

## Roteiro do Experimento “Força de Atrito Variável” – Parte II

### A) Introdução

Na primeira parte do experimento, determinamos as grandezas físicas relacionadas ao movimento da moeda, inclusive a força resistente ao longo do seu percurso sobre o plano inclinado. Agora, deve estar claro que a trajetória não é uma parábola, porque a força resultante sobre a moeda varia.

Nesta segunda parte, elaboraremos uma equação de movimento, encontraremos sua solução e explicaremos a trajetória observada. Testes de hipóteses teóricas sobre o módulo e a direção da força de resistência permitirão investigar se ela pode ser interpretada como a força de atrito cinético, segundo as leis de Amontons. Os resultados obtidos vão dar base a um modelo teórico para as equações de movimento, com as quais calcularemos as posições  $x$  e  $y$  em função do tempo. Finalmente, o ajuste dos parâmetros do modelo à trajetória experimental e a comparação entre as trajetórias calculada e observada revelará se o modelo é adequado.

### B) Procedimento de análise (Continuação)

As leis de Amontons para o regime de atrito de contato seco, aplicadas a um corpo em movimento, determinam as características vetoriais da força de atrito,  $\vec{f}_{at}$ : sua direção é a mesma da velocidade  $\vec{v}$ , mas com sentido contrário ao deslocamento, e seu módulo é constante. Assim:

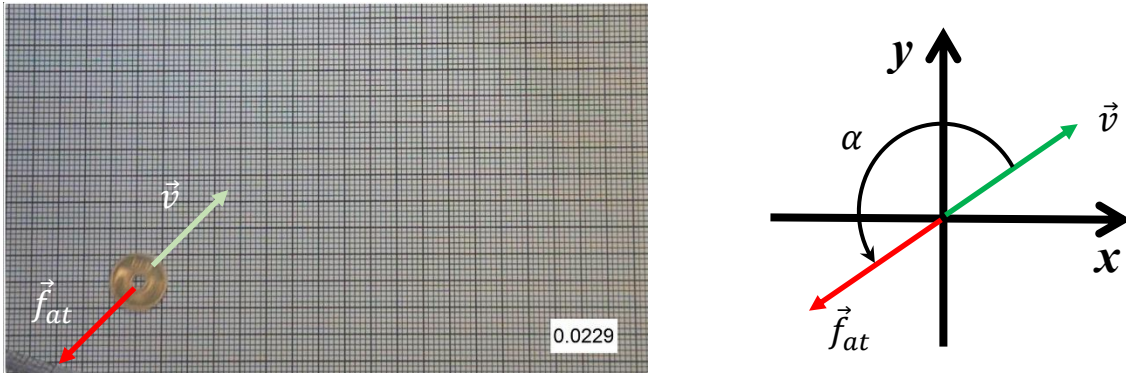
$$\vec{f}_{at} = \mu_c mg \cos \theta \left( -\frac{\vec{v}}{v} \right) \quad (10)$$

em que  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético e  $N = |\vec{N}| = |\vec{P}| \cos \theta = mg \cos \theta$  é o módulo da força normal e  $\theta$  o ângulo de inclinação da superfície em que a moeda desliza em relação a um plano horizontal.

A fim de verificar se essas leis são aplicáveis, a força resistente  $\vec{f}$  será submetida a um teste de hipótese estatística contra a  $\vec{f}_{at}$  da equação (10). O item **B15** descreve uma maneira de investigar se o módulo da força resistente é compatível com um valor constante. Corroborar a oposição entre a força resistente e a velocidade requer um cálculo elaborado, descrito no item **B16**.

**B15. Teste de hipótese I, acerca do módulo da força resistente.** Recupere o gráfico do módulo da força resistente  $f$  em função do tempo, construído na Parte I, e trace uma reta paralela ao eixo dos tempos no valor médio dessa força. Verifique se a distribuição dos pontos em torno do valor médio é consistente com uma força resistente de módulo constante, conforme a eq. (10); o apêndice deste roteiro sugere uma metodologia para realizar essa comparação. Uma vez confirmado que os valores medidos para a força resistente são compatíveis com um valor constante aproximadamente igual ao seu valor médio,  $\bar{f}$ , use este valor médio e os valores conhecidos de  $m$ ,  $g$  e  $\theta$  para determinar uma primeira estimativa  $\mu_e = \bar{f}/(mg \cos \theta)$  para o coeficiente de atrito.

**B16. Teste de hipótese II, acerca da direção da força resistente.** As componentes da velocidade e da força resistente sobre a moeda foram calculadas na Parte I. A Figura 1 mostra uma das imagens, onde os vetores velocidade e força de atrito  $\vec{f}_{at}$  estão representados, e o esboço ao lado dessa imagem mostra o ângulo entre eles, de  $\pi$  radianos segundo a eq. (10). Investigaremos se os valores encontrados para a força resistente  $\vec{f}$  são coerentes com essa expectativa teórica. Para comparar a orientação relativa entre a velocidade e a força resistente medidas ao longo da trajetória – e verificar se tal força pode ser descrita como a de atrito cinético –, é preciso medir o ângulo entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{f}$  usando um critério uniforme.



