior da cavidade pelo espelho de entrada, com o campo de bombeio intracavidade, assim temos que a hamiltoniana relativa a esse processo é

$$\hat{H}_{in} = i\hbar \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\tau} \alpha_0^{in} (\hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger). \quad (3.4)$$

A hamiltoniana que governa a dinâmica do OPO será dada pela soma das hamiltoninas de cada processo físico envolvido, ou seja,

$$\hat{H} = \hat{H}_I + \hat{H}_{in} + \sum_j \hat{H}_j. \quad (3.5)$$

Como vimos na seção 1.7, podemos calcular a evolução temporal do sistema a partir da equação mestra para o operador densidade, onde levamos em conta o acoplamento dos campos intracavidade com o reservatório através do operador de Lindblad  $\hat{\Lambda}_j$ .

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_j \hat{\Lambda}_j \hat{\rho}, \quad (3.6)$$

$$\hat{\Lambda}_j = \frac{\gamma'_j}{\tau} \left( 2\hat{a}_j \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger - \hat{\rho} \hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j \hat{a}_j^\dagger \hat{\rho} \right). \quad (3.7)$$

Usando a equação mestra do OPO e as relações (1.147), encontramos a equação de

movimento para a função de Wigner do OPO [33],

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(\vec{\alpha}) = & \left[ \sum_j \gamma'_j (1 + i\Delta_j) \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_j^*} \alpha_j^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha_j \right) \right. \\ & + 2\chi \left( \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \alpha_1^* \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_0} - \alpha_0 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} - \alpha_0^* \alpha_1^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \alpha_0 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} - \alpha_0^* \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \\ & \left. - \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^{in} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \right) + \sum_j \gamma'_j \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \alpha_j^*} - \frac{\chi}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial \alpha_0^* \alpha_1^* \alpha_2^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \right) \right] W(\vec{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para distribuições bem comportadas, como distribuições gaussianas, o termo de derivada de terceira ordem da equação acima pode ser desprezado, de forma que essa equação será uma equação de Fokker-Planck legítima. Na seção 1.9, vimos que podemos obter as equações de Langevin do OPO para as amplitudes complexas dos campos intracavidade, segue que

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \alpha_0 &= -\gamma'_0 (1 - i\Delta_0) \alpha_0 - 2\chi \alpha_1 \alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_0, \\ \tau \frac{d}{dt} \alpha_1 &= -\gamma'_1 (1 - i\Delta) \alpha_1 + 2\chi \alpha_0 \alpha_2^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_1 + \sqrt{2\mu} \delta v_1, \\ \tau \frac{d}{dt} \alpha_2 &= -\gamma'_2 (1 - i\Delta) \alpha_2 + 2\chi \alpha_0 \alpha_1^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_2 + \sqrt{2\mu} \delta v_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Os termos  $\delta v_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  são forças de Langevin que representam os termos de vácuo acoplados aos três modos do campo intracavidade devido às perdas espúrias. Já os termos  $\delta u_{1,2}$  são relativos aos termos de vácuo que são transmitidos para o interior da cavidade pelo espelho de acoplamento, no caso dos modos sinal e complementar, e pelo espelho de entrada no caso do modo de bombeio.

O campo de bombeio  $\alpha_0^{in}$ , apesar de ser um campo clássico, traz consigo um ruído intrínseco que pode ser igual ou maior ao ruído padrão, logo esse mesmo termo na equação acima deve ser visto como um termo de valor médio mais um termo de flutuação, ou seja,  $\alpha_0^{in} = \alpha_0^{in} + \delta \alpha_0^{in}$ . Como foi visto ao longo do primeiro capítulo, o mesmo deve ocorrer para todos os outros campo intracavidade, que serão reescritos como um termo médio mais um termo de flutuação, ou seja,  $\alpha_j(t) = \alpha_j + \delta \alpha_j(t)$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

Decompondo as amplitudes complexas dos campos em termos das quadraturas amplitude e fase, e lembrando que o valor médio da quadratura fase é zero,  $\langle q_j(t) \rangle = 0$ , iremos reescrever o valor médio da amplitude complexa como,

$$\langle \alpha_j(t) \rangle = \alpha_j = p_j e^{i\varphi_j}. \quad (3.10)$$

Além disso, tomaremos o bombeio como referência de fase considerando sua fase igual a zero, ( $\varphi_0^{in} = 0$ ).

## 3.2 Valores Estacionários

Considerando a média temporal dos valores estacionários das equações de Langevin do OPO (3.9) e usando a expressão fornecida em (3.10), encontraremos o seguinte conjunto de equações para as amplitudes médias dos campo intracavidade,

$$\gamma'_0 (1 - i\Delta_0) p_0 e^{i\varphi_0} + 2\chi p^2 e^{i\varphi_+} - \sqrt{2\gamma_0} p_0^{in} = 0, \quad (3.11)$$

$$\gamma' (1 - i\Delta) - 2\chi p_0 e^{i\varphi_0 - i\varphi_+} = 0, \quad (3.12)$$

onde consideramos que as amplitudes médias dos campos sinal e complementar são iguais,  $p_1 = p_2 = p$ , e fizemos  $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ . Essas equações são as mesma que são obtidas quando fazemos o estudo do caso estacionario do OPO na descrição clássica de ótica não-linear [60, 33]. A partir da equação (3.12), encontramos a seguinte relação,

$$p_0 e^{i\varphi_0} = \frac{\gamma' (1 - i\Delta)}{2\chi} e^{i\varphi_+}. \quad (3.13)$$

Calculando o módulo ao quadrado da equação anterior, temos diretamente a relação para intensidade do campo de bombeio intracavidade,

$$p_0^2 = \frac{\gamma'^2}{4\chi^2} (1 + \Delta^2). \quad (3.14)$$

Percebemos, por essa equação, que quando o OPO está em ressonância a intensidade do campo de bombeio intracavidade dependerá apenas da dessintonia dos campos sinal e complementar. Além disso, se substituirmos a equação (3.14) em (3.13), encontraremos como a fase do campo de bombeio se relaciona com a soma das fases do sinal e complementar,

$$e^{i\varphi_0} = \frac{1 - i\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}} e^{i\varphi_+}. \quad (3.15)$$

Agora, substituindo (3.14) em (3.12), isolando  $p$  e em seguida tirando o módulo dessa equação, conseguimos determinar o valor da intensidade intracavidade dos campos sinal e complementar,

$$p^2 = \sqrt{\frac{2\gamma_0}{4\chi^2} p_0^{in^2} - \left[ \frac{\gamma'_0 \gamma'}{4\chi^2} (\Delta_0 + \Delta) \right]^2} - \frac{\gamma'_0 \gamma'}{4\chi^2} (1 - \Delta_0 \Delta). \quad (3.16)$$

Fazendo  $p = 0$  e  $\Delta_0 = \Delta = 0$  em (3.16) encontramos a menor potência possível do bombeio incidente para que o OPO possa oscilar. Definimos, então, essa potência como potência de limiar  $P_{lim}$ .

$$P_{lim} = \frac{\gamma_0'^2 \gamma'^2}{8\gamma_0 \chi^2}. \quad (3.17)$$

Definido a potência de bombeio incidente relativa ao limiar  $\sigma = p_0^{in2}/P_{lim}$ , podemos reescrever as potências intracavidade do bombeio (3.14), sinal e complementar (3.16) em função de  $\sigma$  e  $P_{lim}$ , eliminando assim a constante  $\chi$  por grandezas facilmente mensuráveis,

$$p_0^2 = \frac{2\gamma_0}{\gamma_0'^2} P_{lim} (1 + \Delta^2), \quad (3.18)$$

$$p^2 = \frac{2\gamma_0}{\gamma_0' \gamma'} P_{lim} \left[ \sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} - (1 - \Delta_0 \Delta) \right]. \quad (3.19)$$

Por fim, a intensidade dos campos sinal e complementar medidas pelos detectores será igual a amplitude ao quadrado desses campo vezes a transmissão do espelho de acoplamento,

$$I = 2\gamma p^2 = 4\eta_{OPO} P_{lim} \left[ \sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} - (1 - \Delta_0 \Delta) \right], \quad (3.20)$$

em que  $\eta_{OPO}$  é a eficiência de conversão máxima do OPO e é dada por

$$\eta_{OPO} = \frac{\gamma_0 \gamma}{\gamma_0' \gamma'}. \quad (3.21)$$

### 3.3 Flutuações Quânticas Linearizadas

Nessa seção, trataremos da análise das flutuações quânticas dos campo do OPO. É nesta parte que se pode verificar a natureza quântica desse processo físico, já que os valores médios do campo devem estar de acordo com a teoria clássica da ótica não-linear. Reescrevendo os campos como um termo médio mais uma flutuação nas equações de Langevin do OPO (3.9) e isolando os termos de flutuação, onde são desprezados os termos quadráticos, encontraremos o seguinte conjunto de equações linearizadas,

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_0 &= -\gamma_0' (1 - i\Delta_0) \delta\alpha_0 - 2\chi p (e^{i\varphi_2} \delta\alpha_1 + e^{i\varphi_1} \delta\alpha_2) + \sqrt{2\gamma_0} \delta\alpha_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_0 \\ \tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_1 &= -\gamma' (1 - i\Delta) \delta\alpha_1 + 2\chi (p e^{-i\varphi_2} \delta\alpha_0 + p_0 e^{i\varphi_0} \alpha_2^*) + \sqrt{2\gamma} \delta u_1 + \sqrt{2\mu} \delta v_1 \\ \tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_2 &= -\gamma' (1 - i\Delta) \delta\alpha_2 + 2\chi (p e^{-i\varphi_1} \delta\alpha_0 + p_0 e^{i\varphi_0} \alpha_2^*) + \sqrt{2\gamma} \delta u_2 + \sqrt{2\mu} \delta v_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

O grupo de Óptica e Informação Quântica da Universidade Federal Fluminense [61] mostrou que o modelo linearizado para as equações do OPO usando a função de Wigner produz resultados equivalentes ao modelo completo do OPO operando acima do limiar na representação P-positiva.

Ao desprezarmos os termos de ordem cúbica na equação de movimento da função de Wigner desconsideramos processos físicos relativos à difusão de fase dos feixes do OPO. Porém, como mostrado na referência [61], esses termos não são responsáveis pelo aumento do ruído de fase nos feixes do OPO que será relatado nas próximas seções.

As flutuações dos campos podem ser decompostas em flutuações de amplitude e fase, ou seja,

$$\delta\alpha_j(t) = \frac{e^{i\varphi_j}}{2} [\delta p_j(t) + i\delta q_j(t)]. \quad (3.23)$$

Portanto, substituindo (3.23) em (3.22) e em seguida separando as partes reais das imaginárias desse novo sistema chegaremos ao seguinte conjunto de equações para as flutuações de amplitude e fase dos campos intracavidade do OPO,

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_0 &= -\gamma'_0 \delta p_0 - \Delta_0 \gamma'_0 \delta q_0 - \gamma' \beta \delta p_1 + \Delta \gamma' \beta \delta q_1 - \gamma' \beta \delta p_2 + \Delta \gamma' \beta \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma_0} \delta p_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{p0}; \\ \tau \frac{d}{dt} \delta q_0 &= \Delta_0 \gamma'_0 \delta p_0 - \gamma'_0 \delta q_0 - \Delta \gamma' \beta \delta p_1 - \gamma' \beta \delta q_1 - \Delta \gamma' \beta \delta p_2 - \gamma' \beta \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma_0} \delta q_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{q0}; \\ \tau \frac{d}{dt} \delta p_1 &= \gamma' \beta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 - \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 + \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p1}; \\ \tau \frac{d}{dt} \delta q_1 &= -\Delta \gamma' \beta p_0 + \gamma' \beta \delta q_0 + \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_1 - \Delta \gamma' \delta p_2 - \gamma' \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q1}; \\ \tau \frac{d}{dt} \delta p_2 &= \gamma' \beta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 + \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 - \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p2} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p2}; \\ \tau \frac{d}{dt} \delta q_2 &= -\Delta \gamma' \beta p_0 + \gamma' \beta \delta q_0 - \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_1 + \Delta \gamma' \delta p_2 - \gamma' \delta q_2 \\ &\quad + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q2} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como as quadraturas do vácuo podem ser escolhidas de maneira arbitrária, então, para escrevermos esse sistema de equações definimos as flutuações de vácuo transmitidas

pelo espelho como  $\delta u_j = \exp(i\varphi_j)(\delta u_{pj} + \delta u_{qj})$  e também devido as perdas espúrias  $\delta v_j = \exp(i\varphi_j)(\delta v_{pj} + \delta v_{qj})$ , além disso, definimos uma nova variável  $\beta = p/p_0$ .

Tomando a transformada de Fourier do sistema de equações diferenciais para as flutuações de intensidade e fase dos campos do OPO (3.24), ele se transformará num sistema de equações algébricas no espaço das frequências, pois  $d/dt \rightarrow i\Omega$ , Portanto, podemos reescrever esse sistema numa forma matricial, para isso, definiremos os seguintes vetores,

$$\begin{aligned}\delta\vec{p} &= (\delta p_0, \delta q_0, \delta p_1, \delta q_1, \delta p_2, \delta q_2)^T, \\ \delta\vec{u} &= (\delta p_{in}, \delta q_{in}, \delta u_{p1}, \delta u_{q1}, \delta u_{p2}, \delta u_{q2})^T, \\ \delta\vec{v} &= (\delta v_{p0}, \delta v_{q0}, \delta v_{p1}, \delta v_{q1}, \delta v_{p2}, \delta v_{q2})^T,\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde  $\delta\vec{p}$  corresponde às flutuações dos campos intracavidade,  $\delta\vec{u}$  corresponde às flutuações de vácuo transmitidas para dentro da cavidade pelo espelho de acoplamento e, por fim,  $\delta\vec{v}$  corresponde às flutuações de vácuo que são acopladas ao sistema devido às perdas espúrias.

