

Roteiro do experimento “Modos Normais” – Parte II

A) Introdução ao experimento

Nesta segunda parte da análise, vamos ajustar os parâmetros da soma de modos normais aos valores das posições encontradas de um dos carrinhos e ver se conseguimos prever o movimento do outro.

B) Procedimento de ajuste

B1. Vamos fazer a hipótese de que o movimento do carrinho 1 pode ser descrito pela função:

$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t - \phi_1) + B \cos(\omega_2 t - \phi_2) + x_{10} \quad (1)$$

e o movimento do carrinho 2 por:

$$x_2(t) = A \cos(\omega_1 t - \phi_1) - B \cos(\omega_2 t - \phi_2) + x_{20} \quad (2)$$

em que ω_1 e ω_2 são, respectivamente, as frequências alta e baixa encontradas na Parte I da análise. Perceba que os quadros começam no instante $t = 0$ s, que é o momento em que o sistema é liberado para oscilar e, portanto, a velocidade inicial é zero, de modo que as duas fases serão zero, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Como as posições x_1 e x_2 foram medidas em um sistema de referência que não tem origem na posição de equilíbrio dos carrinhos, incluímos nas fórmulas (1) e (2) as constantes x_{10} e x_{20} , que são exatamente essas posições de equilíbrio.

B2. A fim de encontrarmos as constantes A, B, x_{10} , usaremos o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), veja o guia correspondente.

Selecionando o carrinho 1 para ajustar os parâmetros, temos três constantes a estimar, na função (usando a notação do guia do MMQ):

$$y(t) = a_0 f(t) + b_0 g(t) + c_0 h(t) \quad (3)$$

Se compararmos a equação (3) com a equação (1), de modo que $y(t)$ corresponda à posição do carrinho 1 no instante t , identificamos: $f(t) = \cos(\omega_1 t)$, $g(t) = \cos(\omega_2 t)$, $h(t) = 1$, $a_0 = A$, $b_0 = B$ e $c_0 = x_{10}$.

Os valores que serão encontrados por meio do MMQ são estimativas dos valores que queremos encontrar, que chamaremos \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} . Logo, a posição estimada será

$$\hat{y}(t) = \hat{a} \cos(\omega_1 t) + \hat{b} \cos(\omega_2 t) + \hat{c} \quad (4)$$

Agora que identificamos os parâmetros e a minimizar, montamos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sum y_i f(t_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{\sum y_i g(t_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{\sum y_i h(t_i)}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum (f(t_i))^2}{\sigma_i^2} & \frac{\sum f(t_i)g(t_i)}{\sigma_i^2} & \frac{\sum f(t_i)h(t_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{\sum f(t_i)g(t_i)}{\sigma_i^2} & \frac{\sum (g(t_i))^2}{\sigma_i^2} & \frac{\sum g(t_i)h(t_i)}{\sigma_i^2} \\ \frac{\sum f(t_i)h(t_i)}{\sigma_i^2} & \frac{\sum g(t_i)h(t_i)}{\sigma_i^2} & \frac{\sum (h(t_i))^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Chamaremos as matrizes acima de D , M e A , respectivamente. Assim, teremos que a equação (5) pode ser escrita na forma compacta:

$$D = MA \quad (6)$$

Resolvendo o sistema linear a fim de encontrar a matriz A , obtemos

$$A = VD \quad (7)$$

em que

$$V = M^{-1}.$$

B3. O procedimento para inverter e multiplicar matrizes é muito facilitado pela aplicação das funções do Excel. Monte sua matriz M (3×3), selecione células vazias com a mesma quantidade de linhas e colunas que a matriz que deseja inverter, no nosso caso, 3 linhas e 3 colunas, como mostra a Figura 1 abaixo.

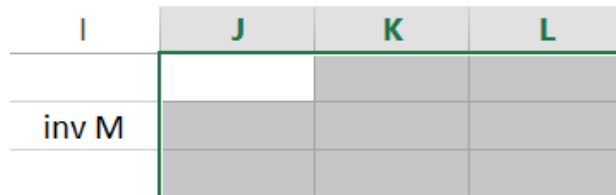


Figura 1: Demonstração de como selecionar as células para inverter matrizes no Excel.

Use a função “=Matriz.Inversa()”, selecionando a matriz 3×3 que deseja inverter. Após selecionar a matriz, aperte (simultaneamente) os botões: Ctrl+Shift+Enter, somente assim a matriz inteira será invertida. No jargão dessa planilha, as fórmulas de matriz são chamadas “fórmulas Ctrl+Shift+Enter” por causa dessa combinação curiosa de teclas de controle que você deve pressionar para fazer o cálculo,

B4. Para multiplicar as duas matrizes e obter a matriz A , selecione as células que serão o resultado da multiplicação, nesse caso, uma matriz 3×1 , parecido com a figura 1, mas com uma única coluna selecionada. Escreva a fórmula “=Matriz.Mult()” e note que ela precisa de dois parâmetros. Depois de incluir o primeiro parâmetro, que deve ser a matriz

inversa V , aperte ; para que seja possível inserir o segundo parâmetro, que é a matriz D .
Aperte Ctrl+Shift+Enter para realizar a operação.

Como foi mencionado anteriormente, os valores encontrados são estimativas dos valores \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} que estamos procurando. Suas incertezas são dadas por:

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{v_{11}} \quad (8)$$

$$\sigma_{\hat{b}} = \sqrt{v_{22}} \quad (9)$$

$$\sigma_{\hat{c}} = \sqrt{v_{33}} \quad (10)$$

B5. Os parâmetros devem ser ajustados aos dados de posição de um carrinho, $x_1(t)$, e usados para determinar a posição do outro, calculando x_{20} a partir de x_{10} a partir da separação entre os dois carrinhos na posição de equilíbrio, $d = x_{20} - x_{10}$, correspondente ao valor medido no experimento que gerou a sua situação. Uma sugestão é usar as abas do Excel para separar os dados das posições de cada carrinho, ou seja, a primeira aba terá os instantes de tempo e as posições do carrinho da esquerda e a segunda aba terá os instantes de tempo e as posições do carrinho da direita. Com isso, você pode ajustar os parâmetros ao movimento de um carrinho e referir-se a eles na outra aba, com as fórmulas necessárias para fazer o gráfico do movimento do outro carrinho.

B6. Monte uma tabela contendo o tempo, as posições dos carrinhos medidas nos quadros e a posição obtida com a função (4) usando os parâmetros ajustados.

B7. Faça um gráfico da tabela do item anterior, comparando experiência e o modelo baseado nos modos normais.

C) Procedimento de elaboração do relatório

C1. *Introdução*: apresente, com suas próprias palavras, uma introdução resumida contendo aspectos teóricos, formulações usadas e informações que achar relevante, assim como os objetivos do experimento.

C2. *Descrição do experimento*: descreva o arranjo experimental de forma sucinta com suas próprias palavras, não deixando de mencionar os principais dispositivos e componentes empregados, assim como suas características.

C3. *Análise de dados e resultados obtidos*: apresente a tabela pedida no item **B6** e o gráfico pedido no item **B7**.

C4. *Conclusão*: volte para a introdução e atente para o objetivo do experimento. Escreva a conclusão se perguntando: “A experiência conseguiu atendê-lo? Por quê?”.