**Figura 1.** À esquerda, imagem extraída do vídeo, onde as representações dos vetores velocidade e força de atrito esperada estão desenhadas. O esboço à direita indica o ângulo  $\alpha = \pi$  no sentido anti-horário usando a velocidade como origem da coordenada angular. As medições experimentais de  $\alpha$  (entre  $\vec{v}$  e  $\vec{f}$ ) poderão flutuar para mais ou para menos, dadas as variações aleatórias.

Primeiro, verifique que o produto escalar  $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0$  para todos os instantes, significando que  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  e que a orientação relativa é parecida com a que é mostrada à esquerda na Figura 1. Nesse intervalo, o ângulo  $\alpha$  entre os vetores velocidade e a força resistente, como sugerido no esboço à direita da Figura 1, pode ser calculado para todos os instantes recorrendo-se ao produto vetorial entre os vetores velocidade e força resistente<sup>1</sup>:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{v_x f_y - v_y f_x}{vf}\right) \quad (11)$$

onde  $v_x, v_y$  e  $f_x, f_y$  são as projeções da velocidade e da força resistente nas direções Ox e Oy, respectivamente, e

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (3)$$

como definido na Parte I deste roteiro e será usado ao longo deste documento. Visto que  $\sin \theta$  tem o mesmo valor para muitos ângulos  $\theta$  (a correspondência entre seno e ângulo não é 1 para 1), a função seno pode ser invertida apenas se o domínio for restrito, escolhendo-se um ramo da função, conforme explicado no *Apêndice ao Roteiro*, que detalha como trabalhar com a função arco-seno normalmente fornecida nos sistemas computacionais.

Construa o gráfico do ângulo  $\alpha$  em função do tempo e inclua uma linha paralela ao eixo dos tempos no valor esperado  $\alpha = \pi$  rad. Verifique se os pontos do gráfico se distribuem em torno de  $\pi$  rad, em concordância com o comportamento esperado da força de atrito cinético.

**B17. Construindo um modelo.** Caso os testes de hipótese dos itens B15 e B16 corroborem que a força resistente medida é compatível com a força de atrito cinético da eq. (10), é promissor construir um modelo teórico a partir dessas leis e das leis de Newton e prever a trajetória da moeda. Retornando às eqs. (4), (7) e (8), observamos que as forças resultantes nas direções Ox e Oy são, respectivamente, a componente horizontal da força de atrito e a soma das componentes das forças peso e de atrito:

$$\vec{F}_R = f_{at_x} \hat{i} + (f_{at_y} + P_y) \hat{j} \quad (12)$$

<sup>1</sup> Na eq. (11), usamos a projeção com sinal de  $\vec{v} \times \vec{f}$  em um eixo perpendicular ao plano do movimento e a relacionamos ao ângulo  $\alpha$  mostrado na Fig. 1. Calcular o ângulo entre os vetores, que está no intervalo  $[0; \pi]$ , dificultaria verificar se a velocidade e a força resistente são opostas, porque colocaria o valor hipotético do ângulo no extremo desse intervalo. Veja o Apêndice para detalhes.

A equação (10) traz uma expressão que dá conta da direção e da intensidade da força de atrito cinético. Substituindo-a na eq. (12),

$$\vec{F}_R = \left( -\frac{\mu_c mg \cos \theta v_x}{v} \right) \hat{i} + \left( -\frac{\mu_c mg \cos \theta v_y}{v} - mg \sin \theta \right) \hat{j} \quad (13)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton,

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m(a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \quad (14)$$

Finalmente, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu_c g \cos \theta v_x}{v} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu_c g \cos \theta v_y}{v} - g \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

A função horária da velocidade da moeda é a solução dessas equações diferenciais acopladas e não-lineares, que podem ser resolvidas numericamente.

**B18. Calculando a posição ao longo do tempo.** O intervalo de tempo entre imagens sucessivas é suficientemente pequeno para adotarmos que a velocidade é aproximadamente constante e igual à velocidade no começo do intervalo, mas suficientemente grande para tornar a velocidade durante o intervalo seguinte diferente; esta última velocidade pode ser calculada a partir da anterior com a eq. (15). Consulte o guia de *Integração Numérica*, no menu *Guias Auxiliares* na página do MEXI para mais detalhes.

Se  $\Delta t$  é o intervalo entre imagens sucessivas, então

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (16)$$

Das posições e velocidades em  $t = t_n$ , a velocidade em  $t_{n+1}$  é calculada usando  $a_x$  e  $a_y$  da eq. (15):

$$\begin{cases} v_{x(n+1)} = v_{x(n)} + \left( -\frac{\mu_k g \cos \theta v_{x(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}} \right) \Delta t \\ v_{y(n+1)} = v_{y(n)} + \left( -\frac{\mu_k g \cos \theta v_{y(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}} - g \sin \theta \right) \Delta t \end{cases} \quad (17)$$

As posições  $x$  e  $y$  em  $t_{n+1}$  podem ser calculadas como:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_{x(n)} \Delta t \\ y_{n+1} = y_n + v_{y(n)} \Delta t \end{cases} \quad (18)$$

Perceba que em (17) nós expandimos o módulo da velocidade  $v$  em suas componentes, uma vez essas são as grandezas calculadas no processo iterativo de solução da equação de movimento.