Com isso, segue que o sistema para as flutuações dos campos intracavidade no espaço de frequência será escrito como,

$$(-\mathbf{A} + i\tau\Omega)\delta\vec{p} = \mathbf{T}_u\delta\vec{u} + \mathbf{T}_v\delta\vec{v},\tag{3.26}$$

onde definimos as matrizes de transmissão pelo espelho de acoplamento  $\mathbf{T}_u$ , e de perdas espúrias  $\mathbf{T}_v$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \text{diag}(\sqrt{2\gamma_0}, \sqrt{2\gamma_0}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}), \\ \mathbf{T}_v &= \text{diag}\left(\sqrt{2\mu_0}, \sqrt{2\mu_0}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}\right).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Também teremos a matriz  $\mathbf{A}$  de arrasto que foi definida na seção 1.9, de forma que o termo  $(-\mathbf{A} + i\tau\Omega) = \mathbf{M}_A(\Omega)$  é dado por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}}(\Omega) = \begin{pmatrix} \gamma'_0 + i\tau \Omega & \Delta_0 \gamma'_0 & \gamma' \beta & -\Delta \gamma' \beta & \gamma' \beta & -\Delta \gamma' \beta \\ -\Delta_0 \gamma'_0 & \gamma'_0 + i\tau \Omega & \Delta \gamma' \beta & \gamma' \beta & \Delta \gamma' \beta & \gamma' \beta \\ -\gamma' \beta & -\Delta \gamma' \beta & \gamma' + i\tau \Omega & \Delta \gamma' & -\gamma' & \Delta \gamma' \\ \Delta \gamma' \beta & -\gamma' \beta & -\Delta \gamma' & \gamma' + i\tau \Omega & \Delta \gamma' & \gamma' \\ -\gamma' \beta & -\Delta \gamma' \beta & -\gamma' & \Delta \gamma' & \gamma' + i\tau \Omega & \Delta \gamma' \\ \Delta \gamma' \beta & -\gamma' \beta & \Delta \gamma' & \gamma' & -\Delta \gamma' & \gamma' + i\tau \Omega \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Portanto, as flutuações de amplitude e fase dos campos intracavidade serão obtidas ao resolvermos uma equação matricial de uma matriz  $6 \times 6$ . Problema esse que pode ser resolvido mais facilmente usando programas de computação simbólica como *Maple* e *Mathematica*, segue então que

$$\delta \vec{p} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) [\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \delta \vec{u} + \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \delta \vec{v}]. \quad (3.29)$$

Assumindo que o espelho de acoplamento tem alta reflexão e tendo em vista que os campos intracavidades e os campos refletidos devem apresetar uma defasagem de  $\pi$ , então a flutuação dos campos que saem da cavidade e são medidos pelos detetores é

$$\begin{aligned} \delta \vec{p}_{out} &= -\delta \vec{u} + \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \delta \vec{p} \\ &= (\mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \mathbf{T}_{\mathbf{u}} - \mathbf{I}) \delta \vec{u} + \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

## 3.4 Espectro de ruído do OPO

Nessa seção, iremos analisar o espectro de ruído do OPO quando este está em condição ótima de funcionamento, ou seja, quando as dessintonias dos campos intracavidade são nulas ( $\Delta_0 = \Delta = 0$ ). Definindo a frequência de análise normalizada pela largura de banda dos modos sinal e complementar da cavidade do OPO,  $\Omega' = \Omega/\delta\omega = \tau\Omega/2\gamma'$ . Segue que para

essa nova variável a matriz  $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}(\Omega)$  é substituída por  $\mathbf{M}_{\mathbf{A}'}(\Omega')$  onde,

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}'}(\Omega') = \begin{pmatrix} \gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega' & 0 & \gamma'\beta & 0 & \gamma'\beta & 0 \\ 0 & \gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega' & 0 & \gamma'\beta & 0 & \gamma'\beta \\ -\gamma'\beta & 0 & \gamma'(1 + 2i\Omega') & 0 & -\gamma' & 0 \\ 0 & -\gamma'\beta & 0 & \gamma'(1 + 2i\Omega') & 0 & \gamma' \\ -\gamma'\beta & 0 & -\gamma' & 0 & \gamma'(1 + 2i\Omega') & 0 \\ 0 & -\gamma'\beta & 0 & \gamma' & 0 & \gamma'(1 + 2i\Omega') \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Portanto, a partir da equação (3.30) podemos calcular a matriz de covariância dos feixes do OPO que será dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{out}} &= \text{Re} [\langle \delta \vec{p}_{\text{out}}(\Omega') \delta \vec{p}_{\text{out}}(-\Omega')^T \rangle] \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{V}_{\text{puro}} + \mathbf{V}_{\text{perdas}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

O termo  $\mathbf{I}$  pode ser visto como o ruído de entrada refletido pelo espelho de acoplamento, esse ruído é geralmente é igual ao estado de vácuo para todos os modos do campo, exceto no caso em que o laser de bombeio apresenta excesso de ruído em alguma quadratura. O termo  $\mathbf{V}_{\text{puro}}$  representa todo o espectro de ruído dos campos intracavidade, sendo sua expressão dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{puro}} &= \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{T}_{\mathbf{u}} [\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)]^T \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \\ &\quad - \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \mathbf{T}_{\mathbf{u}} - \mathbf{T}_{\mathbf{u}} [\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)]^T \mathbf{T}_{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

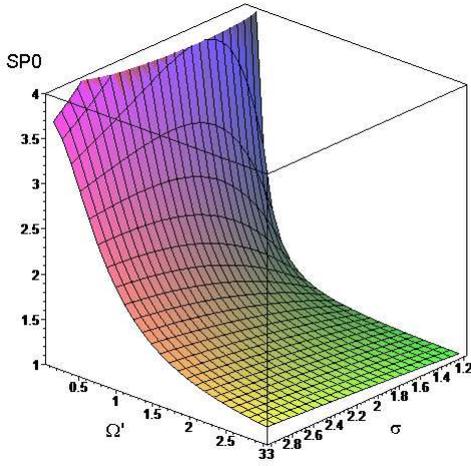
Já o último termo da expressão (3.32) representa o excesso de ruído acoplado aos campos intracavidade devido às perdas espúrias,

$$\mathbf{V}_{\text{perdas}} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \mathbf{T}_{\mathbf{v}} [\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)]^T \mathbf{T}_{\mathbf{u}}. \quad (3.34)$$

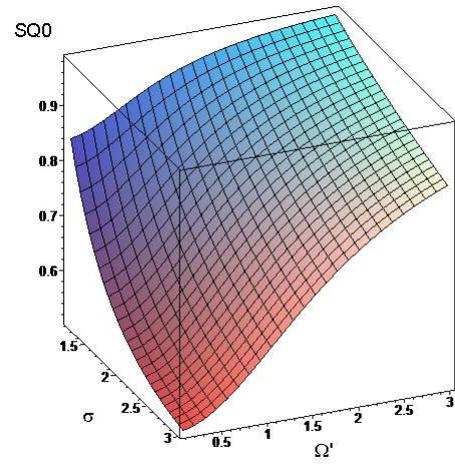
Nessa condição de funcionamento as correlações entre amplitude e fase são nulas para todos os campos, ou seja,  $C_{piqj} = 0$  para  $i, j = 0, 1, 2$ . Com isso, teremos que a matriz de

covariância do OPO será escrita na seguinte forma,

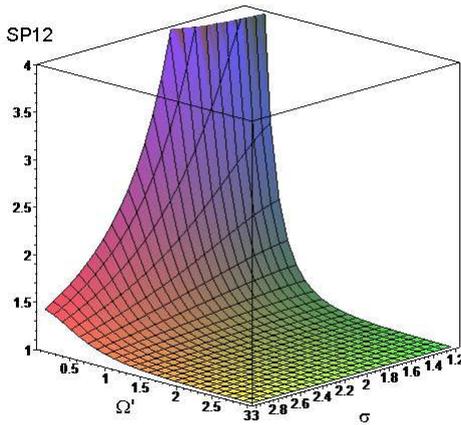
$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} S_{p0} & 0 & C_{p0p1} & 0 & C_{p0p2} & 0 \\ 0 & S_{q0} & 0 & C_{q0q1} & 0 & C_{q0q2} \\ C_{p0p1} & 0 & S_{p1} & 0 & C_{p1p2} & 0 \\ 0 & C_{q0q1} & 0 & S_{q1} & 0 & C_{q1q2} \\ C_{p0p2} & 0 & C_{p1p2} & 0 & S_{p2} & 0 \\ 0 & C_{q0q2} & 0 & C_{q1q2} & 0 & S_{q2} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$



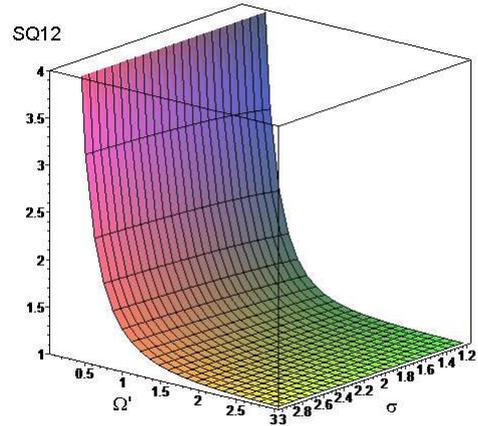
(a) Espectro de ruído de amplitude do campo bombeio



(b) Espectro de ruído de fase do campo bombeio



(c) Espectro de ruído de amplitude dos campos sinal e complementar



(d) Espectro de ruído de fase dos campos sinal e complementar

Figura 3.2: Espectro de ruído dos feixes do OPO

Apesar das expressões dos termos da matriz de covariância serem extensos, podemos analisar graficamente o espectro de ruído de amplitude e fase de cada modo do campo intracavidade, além de suas respectivas correlações.

Supondo que o OPO seja ideal, isto é, desconsiderando as perdas espúrias e escolhendo  $\gamma = 0.002$  e  $\gamma_0 = 0.05$ , que são valores compatíveis com transmissões de cavidades usadas em laboratório, podemos observar nas figuras 3.2 e 3.3 os gráficos dos termos da matriz do covariância do OPO em função da potência de bombeio normalizada pelo limiar de oscilação  $\sigma$  e da frequência de análise relativa à largura de banda dos feixes sinal e complementar na cavidade do OPO,  $\Omega'$ . As medidas feitas em laboratório tem seu valor em torno de  $\Omega' = 0.5$ .

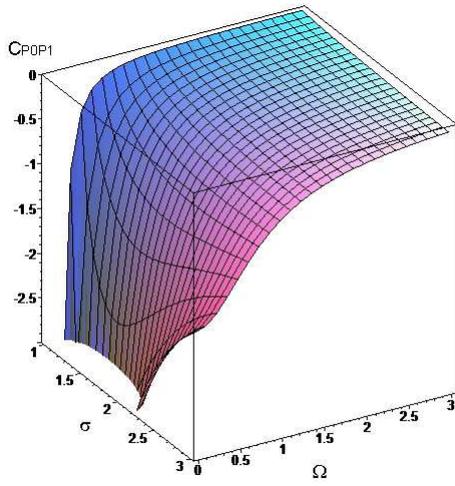
A figura 3.2 mostra o espectro de ruído de amplitude e fase dos feixe do OPO. Na figura 3.2(a) vemos que o ruído de amplitude do feixe de bombeio apresenta excesso de ruído. No entanto, notamos pela figura 3.2(b) que existe uma compressão no ruído de fase do feixe de bombeio, vemos ainda, que essa compressão aumenta com a potência dos feixes sinal e complementar gerados, sendo esse fenômeno já observado experimentalmente [62]. Podemos ver, nas figura 3.2(c) e 3.2(d), que o espectro de ruído de amplitude e fase dos feixes sinal e complementar sempre apresentam excesso de ruído em ambas quadraturas.

Na figura 3.3, observamos as correlações entre amplitude e fase dos feixes do OPO, nessa figura só foi exposta as correlações entre o bombeio e o sinal, pois, para um OPO ideal, elas são idênticas às correlações entre bombeio e complementar. Em 3.3(a) vemos que amplitude do bombeio é fortemente anti-correlacionada com a amplitude dos feixes sinal e complementar. Além disso, vemos pela figura 3.3(b) que, para o caso da quadratura fase, existe uma pequena correlação entre o bombeio e o sinal ou complementar.

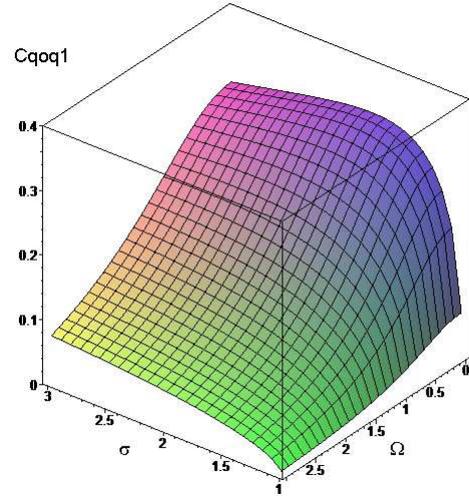
Podemos notar nos gráficos da figura 3.2 que quanto maior é a frequência de análise relativa à largura de banda do OPO,  $\Omega'$ , mais o espectro de ruído de todos os campos tende ao nível do ruído de vácuo, além disso, na figura 3.3 percebemos que as correlações entre os campos tende a zero para grandes frequências de análise. Isso acontece pois quanto maior for  $\Omega'$  mais distante da ressonância da cavidade estaremos, fazendo com que os campos medidos pelos detetores sejam compostos, em sua maior parte, pelo ruído de vácuo refletido no espelho de acoplamento ao invés dos campos intracavidade relativos ao processo de conversão paramétrica, implicando na diluição dos efeitos quânticos desse sistema.

### 3.5 Feixes Gêmeos e Emaranhamento no OPO

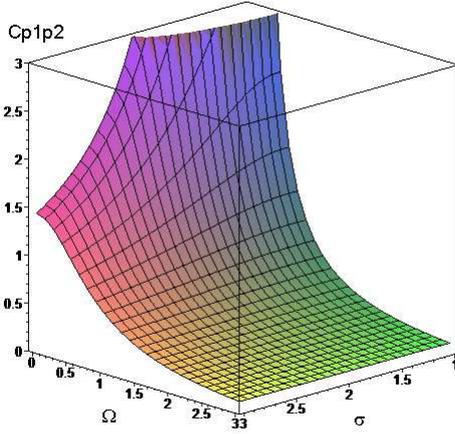
Como vimos na seção anterior, existe uma forte correlação de amplitude e fase entre os feixes sinal e complementar do OPO, assim, outro modo no qual é possível analisar os



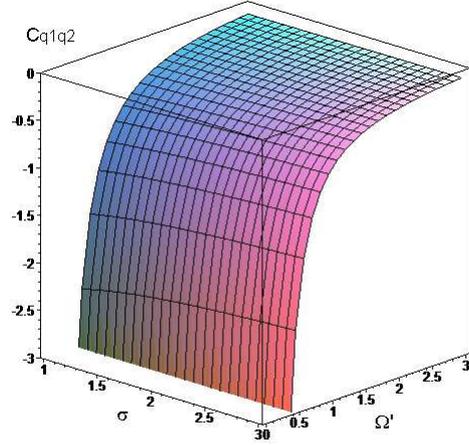
(a) Correlação entre de amplitudes entre bombeio e sinal



(b) Correlação entre de fase entre bombeio e sinal



(c) Correlação entre de amplitudes entre sinal e complementar



(d) Correlação entre de fase entre sinal e complementar

Figura 3.3: Correlações de amplitude e fase entre os feixes do OPO

campo do OPO é fazendo a seguinte transformação linear sobre os feixes,

$$\delta p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta p_1 \pm \delta p_2), \quad \delta q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta q_1 \pm \delta q_2). \quad (3.36)$$

Substituindo essas novas variáveis nas equações de Langevin do OPO, perceberemos claramente que as variáveis relativas à subtração das quadraturas serão totalmente desacopladas do restante das variáveis desse sistema, de forma que ao invés de termos um sistema de equações  $6 \times 6$ , teremos dois sistemas de equações diferenciais, um  $2 \times 2$  que envolve o ruído da subtração dos campos e outro  $4 \times 4$  que envolve o ruído da soma dos feixes sinal e complementar mais o ruído do campo de bombeio, essa análise das quadra-

turas dos feixes do OPO é feita em diversas referências, e pode ser vista em detalhes em duas teses de doutorado do nosso grupo [11, 13].

O espectro de ruído para esses novo espaço de variáveis dinâmicas se relaciona com o espectro de ruído dos feixes sinal e complementar por,

$$S_{p\pm} = \frac{1}{2}[S_{p1} + S_{p2} \pm 2C_{p1p2}], \quad S_{q\pm} = \frac{1}{2}[S_{q1} + S_{q2} \pm 2C_{q1q2}] \quad (3.37)$$

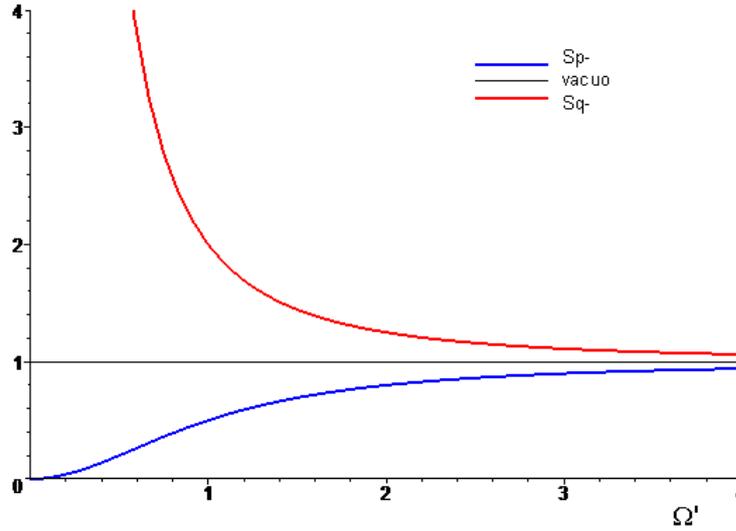


Figura 3.4: Espectro de ruído de  $\hat{p}_-$  e  $\hat{q}_-$ , as perdas e dessintonias foram consideradas nulas.

Para o espaço da subtração dos feixes gêmeos, mesmo para dessintonias não nulas, não é muito complicado de se calcular diretamente o espectro de ruído de amplitude e fase como podemos acompanhar na referência [11], com isso segue que

$$S_{p-} = 1 - \frac{\gamma/\gamma'}{1 + \Omega'^2}, \quad (3.38)$$

$$S_{q-} = 1 + \frac{\gamma/\gamma'}{\Omega'^2} \left( 1 + \frac{\Delta^2}{1 + \Omega'^2} \right). \quad (3.39)$$

Como podemos imaginar pelo próprio processo de conversão paramétrica, a subtração de amplitude dos feixes sinal e complementar deve apresentar compressão de ruído pois esses feixes são criados simultaneamente a partir da destruição de um fóton do bombeio. O fenômeno da compressão de ruído de amplitude no espaço de subtração é um fenômeno bem conhecido na literatura, tendo sido medido por vários grupos desde 1987 [9, 63].

Em uma situação em que a dessintonia da cavidade seja nula e que não exista perdas

espúrias  $\gamma = \gamma'$ , as variáveis dinâmicas  $\hat{p}_-$  e  $\hat{q}_-$  terão incerteza mínima, pois

$$S_{p-} \cdot S_{q-} = 1. \quad (3.40)$$

Já que existe compressão de ruído para a subtração das amplitudes dos feixes gêmeos, pelo princípio da incerteza (3.40) deve existir excesso de ruído na subtração das fases. Tanto a compressão no ruído de amplitude como o excesso de ruído de fase podem ser verificados na figura 3.4.

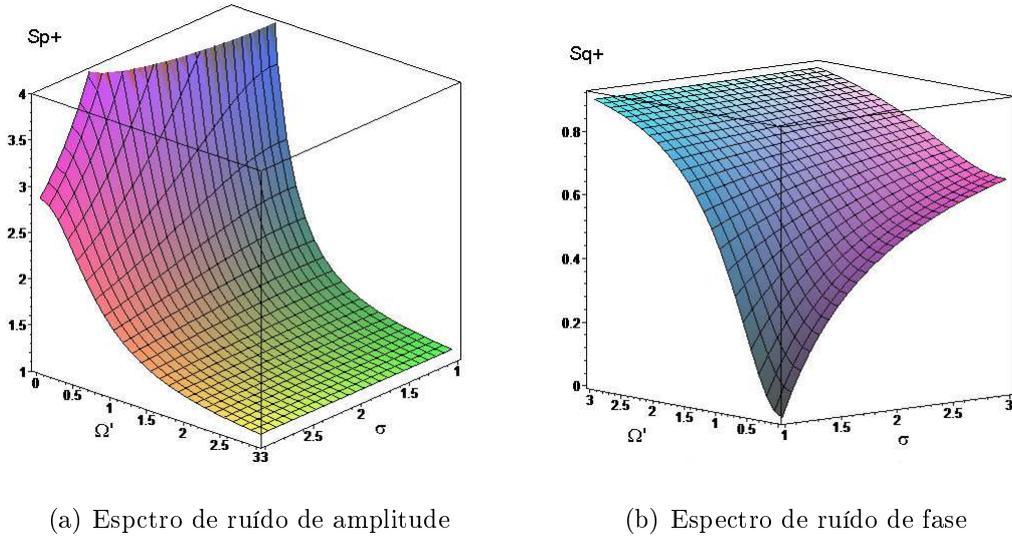


Figura 3.5: Espectro de ruído dos feixes sinal e complementar

Pela figura 3.5, podemos avaliar como é o espectro de ruído no espaço da soma dos feixes sinal e complementar. Como vemos, a soma das amplitudes do feixe apresenta excesso de ruído, como era de se esperar já que existe compressão de ruído no espaço da subtração desses feixes.

É importante observar na figura 3.5(b), que soma do ruído de fase dos feixes sinal e complementar apresenta compressão, isso pode ser entendido quando analisamos a conservação de energia que é dada por  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Com isso, temos que pequenas flutuações da frequência podem ser encaradas como flutuações na fase dos feixes, ou seja,  $\delta\varphi_0 = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$ . Como a soma das fases do sinal e complementar tem uma referência fixa, que tem compressão de ruído, podemos esperar que ela também apresente compressão. Além disso, por essa mesma relação, podemos ver que esses três feixes em conjunto devem apresentar uma forte correlação.

Vimos até aqui que a subtração de amplitude e a soma das fases dos feixes sinal e complementar apresentam compressão de ruído, portanto, usando o critério DGCZ

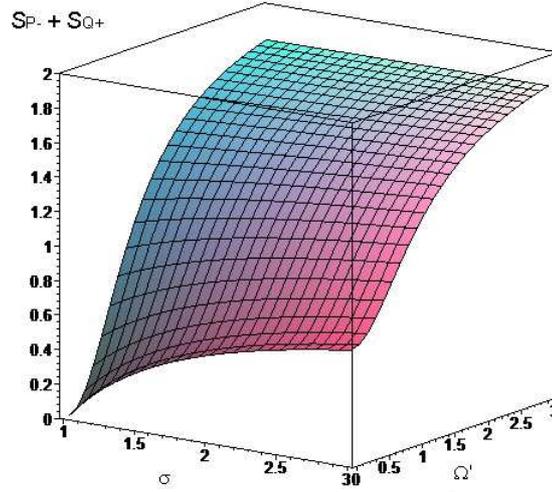


Figura 3.6: Espectro de ruído de fase e amplitude da subtração dos feixes sinal e complementar

podemos verificar que os feixes sinal e complementar são emaranhados, pois teremos que a desigualdade (2.19) reescrita para essas variáveis será violada, ou seja,

$$\Delta^2 \left( \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \right) \leq 2 \quad (3.41)$$

Na figura 3.6, apresentamos o gráfico do membro esquerdo da desigualdade (3.41), confirmando que os feixes sinal e complementar são emaranhados para uma extensa região de parâmetros. Sendo que a violação é máxima quando a frequência de análise  $\Omega' \rightarrow 0$  e para potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma \rightarrow 1$ .

A existência de emaranhamento tripartite entre os feixes do OPO funcionando acima do limiar foi primeiramente proposta por nosso grupo na referência [12]. Usando o critério de soma de variâncias para o caso tripartite encontramos um conjunto de três inequações (2.36)-(2.38) que quando violadas determinam o emaranhamento tripartite genuíno de um sistema, assim para o conjunto de variáveis do OPO esse mesmo sistema pode ser reescrito como,

$$\begin{aligned} V_0 &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2 - \alpha_0 \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2, \\ V_1 &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\alpha_1 \hat{q}_1 + \hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2, \\ V_2 &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_1 + \alpha_2 \hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Os parâmetros  $\alpha_j$  devem ser calculados afim de minimizarmos as equações acima,

fazendo com que essas equações sejam violadas mais facilmente. Com isso, eles são calculados diferenciando essas inequações em relação a  $\alpha_j$  e igualando o resultado a zero, de onde se tem que

$$\alpha_0 = \frac{C_{q_0q_1} + C_{q_0q_2}}{\Delta^2 q_0}, \quad \alpha_1 = \frac{C_{q_0q_1} - C_{q_1q_2}}{\Delta^2 q_2}, \quad \alpha_2 = \frac{C_{q_0q_2} + C_{q_1q_2}}{\Delta^2 q_2}. \quad (3.43)$$

As inequações (3.42) podem ser reescritas de maneira similar a desigualdade do critério DGCZ mais um termo de correção, que é devido à correlação de dois campos a um terceiro,

$$V_0 = \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{\sqrt{2}} \right) - \beta_0 \geq 2; \quad (3.44)$$

$$V_1 = \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) - \beta_1 \geq 2; \quad (3.45)$$

$$V_2 = \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) - \beta_2 \geq 2. \quad (3.46)$$

Os termos de correção são dados por,

$$\beta_0 = \frac{(C_{q_0q_1} + C_{q_0q_2})^2}{2\Delta^2 q_0}, \quad \beta_1 = \frac{(C_{q_0q_1} - C_{q_1q_2})^2}{2\Delta^2 q_2}, \quad \beta_2 = \frac{(C_{q_0q_2} + C_{q_1q_2})^2}{2\Delta^2 q_2}. \quad (3.47)$$

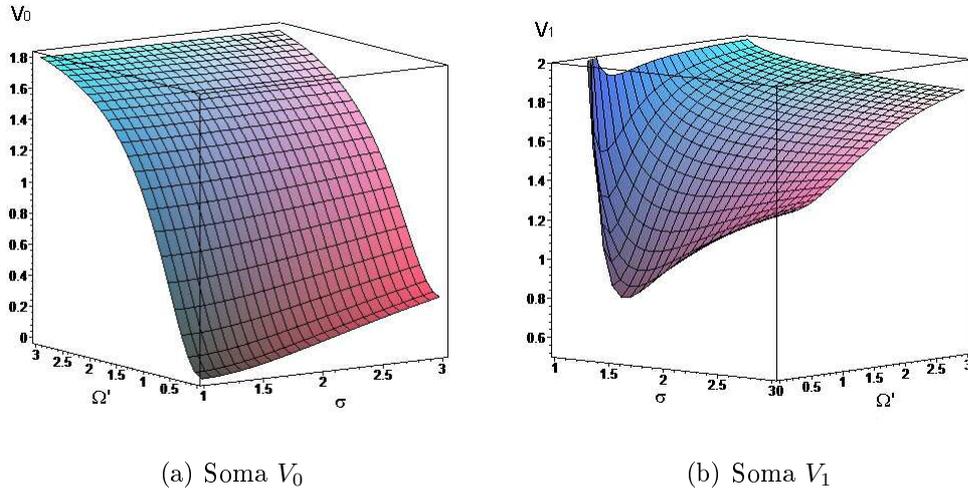


Figura 3.7: Somas  $V_0$  e  $V_1 = V_2$ . O emaranhamento tripartite é demonstrado quando  $V_0 < 2$  e  $V_1 < 2$ .

Como para um OPO ideal o espectro de ruído dos feixes sinal e complementar são iguais, teremos que  $V_1 = V_2$ . Com isso, podemos ver a partir da figura 3.7 que as desigualdades (3.42) são violadas para uma grande região de parâmetros, confirmando a possibilidade da existência do emaranhamento tripartite entre os feixes do OPO [11]. Também devemos reparar que a figura 3.7(a) representa a desigualdade DGCZ para os feixes gêmeos

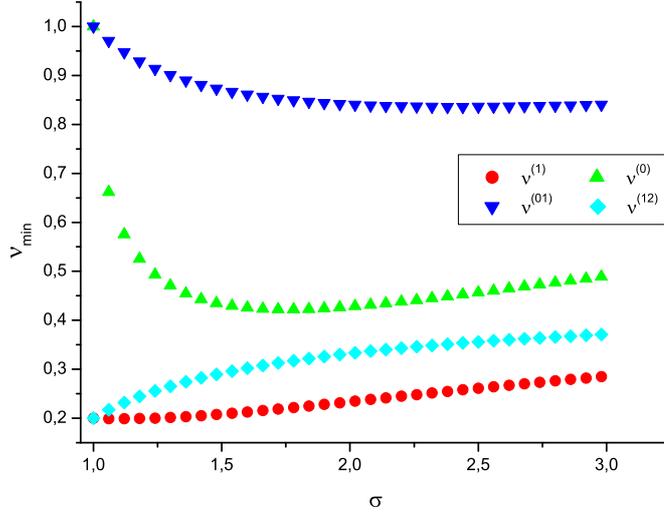


Figura 3.8: Critério PPT para os feixes do OPO em função da potência de limiar para a frequência de análise  $\Omega' = 0.5$ .  $\nu^{(0)}$  e  $\nu^{(1)}$  são os menores auto-valores simpléticos invertendo o sinal da fase dos feixes bombeio e sinal respectivamente na matriz de covariância completa do OPO.  $\nu^{(01)}$  e  $\nu^{(12)}$  são os menores auto-valores simpléticos do critério PPT considerando o sistema separado nas bipartições de bombeio e sinal, e na bipartição sinal e complementar.

do OPO mais um termo de correção devido à fase do feixe de bombeio. A correlação entre o feixe de bombeio e os feixes gêmeos foi medida pela primeira vez pelo nosso grupo, como podemos ver na referência [64].

Além do critério de somas de variâncias, podemos prever a existência de emaranhamento tripartite no OPO usando o critério PPT [13]. Como vimos na seção 2.3, esse critério informa se um determinado sub-sistema está emaranhado ao resto do sistema quando para a transposição parcial<sup>2</sup> desse sub-sistema, o menor auto-valor simplético da matriz de covariância é menor que um. Como o nosso sistema é constituído de três sub-sistemas, para verificarmos o emaranhamento tripartite genuíno, devemos calcular o menor auto-valor simplético sobre a transposição parcial da matriz de covariância para todos os tipos de bipartições  $1 \times 2$  possíveis.

O menor auto-simplético relativo à transposição parcial do modo ( $j$ ) é denominado  $\nu^{(j)}$ , novamente só é necessário o cálculo dos autovalores simpléticos  $\nu^{(0)}$  e  $\nu^{(1)}$ , já que pela simetria do problema  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$ . A partir da figura 3.8, podemos observar que o autovalor  $\nu^{(0)}$  é menor para menores potências de bombeio, enquanto temos o efeito

<sup>2</sup>O termo transposição parcial é mais adequado quando pensamos na matriz densidade do sistema, no entanto, para sistemas contínuos vimos na seção 2.3.1 que essa operação é equivalente a mudança de sinal de um dos termos da quadratura desse sub-sistema na matriz de covariância do sistema total.

contrário quando observamos o autovalor  $\nu^{(1)}$ . Essa dependência entre emaranhamento dos campos em relação a potência de limiar é compatível com o observado nas figuras 3.7 que trata do emaranhamento visto sobre o critério de somas de variâncias.

Além disso, quando separamos o sistema em bipartições e avaliamos os autovalores simpléticos sobre a transposição parcial de um dos campos<sup>3</sup>, mostramos que o sistema ainda apresenta emaranhamento. No entanto, podemos perceber que esses autovalores são maiores que os autovalores quando consideramos o sistema completo, mostrando que, de fato, o sistema sobre essas condições tem um emaranhamento tripartite genuíno.

Experimentalmente, o critério de emaranhamento que envolve a soma de variâncias é mais fácil de ser implementado pois não exige a medida de todos os termos da matriz de covariância, porém, este método fornece uma condição apenas suficiente para a verificação do emaranhamento. Já o critério PPT é necessário e suficiente para a verificação do emaranhamento, fazendo com que sua escolha seja adequada para essa medida, pois esse critério pode ser capaz de mostrar regiões para as quais ainda existe emaranhamento entre os feixes que não são mostradas quando é usado o critério de soma de variâncias.

## 3.6 Excesso de Ruído no OPO

Teoricamente a compressão de ruído no espaço da subtração de amplitude e das somas das fases dos feixes gêmeos foi prevista no ano de 1989 [65], o que levaria ao emaranhamento entre esses feixes. Apesar da medida da compressão de ruído na subtração das amplitudes ter sido demonstrada experimentalmente em anos anteriores a esse artigo [63], a medida da compressão do ruído na soma das fases era desafio experimental.