Inicie o processo com os primeiros valores de velocidade e posição obtidos na planilha. Para o coeficiente de atrito  $\mu_c$ , comece com a primeira estimativa  $\mu_e$ , determinada no item **B15**. Em seguida, essas novas velocidades e posições calculadas com as eqs. (17) e (18) devem ser introduzidas no membro *direito* dessas equações para computar a velocidade e a posição no instante subsequente; este processo *iterativo* deve ser repetido para todos os instantes  $t_i$  sucessivamente até o último instante de interesse.

**B19. Ajuste dos parâmetros do modelo.** Compare as posições calculadas por integração numérica com aquelas lidas nas imagens. Para facilitar a comparação, sobreponha em um mesmo gráfico os dados experimentais (já plotados no item **B4** da Parte I) e os valores calculados (item **B17**). Se as trajetórias não estiverem próximas, mude ligeiramente (dentro de um ou dois desvios-padrões) *um* dos parâmetros  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  ou  $v_{0y}$  e recalcule a planilha (mudar o valor na célula do parâmetro e pressionar *Enter* deve funcionar se você implementou corretamente as equações na planilha). Comece procurando pelos melhores valores de  $v_{0x}$  ou  $v_{0y}$ , depois tente ajustar  $\mu_c$  e altere  $x_0$  e  $y_0$  apenas quando entender o efeito de mudanças nos outros parâmetros. Normalmente, depois de algumas tentativas que tomarão poucos minutos, você deverá encontrar um conjunto de valores dos parâmetros que fornece uma trajetória compatível com a experimental, embora provavelmente o ajuste não será perfeito.

### C) Procedimento de elaboração do relatório

Escreva um relatório para um público que não conheça nem o experimento nem os procedimentos de análise, mas que possua conhecimentos em Física. Descreva o que foi feito, formule a conclusão e explique como ela foi obtida. Tente ser claro, objetivo e sintético; use suas próprias palavras. Cada grupo deve entregar um único relatório, com as seguintes seções:

**C6. Identificação:** liste os nomes dos membros do grupo e identifique o conjunto de dados analisado.

**C7. Introdução:** explique os objetivos do experimento e como eles foram investigados.

**C8. Descrição Experimental:** com suas próprias palavras, descreva sucintamente o arranjo experimental, mencionando os componentes e suas características.

**C9. Resultados Obtidos:** apresente os resultados numéricos dos itens **B15** e **B16**, na forma de tabelas e gráficos. Verifique se expressou os valores das grandezas em unidades apropriadas e com o número adequado de algarismos significativos, bem como se inseriu barras de incerteza em todos os gráficos.

**C10. Análise de Dados.** Resuma as razões pelas quais os gráficos do item anterior validaram ou não as hipóteses I e II testadas e como a interpretação estatística dos dados contribuiu para a conclusão. Apresente em um mesmo sistema de eixos os gráficos das trajetórias medida e calculada na primeira tentativa (com as estimativas iniciais do item **B18**), informando os valores iniciais de  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  usados nesse cálculo. Depois, plote em um mesmo sistema de eixos os gráficos das trajetórias medida e calculada com os parâmetros ajustados segundo o item **B19**, e informe os melhores valores encontrados para  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$ . **Não inclua** os dados brutos nem os extraídos da análise inicial do conjunto de imagens, uma vez que estes já foram apresentados na síntese da Parte I.

**C11. Discussão.** Com base nos testes efetuados nos itens **B15** e **B16**, justifique como e por que você considerou válidas as hipóteses acerca da força resistente. Aponte eventuais discrepâncias entre as trajetórias medida e calculada, apresentadas no item **C10**, e sugira possíveis causas para as diferenças observadas. Comente se os valores ajustados de  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  são compatíveis com os valores medidos e, caso encontre discrepâncias,

indique as prováveis razões para isso. Explique como a trajetória da moeda seria alterada se os seguintes parâmetros sofressem variações:

- a. ângulo de inclinação do plano;
- b. ângulo de lançamento da moeda;
- c. coeficiente de atrito entre a moeda e a superfície do plano;
- d. módulo da velocidade inicial da moeda;
- e. massa da moeda;
- f. aceleração da gravidade,  $g$ .

**C12. Conclusão.** Retome a introdução, atente para o objetivo do experimento e comente se ele foi alcançado plenamente, parcialmente ou não. *Sugestão:* volte aos itens **C5** (Parte I) e **C11** (Parte II) e comente como as hipóteses teóricas sobre as leis de Amontons foram testadas e como a aplicação de um modelo teórico para prever a trajetória permite um aprofundamento no estudo da mecânica de um corpo sujeito a uma força variável.