A medida da compressão na soma do ruído das fases dos feixes gêmeos só foi realizada recentemente pelo nosso grupo [10]. No entanto, foi percebido que havia um excesso de ruído na soma dessas fases, que não era previsto teoricamente, implicando na diminuição da compressão desse ruído [66]. Além dos aspectos técnicos relacionados ao método usado para a medida da fase, provavelmente esse foi um dos principais motivos que impediram a medida do emaranhamento nesses sistemas por tanto tempo [67], e ainda hoje impede a verificação experimental do emaranhamento tripartite entre os feixes do OPO.

Nessa seção, descreveremos um modelo teórico para o excesso de ruído de fase desenvolvido recentemente pelo nosso grupo. Nesse modelo, consideraremos que, apesar

---

<sup>3</sup>No caso em que analisarmos o sub-conjunto do sistema constituído por apenas dois campos a transposição parcial sobre qualquer um dos campos é equivalente.

do cristal ser homogêneo, existem pequenas flutuações no valor do índice de refração do cristal, que provavelmente se devem a presença de fônons gerados por vibrações térmicas na rede cristalina. Para modelarmos esse efeito, escreveremos o excesso de ruído por um vetor de forças estocásticas para fase de cada campo,

$$\delta\vec{Q} = (0, \delta q_0^{ex}, 0, \delta q_1^{ex}, 0, \delta q_2^{ex})^T. \quad (3.48)$$

Foram publicados alguns trabalho acerca do excesso de ruído de fase nos feixes do OPO. Nas referências [68, 69] foi estudado o efeito que um bombeio ruidoso teria sobre os feixes sinal e complementar. Para isso eles consideraram um excesso de ruído constante na fase no bombeio , ou seja,  $\delta q_0^{ex} = \epsilon \delta q_0$ , onde foi assumido que não existe excesso de ruído de fase intrínseco nos campos sinal e complementar  $\Delta q_1^{ex} = \Delta q_2^{ex} = 0$ .

Outra abordagem sobre esse assunto foi feita nas referências [70, 71], onde foi proposto que o excesso de ruído que aparece na soma das fases dos feixes gêmeos ocorreria pelo espalhamento de Brillouin de ondas acústicas guiadas<sup>4</sup>[72], pelo qual um efeito foto-térmico acoplaria o excesso de ruído a partir da absorção do cristal. Nesse caso, o excesso de ruído de fase seria proporcional a amplitude dos modos dos campos intracavidade, além disso, o excesso de ruído para ambos os feixes é perfeitamente correlacionado.

Para entendermos o efeito do excesso de ruído, que é criado no cristal, sobre os modos do OPO, devemos adicioná-lo na equação para o ruído das quadraturas dos campos intracavidade do OPO, portanto, a partir da equação (3.29) teremos,

$$\delta\vec{p} = \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega) \left[ \mathbf{T}_{\mathbf{u}}\delta\vec{u} + \mathbf{T}_{\mathbf{v}}\delta\vec{v} + \delta\vec{Q} \right]. \quad (3.49)$$

Da mesma forma que foi feito em (3.30), teremos que o ruído medido pelos detetores será dado por,

$$\delta\vec{p}_{out} = (\mathbf{T}_{\mathbf{u}}\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)\mathbf{T}_{\mathbf{u}} - \mathbf{I})\delta\vec{u} + \mathbf{T}_{\mathbf{u}}\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)\mathbf{T}_{\mathbf{v}}\delta\vec{v} + \mathbf{T}_{\mathbf{u}}\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)\delta\vec{Q} \quad (3.50)$$

Como vimos na seção 3.4, a matriz de covariância do OPO é escrita como  $\mathbf{V}_{out} = Re [\langle \delta\vec{p}_{out}(\Omega)\delta\vec{p}_{out}(-\Omega)^T \rangle]$ , de forma que a nova matriz de covariância do OPO será dada pela mesma matriz obtida na equação (3.51) mais uma matriz que é devida ao excesso de

---

<sup>4</sup>O espalhamento de Brillouin de ondas acústicas guiadas (Guided Acoustic Wave Brillouin Scattering - GAWBS) , é um efeito relevante em fibras óticas, onde vibrações acústicas podem ser acumuladas devido a grande extensão da fibra

ruído criado no cristal,

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \mathbf{I} + \mathbf{V}_{\text{puro}} + \mathbf{V}_{\text{perdas}} + \mathbf{V}_{\text{ruído}}. \quad (3.51)$$

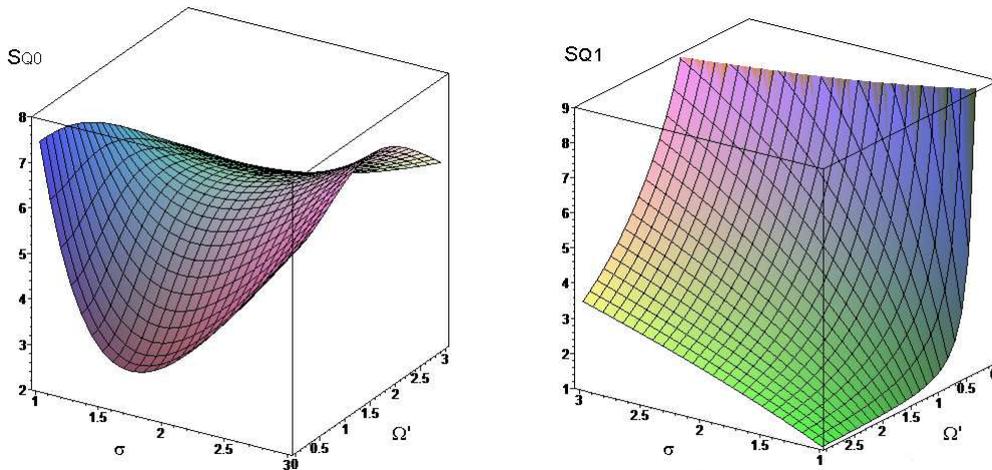
No caso em que existe conversão paramétrica, a matriz  $\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = (-\mathbf{A} + i\tau\Omega)$  é a mesma fornecida na equação (3.28). Porém, quando o OPO não pode oscilar, o cristal ainda insere ruído na fase de qualquer feixe que fique ressonante com a cavidade. Nessa situação, a matriz de arrasto  $\mathbf{A}$  não será a mesma obtida a partir das equações de Langevin do OPO, sendo dada por  $\mathbf{A} = -(\mathbf{T}_{\mathbf{u}}^2 + \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^2)/2$ .

As matriz  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e as matrizes  $\mathbf{V}_{\text{puro}}$  e  $\mathbf{V}_{\text{perdas}}$  têm suas expressões dadas em (3.33) e (3.34) respectivamente, já a expressão para o termo relativo ao excesso de ruído é

$$\mathbf{V}_{\text{ruído}} = \mathbf{T}_{\mathbf{u}}\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega)\mathbf{V}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(-\Omega)]^T \mathbf{T}_{\mathbf{u}}. \quad (3.52)$$

Nessa abordagem, o fenômeno físico responsável pelo excesso de ruído de fase nos feixes do OPO deve ser independente do processo de conversão paramétrica, portanto, se um feixe qualquer, que pode ter comprimento de onda dos feixes de bombeio sinal e complementar, estiver acoplado a cavidade do OPO podemos esperar que a variância da fase desse feixe devido ao excesso de ruído deverá ser proporcional à intensidade desse campo, ou seja,

$$\Delta^2 q_i^{ex} = \eta_i I_i. \quad (3.53)$$



(a) Ruído de fase do campo de bombeio

(b) Ruído de fase do campo sinal

Figura 3.9: Ruído de fase dos campos de bombeio e sinal considerando o excesso de ruído gerado pelo cristal.

Além disso, se acoplarmos dois feixes diferentes na cavidade do OPO a correlação entre eles devido ao excesso de ruído será proporcional à amplitude ou à raiz quadrada da intensidade de cada campo,

$$\langle \delta q_i^{ex} \delta q_j^{ex} \rangle = c_{ij} \sqrt{\eta_i I_i} \sqrt{\eta_j I_j}. \quad (3.54)$$

A constante  $c_{ij}$  presente nos termos de correlação não é necessariamente igual a um, logo a correlação entre as variâncias do excesso de ruído de fase pode não ser perfeita, diferentemente do que foi proposto nas referências [71]. Além disso, como o excesso de ruído entregue para os três feixes deve ser provido pelas mesmas fontes espalhadoras, temos que os termos de correlação entre os feixes devem estar limitados ao intervalo  $-1 \leq c_{ij} \leq 1$ . Sendo a intensidade do campo de bombeio intracavidade constante durante o processo de conversão paramétrica, vemos pelo nosso modelo que é justificada a inserção de um ruído constante sobre a fase do bombeio como foi feito na referência [69].

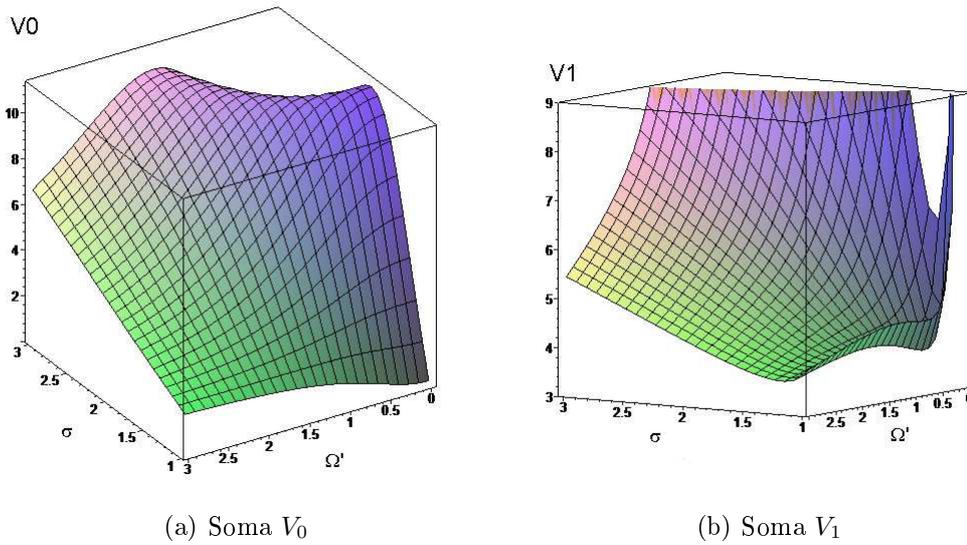


Figura 3.10: Somas  $V_0$  e  $V_1 = V_2$  considerando o excesso de ruído gerado pelo cristal

Nas figuras 3.9 e 3.10 foi considerado que as perdas espúrias eram nulas, e além disso assumimos os valores  $\gamma = 0.02$  e  $\gamma_0 = 0.15$  que são valores compatíveis com as transmissões da cavidade do OPO usadas no nosso experimento, os valores das constantes relativas ao modelo do excesso de ruído são as mesmas que foram medidas em nosso experimento, sendo dadas nas equações (4.1) e (4.2).

Comparando as figuras do ruído de fase dos feixes de bombeio 3.2(b) e sinal 3.2(d) do OPO ideal com os ruídos de fases desses mesmos feixes fornecidos nas figuras 3.9(a) e 3.9(b), que são calculados a partir do nosso modelo do excesso de ruído, percebemos

claramente a ausência da compressão do ruído de fase no feixe de bombeio e a elevação do ruído do sinal.

A figura 3.10 apresenta o comportamento das somas  $V_0$  e  $V_1$ , usadas para a averiguação do emaranhamento no OPO, quando calculadas usando o modelo para o excesso de ruído. Vemos na figura 3.10(a) que a desigualdade  $V_0$  ainda viola o limite de separabilidade, isso se deve ao fato de que essa inequação envolve o termo que mede o emaranhamento bipartite dos feixes sinal e complementar, sendo que a subtração das amplitudes dos feixes gemêos apresenta uma grande compressão de ruído.

No entanto, o percebemos pela figura 3.10(b) que o excesso de ruído nos feixes do OPO é fator limitante para a medida do emaranhamento tripartite, já que a desigualdade  $V_1$  não viola o limite de separabilidade.

No próximo capítulo mostraremos os resultados obtidos em nosso experimento corroborando com o nosso modelo teórico para o excesso de ruído do OPO.



## 4 *Experimento*

### 4.1 Aparato Experimental

Em nosso experimento utilizamos o laser "Diabolo" produzido pela empresa alemã *Innolight GmbH*. Ele consiste de um laser de Nd:YAG que produz, através da geração de segundo harmônico, um feixe principal de 532 nm com 900 mW de potência e largura de linha especificada de 1kHz. Esse laser também disponibiliza um feixe secundário infravermelho com comprimento de onda de 1064 nm e potência de saída de 250 mW que é muito útil para o alinhamento dos componentes óticos e é usado para a calibração do "shot noise".

O feixe principal passa por uma cavidade de filtro onde grande parte de seu excesso de ruído é filtrado, em seguida o feixe é enviado para o OPO onde ocorre a conversão paramétrica. Com isso, os feixes de 1064 nm criados no OPO são transmitidos pelo espelho de acoplamento enquanto o feixe de bombeio intracavidade é transmitido na direção contrária pelo espelho de entrada. Todos os feixes criados pelo OPO então passam por suas respectivas cavidades de análise onde é feita a rotação da elipse de ruído. Por fim esses feixes são detectados e as foto-correntes geradas são analisadas no computador [11, 13].

#### 4.1.1 Cavidade de filtro

A cavidade de filtro consiste de uma cavidade triangular (em anel) que tem uma largura de banda bem estreita [73], assim da expressão (1.157) vemos que quando a cavidade de filtro está em ressonância com a banda portadora as bandas laterais são refletidas filtrando o excesso de ruído. Esse mesmo tipo de cavidade pode ser usada quando se tem interesse em trabalhar somente com as bandas laterais de um determinado feixe. Um exemplo de onde essa propriedade foi usada pode ser encontrado na referência [70], futuramente o nosso grupo deverá usar esse tipo de cavidade para realizar teletransporte

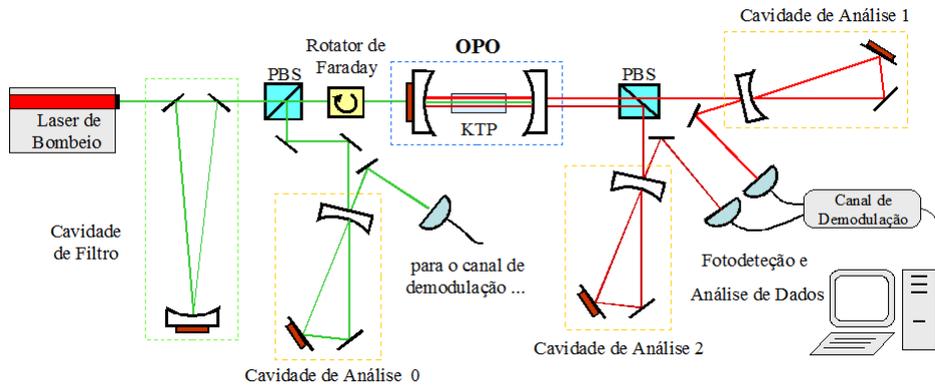


Figura 4.1: Esquema do aparato experimental

usando as bandas laterais dos feixes gerados pelo OPO.

A cavidade de filtro usada na atual montagem tem perímetro  $L = 115\text{cm}$ , possuindo uma finesse  $F = 110$  e largura de banda  $\delta\nu = 2,3(2)\text{MHz}$ , essa cavidade também possui transmissão máxima  $T_{max} = 55\%$  e perdas espúrias iguais a  $0,4(2)\%$ . Ela foi construída numa base rígida de alumínio de forma a torná-la o mais estável possível. O espelho altamente refletor tem raio de curvatura  $r = 1\text{m}$ , e os espelhos de entrada e saída são formados por polarizadores para altas energias fabricados pela empresa *Newport Corporation* (modelo 11B00HP.6), a polarização do feixe de entrada foi ajustada de forma que a transmissão de saída fosse a maior possível, as reflexões do espelho de entrada e saída são respectivamente  $98,8(3)\%$  e  $95,7(3)\%$ . O controle fino do tamanho das cavidades é feito por uma cerâmica piezoelétrica (PZT), que varia de tamanho pela aplicação de uma diferença de potencial, presa a um dos espelhos da cavidade.

Com o uso dessa cavidade conseguimos fazer com que o ruído de amplitude do feixe transmitido pela cavidade ficasse próximo de um estado coerente para frequências de análise superiores a  $15\text{MHz}$  [11], no entanto, vimos que essa cavidade não foi suficiente para filtrar totalmente o ruído de fase. Esse pequeno excesso de ruído não pode ser visto usando o analisador de espectro, sendo somente verificado quando analisamos o ruído de fase do feixe de bombeio filtrado na frequência de análise de  $21\text{MHz}$  que é usada em nossas medidas, como podemos verificar na figura 4.2.

A cavidade de filtro é mantida em ressonância com o laser de bombeio através de um sistema de "Lock-in". Esse sistema consiste de uma modulação ativa de  $200\text{kHz}$  sobre a fase do feixe, que no caso da cavidade de filtro, atua diretamente na eletrônica de controle do laser. Tomamos como referência do feixe intracavidade, o sinal da transmissão do espelho altamente refletor. Esse sinal é então misturado com o mesmo sinal eletrônico

usado para a modulação de fase do feixe criando um sinal de erro que realimenta o PZT que controla o tamanho da cavidade.

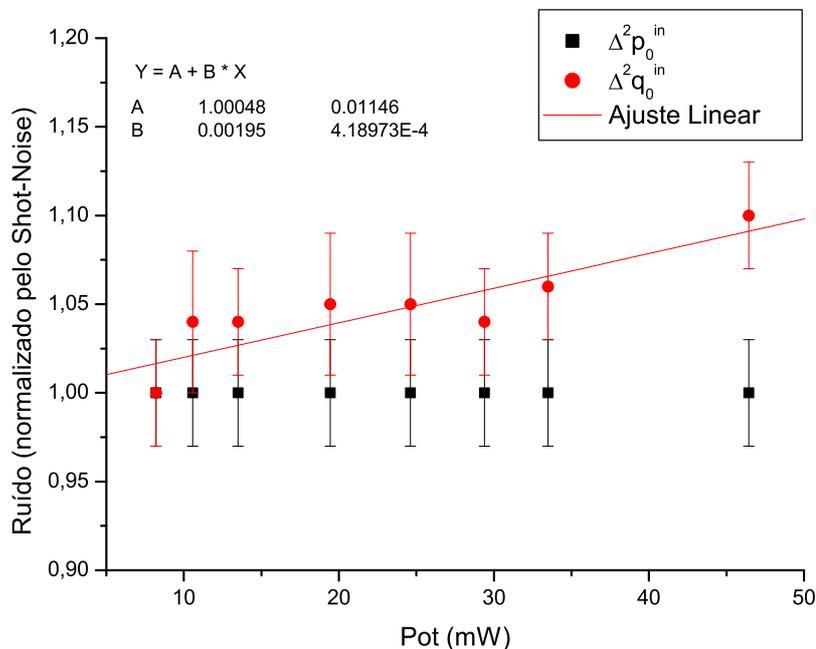


Figura 4.2: Ruído de amplitude e fase do laser de bombeio

Futuramente será necessário a construção de uma cavidade de filtro mais estreita para que o ruído de fase seja totalmente filtrado, e para que seja possível fazer medidas em frequências de análise mais baixas.

Cav. Filtro		
$F = 110$	$\delta\nu_c = 2,3(2)MHz$	$R = 65\%$

#### 4.1.2 OPO

Na atual montagem o OPO é construído numa base de alumínio sem nenhum grau de liberdade, fazendo com que o aparato fique mais robusto contra vibrações mecânicas. O cristal é preso em uma base de cobre onde é possível controlar os graus de liberdade horizontal, vertical e longitudinal, permitindo assim que procuremos a região do cristal de menor potência de limiar. Utilizamos um cristal de KTP de  $12mm$  que é fabricado pela empresa israelense *Raicol Crystals Ltd.*, o mesmo apresenta coating anti-refletor em suas faces para ambos comprimentos de onda com coeficiente de reflexão  $R \sim 0,7\%$  para  $532nm$  e  $R \sim 0,5\%$  para  $1064nm$ , e seu índice de refração médio para os campos do OPO igual

à 1,8(1). Exercemos sobre o cristal um controle ativo de sua temperatura através de um peltier que fica em contato com o suporte de cobre do cristal. O controle de temperatura é essencial para a escolha dos modos ressonantes com a cavidade, tipicamente no processo de conversão paramétrica a temperatura usada é da ordem de  $24^{\circ}C$ , no entanto podemos variar a temperatura a qual submetemos o cristal entre  $15^{\circ}C$  e  $110^{\circ}C$ .

O perímetro da cavidade do OPO sem o cristal é  $L/2 = 27,7mm$ . O espelho de entrada, advindo o Instituto de Pesquisas Espaciais e Nucleares (IPEN), tem raio de curvatura  $r = 50mm$  e coeficiente de reflexão  $R = 70\%$  para  $532nm$ . O espelho de acoplamento também tem raio de curvatura  $r = 50mm$  e tem um coeficiente de reflexão  $R = 96\%$  para  $1064nm$ . Para todos os modos do campo o caminho espectral livre  $\nu_c = 5,2(2)GHz$ , a finesse da cavidade para  $532nm$  é  $F_0 = 16$  e para os modos sinal e complementar são respectivamente  $F_1 = 135$  e  $F_2 = 116$ . Os feixes bombeio e complementar têm a mesma polarização que foi escolhida em nosso aparato para ser vertical, enquanto o feixe sinal terá polarização horizontal. O limiar de oscilador do OPO que está sendo usado na atual montagem é  $P_{lim} = 70mW$

A cavidade do OPO é mantida em ressonância com o feixe de bombeio também através de um sistema de "lock-in". No entanto, a modulação de fase é feita diretamente sobre o PZT que controla o tamanho da cavidade, sendo a referência do feixe tomada a partir de uma reflexão espúria de uma lente usada no aparato.

Cav. OPO		
$F_0 = 16$	$\delta\nu_{c0} = 320(4)MHz$	$R = 70\%$
$F_1 = 135$	$\delta\nu_{c1} = 38,5(2)MHz$	$R = 96\%$
$F_2 = 116$	$\delta\nu_{c2} = 44,8(2)MHz$	$R = 96\%$

### 4.1.3 Cavidades de análise

As cavidades de análise, são os elementos do experimento responsáveis pela rotação da elipse de ruído, elas também são montadas em uma base fixa de alumínio. As cavidades de análise para os feixes em  $1064nm$  são praticamente idênticas, possuindo uma finesse  $F = 130$ , e largura de banda de  $\delta\omega_c = 14(1)MHz$ , as perdas espúrias de cada cavidade estão por volta de 1%. A cavidade de análise para  $532nm$  tem finesse  $F = 110$ , largura de banda de  $\delta\omega_c = 12(1)MHz$  e perdas espúrias em torno de 2%. As reflexões mínimas da cavidade de análise para  $532nm$  é  $R = 58(2)\%$  e para a cavidade de  $1064nm$   $R = 77(1)\%$ .

Durante as medidas as cavidades de análise são varridas em sincronia para que possamos acessar as quadraturas amplitude e fase de todos os feixes concomitantemente,

exceto no caso em que uma ou duas cavidades são deixadas fora de ressonância enquanto somente as outras são varridas. Isso é feito quando se quer medir a correlação entre a flutuação de fase de um feixe com a flutuação de amplitude de outro. Essa varredura é feita aplicando-se uma rampa de voltagem durante 750 ms sobre os PZT's que controlam o tamanho dessas cavidades.

<b>Cav. Análise 1 e 2</b>		
$F = 130$	$\delta\nu_c = 14(1)MHz$	$R = 77(1)\%$

<b>Cav. Análise 0</b>		
$F = 116$	$\delta\nu_c = 12(1)MHz$	$R = 58(2)\%$

#### 4.1.4 Detecção

Os detetores usados em nosso experimento medem a intensidade da luz a partir do efeito foto-elétrico, neles existe um foto-diodo no qual os fótons são convertidos numa corrente elétrica. A corrente que é produzida no foto-diodo é convertida em voltagem por um circuito de amplificação e separada em duas componentes. Uma componente de baixa frequência ou componente DC que incorpora frequências abaixo de algumas centenas de  $kHz$ , e uma componente alta frequência, ou componente HF que incorpora frequências acima de algumas centenas de  $kHz$ . A componente de baixa frequência é proporcional à intensidade média da luz, ou seja, ela é proporcional à intensidade da banda portadora do feixe detectado. Já a componente de alta frequência é proporcional às bandas laterais do feixe mais um ruído eletrônico intrínseco. Em seguida, o sinal HF passa por um filtro ativo que atenua em 40 dB as frequências de  $12MHz$  e  $24MHz$  com largura de banda de  $200kHz$ , para filtrar o excesso de ruído gerado pela eletrônica do "Diabolo" usada para travar a geração de segundo harmônico. A detecção dos feixes gêmeos é feita com o foto-diodos modelo EPITAXX ETX-300 com eficiência de detecção medida de  $95(2)\%$ , enquanto a detecção do feixe verde refletido é feita com os foto-diodos modelo Hamamatsu S5973-02 com eficiência de detecção igual a  $94(2)\%$ .

Para selecionarmos apenas uma frequência  $\Omega = 2\pi\nu$  das bandas laterais, usamos um demodulador onde fazemos o batimento do sinal HF com um sinal senoidal de frequência  $\nu = 21MHz$  produzido por um VCO (Voltage Controlled Oscillator). O sinal resultante são componentes de baixa frequência (menor que  $300kHz$ ) que estavam em torno da frequência  $\nu$ .

Esse sinal é enviado para uma placa da *National Instruments Co.* (modelo BNC-6110) que está conectada a uma placa conversora analógico\digital (A\D) da mesma empresa

(modelo PCI-2110). Por fim, esse sinal é enviado ao computador onde é adquirido a uma taxa de 600kHz tratado pelo programa *Lab View*. As medidas são feitas num intervalo de 750ms totalizando 450 mil pontos por aquisição.

A eficiência total de detecção considerando todas as perdas geradas na propagação do feixe são de  $\eta = 65(3)\%$  para 532 nm e  $\eta = 87(3)\%$  para 1064nm.

<b>Eficiência de detecção 532nm</b>	
$\eta_{det} = 94(2)\%$	$\eta_{total} = 65(3)\%$

<b>Eficiência de detecção 1064nm</b>	
$\eta_{det} = 95(2)\%$	$\eta_{total} = 87(3)\%$

## 4.2 Caracterização Experimental do Excesso de Ruído

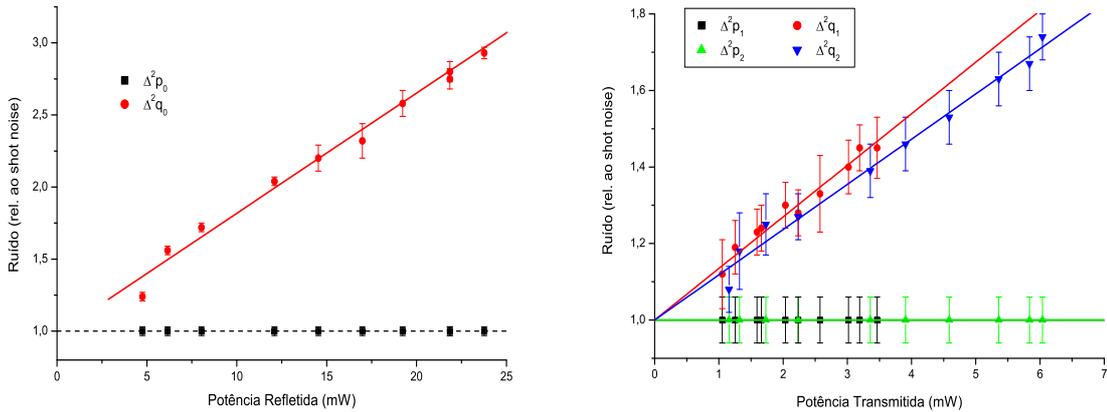
A primeira etapa do experimento que será apresentado nessa dissertação, será a caracterização do excesso de ruído gerado pelo cristal. Relembrando que todas as medidas que medem o ruído para apenas uma componente de frequência foram feitas para a frequência de análise  $\nu = 21MHz$ . Nesse sentido, devemos verificar como o cristal insere ruído sobre os feixes do OPO, sem que esse esteja oscilando.

Para medirmos os termos da matriz  $\mathbf{V}_{\mathbf{Q}}$ , responsável pela introdução do ruído nos feixes do OPO, cada feixe (bombeio, sinal e complementar) será incidido no OPO e mantido em perfeita ressonância com a cavidade. O feixe que sai do OPO será enviado para a cavidade de análise, que é varrida lentamente, possibilitando a medida do ruído de amplitude e fase desse feixe.

O feixe de bombeio, produzido por nosso laser, apresenta um pequeno excesso de ruído de fase, que é praticamente nulo quando comparado ao excesso de ruído de fase que é inserido nesse feixe quando ele está em ressonância com o OPO. O feixe de 1064nm gerado pelo nosso laser é bastante atenuado pelo espelho de entrada da cavidade, tendo o excesso de ruído de amplitude e fase totalmente filtrados, como foi verificado experimentalmente.

Verificamos nas figuras 4.3(a) e 4.3(b) que a variância do ruído de fase  $\Delta^2 q_i$  dos feixes bombeio sinal e complementar cresce linearmente com a intensidade do feixe, em concordância com a equação (3.53) de nosso modelo para o excesso de ruído. O coeficiente dessa equação é obtido a partir do ajuste linear da variância medida para diferentes potências do feixe, assim sendo, os coeficientes medidos para cada um dos feixes são,

$$\eta_0 = 0,53W^{-1}, \quad \eta_1 = 0,15W^{-1}, \quad \eta_2 = 0,14W^{-1}. \quad (4.1)$$



(a) Ruído de amplitude e fase do feixe de bombeio (0) (b) Ruído de amplitude e fase dos feixes sinal (1) e complementar (2)

Figura 4.3: O Ruído de amplitude permanece com o ruído padrão enquanto a variância do ruído de fase cresce linearmente com a potência dos feixes

Os valores das variâncias medidas podem se alterar em 20% com deslocamentos laterais da posição do cristal em relação ao feixe. Podemos notar que o excesso de ruído para os feixes sinal e complementar são aproximadamente os mesmos ( $\eta_1 \cong \eta_2$ ), enquanto a relação desse coeficientes com o coeficiente do excesso de ruído do bombeio é  $\eta_0/\eta_1 = 3,7(5)$ . Notamos ainda, que o cristal não adiciona nenhum ruído sobre as amplitudes dos feixes, fazendo com que o ruído nessa quadratura igual ao ruído padrão.

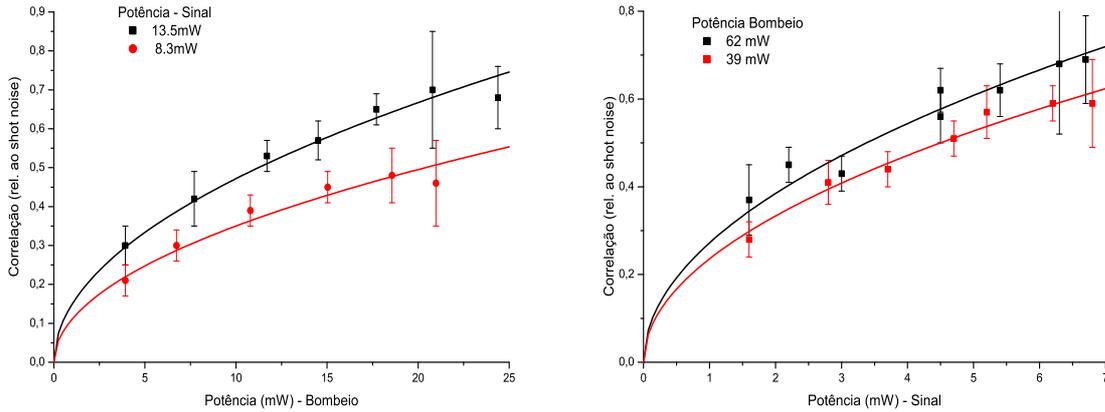
A fim de medirmos as correlações entre o ruído de fase de dois feixes distintos, com um controle cuidadoso da temperatura do cristal, fizemos com que o OPO ficasse em ressonância com apenas dois modos por vez, impedindo assim que o processo de conversão paramétrica pudesse ser estimulado a partir da entrada de uma semente.

Na figura 4.4 vemos que a correlação do excesso de fase entres os feixes depende com a raiz quadrada de suas potências, confirmando a equação (3.54). Os valores dos coeficientes de correlação são obtidos a partir do ajuste das curvas de correlação medidas. As constantes de correlação entre os feixes são,

$$c_{01} = 0,50, \quad c_{02} = 0,55, \quad c_{12} = 0,60. \quad (4.2)$$

Apesar da incerteza sobre essas medidas (em torno de 20%), devido a variação do ruído por deslocamentos laterais do cristal, vemos que os feixes não apresentam correlações perfeitas, diferentemente do que foi proposto na referência [71].

Para melhor caracterizarmos o excesso de ruído inserido pelo cristal, analisamos o



(a) Correlação entre o ruído de fase do bombeio com o ruído de fase do sinal, para dois valores diferentes da potência do bombeio, enquanto se varia o potencia do sinal

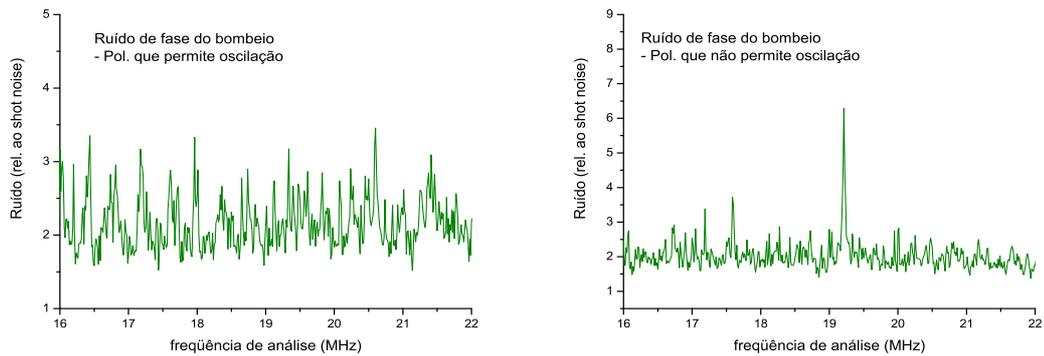
(b) Correlação entre o ruído de fase do bombeio com o ruído de fase do sinal, para dois valores diferentes da potência do bombeio, enquanto se varia o potencia do sinal

Figura 4.4: Correlação entre o ruído de fase e do sinal mostrando a dependência da correlação com a raiz quadrada da potência dos feixes

espectro de ruído do feixe de bombeio refletido pela cavidade, que é deixada em ressonância com ele. Essas medidas foram feitas usando um analisador de espectro, onde resolução de banda escolhida  $RBW = 10kHz$ , com sinal sendo adquirido a uma taxa  $VBW = 1kHz$  e tomando 100 médias para cada aquisição. A potência do feixe de bombeio incidente para todas as medidas apresentadas na figura 4.5 está por volta de  $P_{in} = 55(3)mW$ . Nessa medida, o ruído do feixe de bombeio foi enviado diretamente para o analisador de espectro, passando somente por um circuito de soma, pois o feixe é medido por dois detetores, evitando a saturação dos mesmos.

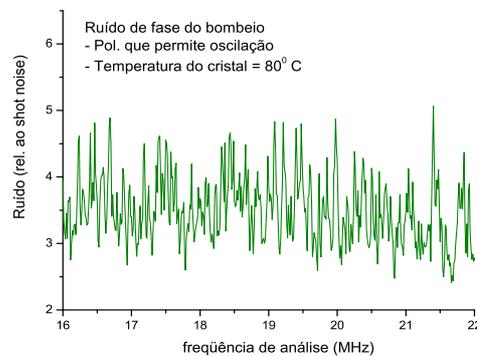
Nas figuras 4.5(a) e 4.5(b) são apresentados os espectros de ruído de fase do feixe de bombeio para a polarização que permite a oscilação do OPO e para a que não permite, respectivamente. Ao contrário do que foi exposto nas referências [14, 13], não vimos nenhuma periodicidade latente no espectro em nenhum dos gráficos, essa medida foi feita para outras posições do cristal, de forma que em nenhuma das nossas medidas tal efeito de periodicidade foi verificado. Uma característica em comum entre esses gráficos e os apresentados nas referências [14, 13] é que na medida relativa a polarização que não permite oscilação 4.5(b), existe um pico de ruído bem acentuado na frequência de análise  $\nu = 19.2(3)MHz$ .

Na figura 4.5(c) apresentamos uma medida do espectro de ruído do feixe de bombeio, na polarização que permite a oscilação, com o cristal mantido a uma temperatura  $T =$



(a) Espectro de ruído de fase do feixe de bombeio na polarização que permite a oscilação do OPO

(b) Espectro de ruído de fase do feixe de bombeio na polarização que não permite a oscilação do OPO



(c) Espectro de ruído de fase do feixe de bombeio na polarização que permite a oscilação do OPO, sendo que o cristal foi submetido a uma temperatura  $T = 80^{\circ}C$ .

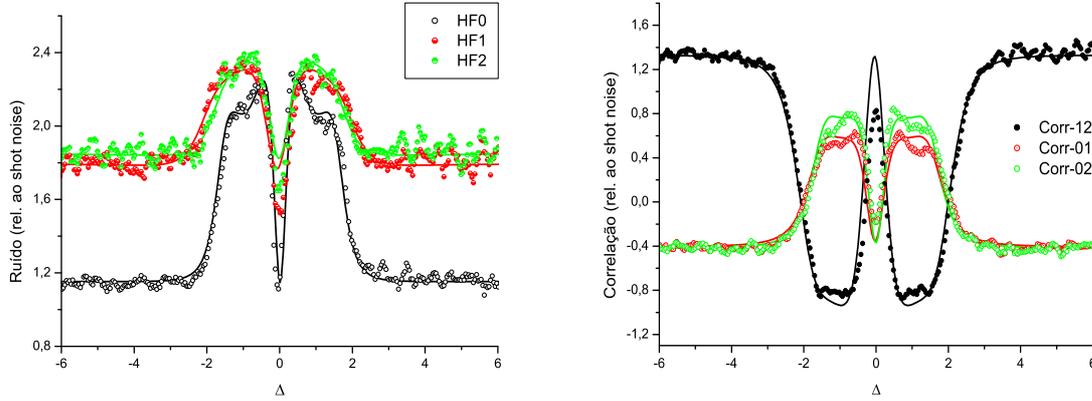
Figura 4.5: Medida do espectro de ruído do feixe de bombeio do OPO com o cristal com a cavidade mantida em ressonância. A potência do campo de entrada é menor do que a potência de limiar, sendo aproximadamente a mesma para os três gráficos

$80^{\circ}C$ , além da disposição dos picos diferirem dos apresentados nas figuras 4.5(a) e 4.5(b), vemos que o nível médio desse ruído é maior que nos outros casos, indicando que o ruído inserido pelo cristal depende de sua temperatura. O estudo da dependência do excesso de ruído inserido pelo cristal com a temperatura será desenvolvido futuramente pelo estudante de mestrado de nosso grupo Antônio Sales Coelho.

Em todas as medidas de espectro de ruído verificamos que o ruído de amplitude do feixe de bombeio era igual ao shot noise.

### 4.3 Excesso de Ruído Durante a Oscilação do OPO

Nessa seção, analisaremos qual é a influência do excesso de ruído sobre os ruídos de amplitude e fase dos feixes do OPO durante o regime de oscilação.



(a) Medida do ruído dos feixes do OPO oscilando, variando a dessintonia da cavidade de análise

(b) Medida da correlação entre os feixes do OPO oscilando, variando a dessintonia da cavidade de análise

Figura 4.6: Gráficos das medidas de ruído e correlação entre os feixes do OPO variando a dessintonia da cavidade de análise, para valores grandes de dessintonia  $|\Delta| > 4$  temos a informação sobre o ruído e correlação de amplitude dos feixes, quando a dessintonia da cavidade é  $|\Delta| = 0,5$  temos a informação sobre o ruído e correlação de fase dos feixes, as linhas que acompanham os valores medidos são ajustes obtidos pela teoria da auto-homodinação dos campos. Medidas obtidas para uma potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma = 1,14$ .

A fim de medirmos os ruídos e correlações de amplitude e fase dos feixes do OPO varremos lentamente as cavidades de análise de todos os feixes concomitantemente. Na figura 4.6 observamos o efeito da varredura das cavidades sobre os feixes do OPO. Para grandes dessintonias,  $|\Delta| > 4$ , a cavidade de análise funciona basicamente como um espelho fazendo com que o feixe incidente seja totalmente refletido. Logo, nessa situação teremos acesso ao ruído e correlações de amplitude dos feixes, quando a dessintonia da cavidade de análise é  $|\Delta| = 0,5$  teremos acesso ao ruído e correlação de fase dos feixes.

Os gráficos apresentados na figura 4.6 correspondem a medidas tomadas a uma potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma = 1,14$ . Nessa figura símbolos circulares representam as medidas tomadas para diferentes valores de dessintonia das cavidades, enquanto as linhas contínuas e tracejadas que acompanham esses pontos são curvas teóricas obtidas usando a teoria da auto-homodinação apresentada na seção 1.10.2, mostrando perfeito acordo entre teoria e experimento. Os valores dos ruídos de amplitude e fase obtidos pela

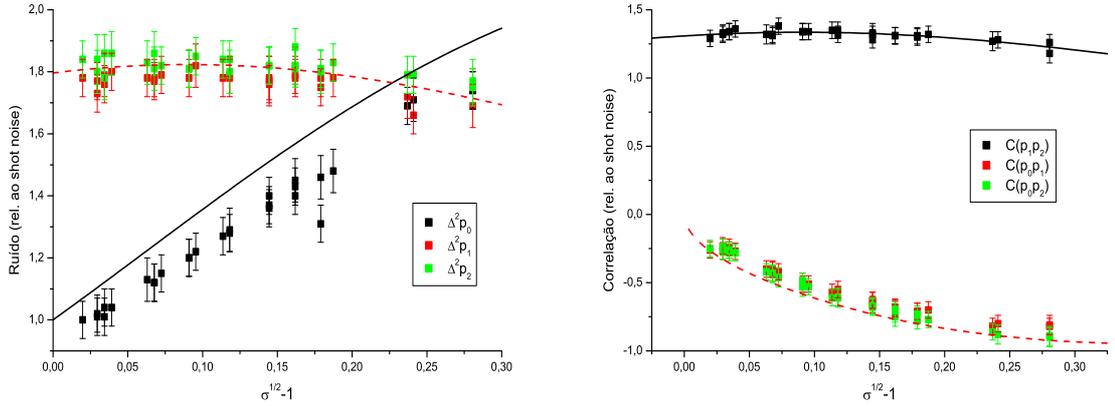
figura 4.6(a) são

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{p}_0 &= 1,12(6), & \Delta^2 \hat{p}_1 &= 1,78(6), & \Delta^2 \hat{p}_2 &= 1,86(7), \\ \Delta^2 \hat{q}_0 &= 2,25(6), & \Delta^2 \hat{q}_1 &= 2,31(6), & \Delta^2 \hat{q}_2 &= 2,34(6). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Já os valores obtidos para as correlações de fase e amplitudes observados na figura 4.6(b) são

$$\begin{aligned} C_{p_0 p_1} &= -0,42(6), & C_{p_0 p_2} &= -0,44(6), & C_{p_1 p_2} &= 1,31(7), \\ C_{q_0 q_1} &= 0,64(7), & C_{q_0 q_2} &= 0,85(7), & C_{q_1 q_2} &= -0,84(6). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Foram feitas medidas dos outros termos da matriz de covariância do OPO relativos às correlações entre amplitude e fase dos feixes,  $C_{piqj}$ , com  $(i, j = 0, 1, 2)$ . Essas medidas confirmaram que todos eram identicamente nulos, como já era esperado pela teoria quando as dessintonias de todos os feixes na cavidade do OPO fossem nulas.



(a) Variâncias dos ruídos de amplitude dos feixes gerados no OPO

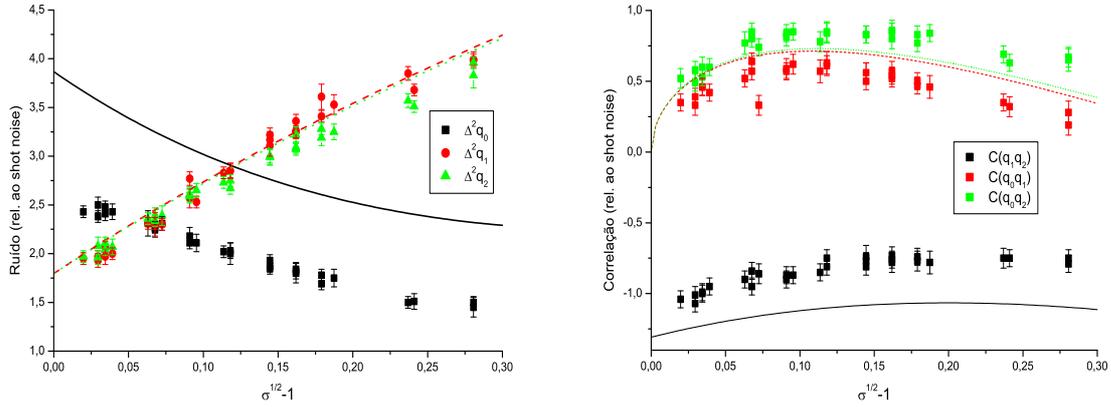
(b) Correlação entre as amplitudes dos feixes gerados no OPO

Figura 4.7: Medidas e ajustes linear para o ruídos e correlações de amplitude do OPO. O ajuste para os feixes gêmeos está em excelente acordo com as medidas, enquanto o ajuste para o ruído de fase apresenta um pouco mais de excesso de ruído do que a medida.

Em nosso modelo, o excesso de ruído de fase dos feixes do OPO não deve exercer nenhuma influência sobre o ruído e correlações de amplitude. Assim sendo, vemos na figura 4.7 uma boa concordância entre a curva teórica e os dados experimentais obtidos para os ruídos e correlações de amplitude dos feixes.

Mais especificamente, vemos que a figura 4.7(b) apresenta um excelente acordo entre a teoria e o experimento, além disso, na figura 4.7(a) vemos que, apesar de apresentar um

pouco mais de ruído, a curva teórica para o ruído de amplitude do bombeio está em bom acordo com a medida, enquanto para os feixes sinal e complementar existe um pequeno desbalanço entre os valores medidos e a teoria, que é devido ao fato de termos considerado que as potências dos feixes gêmeos transmitidas pelo OPO serem exatamente as mesmas.



(a) Variâncias dos ruídos de fase dos feixes do OPO (b) Correlação entre as fases dos feixes do OPO

Figura 4.8: Medidas e ajustes linear para o ruídos e correlações de fase do OPO. O ajuste para as curvas relativas ao bombeio apresentam um bom acordo qualitativo com as medidas, apesar do ajuste apresentar um excesso de ruído ainda maior que no caso do ajuste feito para o caso do ruído de amplitude. Já o ruído dos feixes gêmeos ainda apresentam uma boa concordância com o ajuste das curvas para a medida

A teoria usual do OPO já apresentava bons resultados quanto ao ajuste de curvas relativas ao ruído de amplitude dos feixes. No entanto, tentativas anteriores de ajuste para o ruído de fase usando a teoria usual do OPO ou mesmo adicionando um termo de excesso de ruído apenas no ruído do bombeio, como foi proposto na referência [69], não exibiam um bom acordo com as medidas [14, 13, 11].

A figura 4.8 mostra os valores medidos para os ruídos e correlações de fase dos feixes do OPO para vários valores de potência de bombeio relativa ao limiar. Podemos observar nessa figura que existe um ótimo acordo entre o nosso modelo para o excesso de ruído e as medidas. Os valores usados para as constantes de ruído  $\eta_j$  e de correlação  $c_{ij}$  são os valores dados em (4.1) e (4.2) obtidos experimentalmente.

Vemos na figura 4.8(a) que o nosso modelo para o ruído de fase dos feixes gêmeos está em excelente acordo com as medidas, já para o caso do feixe de bombeio o modelo apresenta um pouco mais de ruído do que as medidas. As curvas feitas para as correlações de fase também estão em ótimo acordo com o experimento como podemos verificar na

figura 4.8(b).

Apesar do bom acordo do modelo com os dados obtidos para os feixes sinal e complementar, vimos que o nosso modelo superestima um pouco o valor do ruído de fase do bombeio, por esse motivo trabalhos futuros em nosso grupo deverão estudar o motivo desse desbalanço.

## 4.4 Análise do excesso de ruído sobre o emaranhamento no OPO

Vimos que por muito tempo a medida da compressão de ruído da soma das fases dos feixes gêmeos no OPO acima do limiar não era possível. Atualmente, em nosso laboratório podemos medir valores satisfatórios para compressão desse ruído sem maiores dificuldades, possibilitando a caracterização do emaranhamento desses feixes. Para simplificarmos a notação vamos definir as seguintes variáveis,

$$\begin{aligned}\Delta^2 \hat{p}_\pm &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right), \\ \Delta^2 \hat{q}_\pm &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_1 \pm \hat{q}_2}{\sqrt{2}} \right), \\ \Delta^2 \hat{q}'_+ &= \Delta^2 \hat{q}_- + \beta_0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Onde o termo  $\beta_0$  corresponde a correção, devido ao ruído de bombeio, na soma das fases dos feixes gêmeos sendo dada na fórmula (3.47)

Na figura 4.9 podemos observar o gráfico da soma e subtração dos ruídos do feixe sinal e complementar. Os círculos em preto e vermelho representam a soma e subtração dos ruídos dos feixes gêmeos respectivamente, enquanto as linhas contínuas são os ajustes feitos para essas medidas. Os valores obtidos para o ruído para a subtração das amplitudes e soma das fases dos feixes gêmeos são  $\Delta^2 \hat{p}_- = 0,48(1)$  e  $\Delta^2 \hat{q}_+ = 0,69(3)$ , portanto temos uma clara violação do critério DGCZ para os feixes sinal e complementar, pois  $\Delta^2 \hat{p}_- + \Delta^2 \hat{q}_+ = 1,17(4) < 2$ . Como já é esperado pelo princípio da incerteza, a soma do ruído de amplitude e a subtração do ruído de fase dos feixes gêmeos apresentam excesso de ruído, sendo seus valores  $\Delta^2 \hat{p}_+ = 3,15(2)$  e  $\Delta^2 \hat{q}_- = 3,06(2)$ .

Atualmente, medidas com esse grau de compressão de ruído na soma das fases dos feixes gêmeos só são obtidas para potências muito próximas a potência de limiar, por exemplo, a medida apresentada na figura 4.9 foi obtida com  $\sigma = 1,04$ , no entanto já foram obtidas medidas com maior compressão de ruído para potências de bombeio um

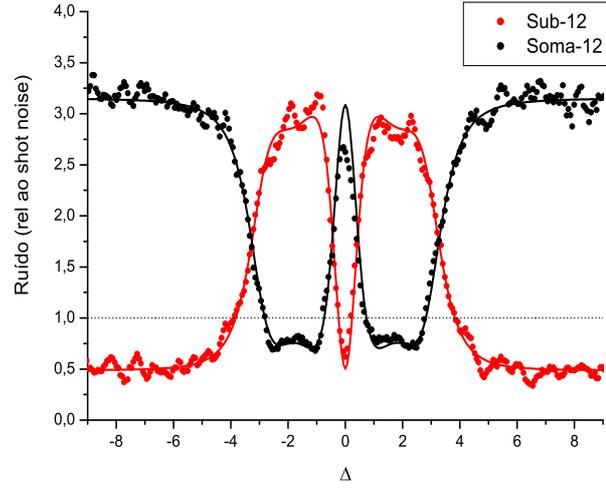


Figura 4.9: Soma e subtração dos feixes sinal e complementar. Medida obtida para uma potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma = 1,04$

pouco mais altas [11].

Desde de sua previsão [12] até hoje, a medida do emaranhamento tripartite entre os feixes do OPO não pôde ser concretizada, sendo o principal motivo para isso o excesso de ruído inserido pelo cristal nas fases dos feixes. Os resultados das primeiras tentativas de medida do emaranhamento tripartite feitas pelo nosso grupo podem ser vistos nas referências [64, 14, 13].

Primeiramente iremos analisar as medidas dos termos das desigualdades (3.46) que podem ser vistas na figura 4.10, os gráficos dessas figuras foram obtidos a partir da mesma medida que teve seus valores de ruído e correlação apresentados na figura 4.6. Para simplificar a análise dos dados e em analogia com (4.5) iremos definir as seguintes variáveis,

$$\begin{aligned}\Delta^2 \hat{p}_{0j} &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_j}{\sqrt{2}} \right), \\ \Delta^2 \hat{q}_{0j} &= \Delta^2 \left( \frac{\hat{q}_j - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right), \\ \Delta^2 \hat{q}'_{0j} &= \Delta^2 \hat{q}_{0j} + \beta_i,\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde  $i, j = 1, 2$  e  $i \neq j$ , sendo que a expressão do termo  $\beta_i$  é encontrada em (3.47).

Nos gráficos 4.10(b) e 4.10(c) os círculos pretos representam a soma dos ruídos dos feixes de bombeio e complementar, e bombeio e sinal respectivamente, enquanto os círculos azuis representam a subtração desses feixes. Na figura 4.10(a) os círculos pretos e azuis

representam a subtração e soma dos ruídos dos feixes sinal e complementar. Em todos os gráficos apresentados na figura 4.10 os círculos vermelhos representam o último termo das desigualdades (3.46) quando tomados em dessintonia  $|\Delta| = 0, 5$ .

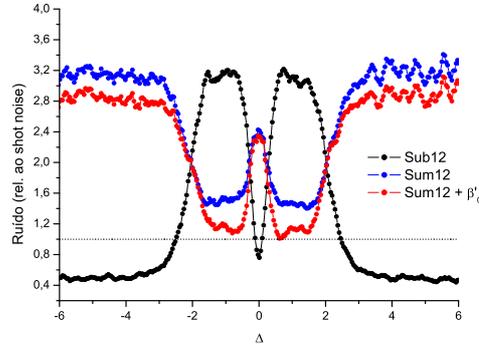
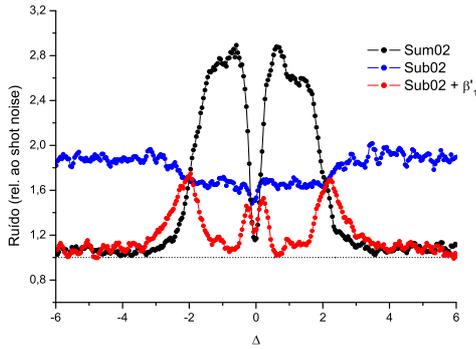
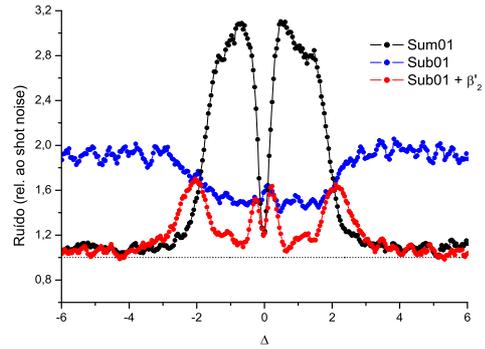
(a) Medidas dos termos da soma  $V_0$ .(b) Medidas dos termos da soma  $V_1$ .(c) Medidas dos termos da soma  $V_2$ .

Figura 4.10: Combinação dos ruídos dos feixes do OPO usados para verificação do emaranhamento pelo critério de somas de variâncias, ( $\sigma = 1, 14$ ).

Usando os termos da matriz de covariância apresentados nas equações (4.3) (4.4) obtivemos os seguintes valores para os termos das desigualdades (3.46)

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 \hat{p}_- &= 0,49(6), & \Delta^2 \hat{p}_{02} &= 1,05(6), & \Delta^2 \hat{p}_{01} &= 1,04(6), \\
 \Delta^2 \hat{q}_+ &= 1,48(6), & \Delta^2 \hat{q}_{02} &= 1,45(7), & \Delta^2 \hat{q}_{01} &= 1,64(6), \\
 \Delta^2 \hat{q}'_+ &= 0,99(6), & \Delta^2 \hat{q}'_{02} &= 0,97(7), & \Delta^2 \hat{q}'_{01} &= 1,03(6), \\
 V_0 &= 1,48(6), & V_1 &= 2,02(6), & V_2 &= 2,06(6).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

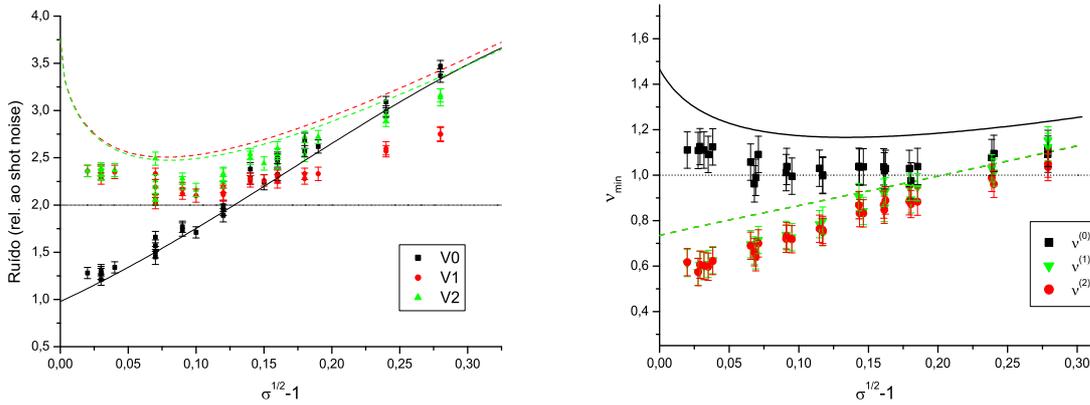
Esses valores diferem um pouco dos apresentados na figura 4.10 pois foram obtidos da análise dos gráficos apresentados na figura 4.6, no entanto, essa diferença é inferior ao erro experimental.

Concluimos pelos gráficos apresentados na figura 4.10 e valores apresentados em (4.7) que excesso de ruído no OPO ainda impossibilita a verificação do emaranhamento tripartite entre os feixes bombeio, sinal e complementar. Pois somente a desigualdade  $V_0$ , que é relacionada à soma e subtração dos feixes sinal e complementar mais um termo de correção do bombeio, viola o limite de separabilidade do critério de somas  $V_0 = 1,28(6) < 2$ , enquanto as duas outras desigualdades têm seus valores próximos ao limite de separabilidade imposto por esse critério, ou seja,  $V_1 \approx V_2 \approx 2$ .

Além do critério da soma de variância podemos avaliar o emaranhamento entre os feixes do OPO usando o critério PPT. Portanto, calculando o menor autovalor simplético para a transposição parcial de cada feixe encontramos o seguinte resultado,

$$\nu^{(0)} = 0,96(8), \quad \nu^{(1)} = 0,67(6), \quad \nu^{(2)} = 0,66(6). \quad (4.8)$$

O critério PPT indica que um feixe está emaranhado com o resto do sistema quando o menor autovalor simplético calculado após a transposição parcial desse sub-espço for menor que um. O critério PPT aplicado sobre os feixes sinal e complementar mostra claramente que esses feixes estão emaranhados ao resto do sistema, pois  $\nu^{(1)} \approx \nu^{(2)} < 1$ . No entanto, para o feixe de bombeio a violação do critério PPT é apenas marginal, o que não garante o emaranhamento desse sistema.



(a) Valores medidos para as somas de  $V_0$ ,  $V_1$  e  $V_2$ . (b) Menores autovalores simpléticos calculados a partir das matrizes de covariâncias medidas para várias potências de Bombeio

Figura 4.11: Medidas para os critérios de emaranhamento entre os feixes do OPO em função da potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma$

As figuras 4.7 e 4.8 para os termos da matriz de covariância e a figura 4.11 para os critérios de emaranhamento estão em função de  $\sqrt{\sigma} - 1$  para facilitar a construção

das curvas teóricas, pois esse termo é proporcional a intensidade dos campos sinal e complementar intracavidade. A medida para a potência de bombeio relativa ao limiar  $\sigma = 1,14$ , para a qual mostramos os termos dos critérios de separabilidade, foi o melhor dado obtido nesse conjunto de aquisições, podendo ser identificado nessas figuras no ponto  $\sqrt{\sigma} - 1 = 0,068$ .

A figura 4.11 mostra a análise do emaranhamento do OPO por dois critérios de emaranhamento para diferentes potências do bombeio incidente. Os pontos dessas figuras representam o cálculo das desigualdades (3.46) no caso da figura 4.11(a), ou os menores auto-valores simpléticos após a transposição parcial de um dos feixes, na figura 4.11(b). As linhas contínuas e pontilhadas apresentadas nessa figura são feitas a partir das funções teóricas obtidas a partir do nosso modelo do OPO com o ruído inserido, apresentando uma boa concordância com os valores medidos.

Percebemos a partir dessa figura, que de fato, falta muito pouco para a comprovação do emaranhamento tripartite genuíno do OPO. Vemos ainda que a curva teórica está em bom acordo com os valores medidos para o emaranhamento dos feixes gêmeos, no entanto, superestima a separabilidade do feixe de bombeio.

Por fim, comparando o resultado obtido na figura 4.11(b) com 4.11(a) vemos que o critério PPT informa o emaranhamento dos feixes gêmeos para potências de bombeio mais altas que no critério de somas de variâncias, implicando que esse sistema possui emaranhamento mesmo para regiões em que não existe compressão de ruído para as variáveis do critério DGCZ.



## *Conclusão e Perspectivas*

Nessa dissertação apresentamos de forma consistente a teoria usual do Oscilador Paramétrico Ótico. Além disso, propusemos um modelo teórico capaz de explicar o excesso de ruído do OPO. Nesse modelo, assumimos que o cristal insere um ruído de fase proporcional à intensidade de cada feixe. A verificação experimental desse fato mostrou que os valores das constantes de proporcionalidade do excesso de ruído inserido para cada feixe são iguais a  $\eta_0 = 0,53W^{-1}$ ,  $\eta_1 = 0,15W^{-1}$  e  $\eta_2 = 0,14W^{-1}$ . Também mostramos que esse excesso de ruído entre os feixes apresentam correlação não perfeita, sendo os coeficientes das correlações entre os mesmos são dados por,  $c_{01} = 0.50$ ,  $c_{02} = 0.55$  e  $c_{12} = 0.60$ .

Mostramos ainda que o espectro de ruído inserido no feixe de bombeio do OPO não apresenta nenhuma periodicidade, como tinha sido visto em medidas realizadas anteriormente em nosso grupo. A partir das medidas do espectro de ruído do feixe de bombeio percebemos que o ruído inserido nos feixes do OPO deve apresentar uma dependência com a temperatura.

Vimos que as curvas teóricas obtidas a partir do nosso modelo do OPO com excesso de ruído inserido apresentam uma excelente concordância com as medidas relativas aos ruído e correlações dos feixes sinal e complementar, e uma boa concordância com esses termos relativos ao feixe de bombeio. No entanto, para esse caso, as curvas teóricas apresentam um pouco mais de excesso de ruído que as medidas, fato esse que deverá ser melhor entendido em um futuro próximo.

A análise de emaranhamento do OPO mostrou que é possível obter boas medidas para a compressão de ruído na soma das fases dos feixes gêmeos, possibilitando a comprovação do emaranhamento bipartite dos mesmos. Contudo, vimos que o ruído de fase inserido pelo cristal ainda hoje impossibilita a medida do emaranhamento tripartite entre os feixes do OPO. Pela análise do emaranhamento do OPO via critério PPT, vimos que é possível se obter emaranhamento entre os feixes do OPO mesmo em condições onde não existe compressão de ruído nas variáveis do critério DGCZ. Nossas melhores medidas típicas mostraram que falta muito pouco para a comprovação do emaranhamento tripartite desse sistema.

Mudanças no aparato experimental objetivando o resfriamento do cristal e melhorias na ótica usadas para a manipulação do feixe de bombeio, além de um melhor entendimento das origens do excesso de ruído criados no cristal, poderão permitir a medida do emaranhamento tripartite dos feixes do OPO.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] GOTTESMAN, D.; CHUANG, I. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, v. 402, p. 390–393, 1999.
- [2] CHOU, C. W. et al. Functional quantum nodes for entanglement distribution over scalable quantum networks. *Science*, v. 316, p. 1316–1320, 2007.
- [3] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [4] BELL, J. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, v. 1, p. 195–200, 1964.
- [5] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 47, p. 777–780, May 1935.
- [6] BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, v. 48, p. 696–702, Oct 1935.
- [7] SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, v. 31, p. 555–563, 1935.
- [8] REID, M. D. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, n. 2, p. 913–923, Jul 1989.
- [9] REYNAUD, S.; FABRE, C.; GIACOBINO, E. Quantum fluctuations in a twomode parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 4, p. 1520, 1987.
- [10] VILLAR, A. S. et al. Generation of bright two-color continuous variable entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 95, n. 24, p. 243603, 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/abstract/PRL/v95/e243603>>.
- [11] VILLAR, A. S. *Emaranhamento Multicolor entre Feixes Intensos de Luz*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://axpfep1.if.usp.br/lmcal/publicacoes.html>>.
- [12] VILLAR, A. S. et al. Direct production of tripartite pump-signal-idler entanglement in the above-threshold optical parametric oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, p. 140504, 2006.
- [13] CASSEMIRO, K. N. *Correlações Quânticas Multicolor no Oscilador Paramétrico Ótico*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008. Disponível em: <<http://axpfep1.if.usp.br/lmcal/publicacoes.html>>.

- [14] CASSEMIRO, K. N. et al. The quest for three-color entanglement: experimental investigation of new multipartite quantum correlations. *Opt. Exp.*, v. 15, n. 26, p. 18236, 2007.
- [15] COHEN-TANNOUJDI, C. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: Wiley–VCH, Vol–1, 2005.
- [16] GARDINER, C. *Quantum Noise*. [S.l.]: Springer–Verlag, 1991.
- [17] PIZA, A. F. R. de T. *Mecânica Quântica*. [S.l.]: edUSP, 2005.
- [18] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1975.
- [19] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 3ed, 1985.
- [20] LOUDON, R. *The Quantum Theory of Light*. [S.l.]: Oxford Science Publications, 3ed, 2000.
- [21] MENDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- [22] MARTINI, F. D.; GIUSEPPE, G. D.; PÁDUA, S. a. Multiparticle quantum superposition and stimulated entanglement by parity selective amplification of entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, n. 15, p. 150401, Sep 2001.
- [23] GLAUBER, R. J. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, v. 130, n. 6, p. 2529–2539, Jun 1963.
- [24] GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, v. 131, n. 6, p. 2766–2788, Sep 1963.
- [25] SCULLY, O. M.; ZUBAIRY, S. M. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge Publisher Press, 1997.
- [26] GOTTIFRIED, K.; YAN, T. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. [S.l.]: Springer–Verlag, 2 ed, 2003.
- [27] VILLAR, A. S. *Estudo de Emaranhamento no Oscilador Paramétrico Ótico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2004. Disponível em: <<http://axpfep1.if.usp.br/lmcal/publicacoes.html>>.
- [28] BARNETT, S. M.; PEGG, D. T. On hermitian optical phase operator. *J. mod. Optics*, v. 36, n. 1, p. 7–19, Jun 1988.
- [29] STOLER, D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, v. 1, n. 12, p. 3217–3219, Jun 1970.
- [30] LOUDON, R.; KNIGHT, P. L. Squeezed light. *J. mod. Optics*, v. 34, n. 6/7, p. 709–759, 1987.
- [31] WALLS, D.; MILBURN, G. *Quantum Optics*. [S.l.]: Springer–Verlag, 1994.
- [32] HONDA, K. et al. Storage and retrieval of a squeezed vacuum. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 093601, 2008.

- [33] MARTINELLI, M. *Compressão de Ruído Quântico e Efeitos Transversos em Osciladores Paramétricos Óticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: <<http://axpfep1.if.usp.br/lmcal/publicacoes.html>>.
- [34] PURI, R. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2001.
- [35] SIMON, R. Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, n. 12, p. 2726–2729, Mar 2000.
- [36] WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, v. 40, n. 5, p. 749–759, Jun 1932.
- [37] SIMON, R.; MUKUNDA, N.; DUTTA, B. Quantum-noise matrix for multimode systems: U(n) invariance, squeezing, and normal forms. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 49, n. 3, p. 1567–1583, Mar 1994.
- [38] ARVIND et al. The real symplectic group in quantum mechanics and optics. *Pramana Jr. of Physics*, v. 45, n. 6, p. 471, 1995. Disponível em: <[arXiv:quant-ph/9509002](http://arXiv:quant-ph/9509002)>.
- [39] SIMON, R.; SUDARSHAN, E. C. G.; MUKUNDA, N. Gaussian-Wigner distributions in quantum mechanics and optics. *Phys. Rev. A*, v. 36, n. 8, p. 3868–3880, Oct 1987.
- [40] GARDINER, C. *Handbook of Stochastic Methods*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1991.
- [41] GALATOLA et al. System control by variation of the squeezing phase. *Opt. Commun.*, v. 95, p. 95, 1991.
- [42] VILLAR, A. The conversion of phase to amplitude fluctuations of a light beam by an optical cavity. *Am. J. Phys.*, 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0805.0528>>.
- [43] DAVIDOVICH, L. Sub-poissonian processes in quantum optics. *Review of Modern Physics*, v. 68, p. 127–173, 1996.
- [44] DELEGLISE, S. et al. Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence. *quant-ph*, 2008. Disponível em: <[arXiv:0809.1064](http://arXiv:0809.1064)>.
- [45] BOHM, D.; AHARONV, Y. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys. Rev.*, v. 108, p. 1070–1076, May 1957.
- [46] CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 23, n. 15, p. 880–884, Oct 1969.
- [47] PERES, A. Unperformed experiments have no results. *Am. J. Phys.*, v. 44, p. 745–747, May 1978.
- [48] ASPECT, A.; DALIBARD, J.; ROGER, G. Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, n. 25, p. 1804–1807, Dec 1982.
- [49] ROWE, M. A. et al. Experimental violation of a Bell’s inequalities with efficient detection. *Nature*, v. 409, p. 791–794, Feb 2002.
- [50] MERMIN, N. D. Quantum mysteries revisited. *Am. J. Phys.*, v. 58, p. 731–734, Aug 1990.

- [51] MERMIN, N. D. Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody. *Am. J. Phys.*, v. 58, p. 731–734, Jan 1981.
- [52] LOOCK, P. van; FURUSAWA, A. Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement. *Phys. Rev. A*, v. 67, p. 052315, 2003.
- [53] PAZ, J. Protecting the quantum world. *Nature*, v. 412, p. 869, 2001.
- [54] ALMEIDA, M. P. et al. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement. *Science*, v. 316, n. 5824, p. 579–582, 2007.
- [55] PERES, A. Separability criterion for densities matrices. *Phys. Rev. Lett.*, v. 77, p. 1413, 1996.
- [56] DUAN, L. M. et al. Inseparability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 2722, 2000. Disponível em: <arXiv:quant-ph/9908056>.
- [57] BOYD, R. W. *Nonlinear Optics*. [S.l.]: Academic Press, 2003.
- [58] SILBERHORN, C.; KOROLKOVA, N.; LEUCHS, G. Quantum key distribution with bright entangled beams. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, n. 16, p. 167902, Apr 2002.
- [59] FURUSAWA, A.; TAKEI, N. Quantum teleportation for continuous variables and related quantum information processing. *Physics Reports*, v. 443, p. 97–119, may 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVP-4N8BMVC-1/2/ae386f65939b3198bb420ec1af3c7085>>.
- [60] DEBUISSCHERT, T. et al. Type-ii continuous-wave optical parametric oscillators: oscillation and frequency-tuning characteristics. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 10, p. 1668, 1993.
- [61] VILLAR, A. S. et al. Entanglement in above threshold in optical parametric oscillator. *JOSA B*, v. 24, p. 249–256, 2007.
- [62] ZHANG, K. S. et al. Generation of bright squeezed light at 1.06  $\mu\text{m}$  using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 64, p. 033815, 2001.
- [63] HEIDMANN, A. et al. Observation of quantum noise reduction on twin laser beams. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 59, n. 22, p. 2555–2557, Nov 1987.
- [64] CASSEMIRO, K. N. et al. Experimental observation of three-color optical quantum correlations. *Opt. Lett.*, v. 32, p. 695, 2007.
- [65] REID, M. D.; DRUMMOND, P. D. Correlations in nondegenerate parametric oscillation: Squeezing in the presence of phase diffusion. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, n. 8, p. 4493–4506, Oct 1989.
- [66] VILLAR, A. S.; MARTINELLI, M.; NUSSENZVEIG, P. Testing the entanglement of intense beams produced by a non-degenerate optical parametric oscillator. *Opt. Comm.*, v. 242, p. 551–562, 2004.

- [67] LAURAT, J. et al. Experimental investigation of amplitude and phase quantum correlations in a type ii optical parametric oscillator above threshold: from nondegenerate to degenerate operation. *Opt. Lett.*, v. 30, p. 1177, 2005.
- [68] WANG, D. et al. Experimental investigation about the influence of pump phase noise on phase-correlation of output optical fields from a non-degenerate parametric oscillator. *EPL*, v. 82, p. 24003, 2008.
- [69] WANG, D. et al. Dependence of quantum correlations of twin beams on the pump finesse of an optical parametric oscillator. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, v. 41, p. 035502, 2008.
- [70] GROSSE, N. B. et al. Observation of entanglement between two light beams spanning an octave in optical frequency. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 243601, 2008.
- [71] GODA, K. et al. Photothermal fluctuations as a fundamental limit to low-frequency squeezing in a degenerate optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 72, p. 043819, 2005.
- [72] SHELBY, R. M.; LEVENSON, M. D.; BAYER, P. W. Guided acoustic-wave brillouin scattering. *Phys. Rev. B*, v. 31, p. 5244, 1985.
- [73] WILLKE, B. et al. Spatial and temporal filtering of a 10-w nd:yag laser with a fabry-perot ring-cavity premode cleaner. *Opt. Lett., OSA*, v. 23, n. 21, p. 1704–1706, 1998.
- [74] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 2ed, 1980.
- [75] ADESSO, G. *Entanglement of Gaussian States*. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Salerno, 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org>>.



## 5 Operações Simpléticas

Uma transformação linear sobre os operadores de quadratura  $\hat{\xi}' = S\hat{\xi}$ , tal que a relação de comutação  $[\hat{\xi}'_i, \hat{\xi}'_j] = i\Omega_{ij}$  continue válida é denominada de transformação simplética [13]. O conjunto de todas as transformações que obedecem essa relação formam um grupo denominado de grupo Simplético  $S_p(2N, \mathfrak{R})$ , esse nome é dado em analogia as transformações simpléticas de sistemas clássicos, que são as transformações que deixam invariantes os parênteses de Poisson [38, 74].

Para um sistema de N-partes as transformações simpléticas podem ser representadas por matrizes  $(2N \times 2N)$ . Além disso, podemos mostrar que uma transformação que pertença ao grupo simplético deve obedecer a seguinte relação,

$$S\Omega S^T = \Omega. \quad (5.1)$$

Grande parte de operações de ótica quântica são transformações simpléticas, como misturas de feixes por *beam-splitters*, criação de fases relativas entre feixes, e até mesmo efeitos não lineares de segunda ordem como conversão paramétrica [13, 75]. De forma que podemos provar que uma matriz de covariância se transforma da seguinte forma sobre a ação de uma operação simplética,

$$V' = S V S^T. \quad (5.2)$$

**Auto-valores Simpléticos e Relação de Incerteza.** Um resultado muito interessante é que existe uma transformação simplética  $S_\omega$  para a qual uma matriz de variância poderá ser decomposta em modos normais. Isto é, a matriz de variância poderá ser reescrita numa forma diagonal cujos autovalores são denominados autovalores simpléticos,

$$V' = S_\omega V S_\omega^T, \quad V' = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Os autovalores simpléticos podem ser calculados a partir dos autovalores da matriz

$$\nu_k = [\text{Autovalores}(\Gamma)]^{1/2}, \quad \Gamma = -(V\Omega)^2. \quad (5.4)$$

Pode-se mostrar que essa forma diagonal da matriz de covariância é invariante sobre transformações simpléticas globais [75, 13]. Um resultado importante é visto quando analisamos o princípio da incerteza como dado em (1.132), para uma matriz escrita em termos de seus autovalores simpléticos,

$$S_\omega(V + i\Omega)S_\omega^T = V' + i\Omega \geq 0. \quad (5.5)$$

Portanto, calculando os autovalores da expressão acima teremos

$$\text{Autovalores}[V' + i\Omega] = \det \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_N \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^N \det(A_k) = 0, \quad (5.6)$$

em que

$$\det(A_k) = \det \begin{pmatrix} \nu_k - \lambda & i \\ -i & \nu_k - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Já que  $\lambda \geq 0$ , isso implica na seguinte condição sobre os autovalores simpléticos,

$$\forall \nu_k \geq 1, \quad (5.8)$$

ou escrito de outra forma,

$$\nu_k^{\min} \geq 1, \quad (5.9)$$

onde  $\nu_k^{\min}$  é o menor autovalor simplético. Concluimos que o menor autovalor simplético de uma matriz de covariância fisicamente aceitável deve obedecer a relação dada em (5.9).