Roteiro do experimento "A Barra que cai" – Os efeitos dos vínculos

A) Introdução ao experimento

Todo objeto em queda livre na proximidade da superfície da Terra tem uma aceleração constante, *g*, quando se pode ignorar a resistência do ar. Este experimento testa se essa propriedade vale, ou não, para uma barra ligada a um suporte por um eixo, de modo que, quando, abandonada à ação da gravidade, ela cai, girando em torno desse eixo. A questão consiste em compreender se girar livremente em torno de um eixo fixo é o mesmo que estar livre.

B) Procedimento de análise

B1. *Modelo*. Assista aos vídeos do experimento e observe o movimento da barra. Reflita e **anote, usando suas palavras** (estas anotações não serão pontuadas, mas elas permitirão verificar sua concepção inicial quando terminar o relatório):

i. No arranjo experimental, localize os vínculos da barra. Como são mantidos ao longo do movimento? Em relação aos elementos do arranjo experimental que constituem os vínculos, identifique quais das suas propriedades são importantes para mantê-los intactos ao longo do movimento. Não deixe de considerar que a barra é um conjunto (enorme) de partículas – por que elas se mantêm unidas?

ii. Crie um *modelo* do sistema de modo que qualquer pessoa possa entender como é montado, o que acontece e por que acontece. Em outras palavras, descreva o arranjo experimental, incluindo os elementos que influem no movimento filmado, bem como as propriedades desses elementos que são importantes para o movimento particular observado, mas não use palavras típicas da física.

iii. Qual o papel de cada um dos vínculos no movimento da barra?

iv. Busque entender o motivo pelo qual, durante a queda, a extremidade da barra ultrapassa a bolinha; tente esboçar uma resposta para esta característica. Pelo que observou no vídeo, você poderia antecipar se a aceleração da barra é constante? Por quê? Seu valor seria **menor, igual ou maior** que *g*? Veja o vídeo da corrente que cai, na aba `Filmes e Quadros`.

v. Construa um *modelo físico* do arranjo experimental, ou seja, escreva um texto que explique como as forças que atuam sobre a barra provocam o movimento observado, sem usar equações, mas incluindo termos como força, torque, momento de inércia, aceleração angular, etc.

É importante se debruçar sobre essas questões, pois permitem estabelecer uma primeira hipótese sobre o modo como esse objeto cai.

B2. *Tomada de dados.* Observe as imagens do conjunto que lhe foi designado. Monte uma tabela com as medidas das posições angulares da linha desenhada na barra, lidas no transferidor, e os tempos, para todas as imagens. Note que o transferidor tem dois rótulos de escala para cada ângulo; use a que está mais longe das marcas, assim os ângulos ficarão na faixa entre 0 e 34º. Não se esqueça de estimar os desvios padrões dos ângulos e usar a quantidade adequada de algarismos significativos; a incerteza no tempo pode ser ignorada.

B3. *Modelo matemático.* Provavelmente o modelo físico do item B1.v atribui ao torque do peso a aceleração angular da barra. Além disso, identifica o eixo de rotação da barra, fixo, de modo que a dificuldade da barra em acelerar depende do seu momento de inércia em relação a esse eixo. A rigidez da barra, junto com o eixo de rotação fixo, determina a relação entre velocidade linear e angular da barra, para todos os pontos da barra.

Usando esses elementos, escreva a equação de movimento da barra em torno do eixo e a relação matemática entre as velocidades angular (uma só para a barra inteira) e linear (diferente para cada ponto da barra). A Figura 1 mostra um esquema do arranjo, onde as letras E, CM e P representam os pontos onde se localizam o eixo de rotação, o centro de massa e a extremidade da barra, respectivamente. H e Q são os pontos da reta horizontal que passa por E e estão alinhados verticalmente com CM e P, respectivamente. A Tabela 1 traz os valores das grandezas físicas necessárias para desenvolver o modelo, mas de todos os valores fornecidos, apenas **a** e **δ** entrarão nos cálculos – as demais grandezas cancelam ao longo do desenvolvimento matemático, ou têm valores que podem ser ignorados nesta análise.

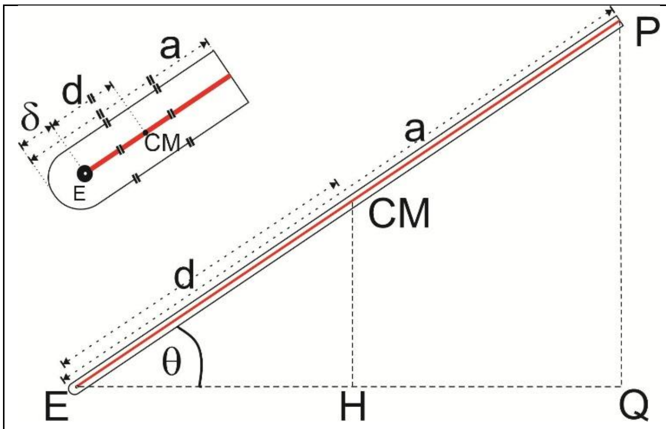

Figura 1. Esquema da barra, fora de escala, identificando a posição dos pontos mencionados no texto. O comprimento é **a,** *e* **d** *é a distância do centro de massa* (CM) *ao eixo* (E)*. O desenho à esquerda em cima da figura detalha a posição do eixo em relação à extremidade da barra.*

Tabela 1. Características do arranjo, mesmo que não sejam necessárias aos cálculos que serão efetuados com o modelo. Nomes das dimensões conforme a Figura 1. As incertezas nestes dados são menores que o algarismo menos significativo listado.

Dimensão	***Valor***
a (comprimento da barra)	55,0 cm
δ (distância eixo-extremidade)	0,63 mm
massa da barra	250 g
largura da barra	0,8 cm
espessura da barra	0,3 cm
diâmetro do eixo	0,21 cm
g, aceleração local da gravidade	979 cm/s^2

B4. *Exploração do movimento*. Assista mais uma vez o vídeo em que a barra e uma bolinha são abandonadas à ação da gravidade no mesmo instante; é aparente que a barra só ultrapassa a bolinha perto do final do movimento, o que sugere que a aceleração no início seja menor que g e no final, maior que g.

Verifique se o modelo do item B3 apresenta essa propriedade, calculando a componente vertical da aceleração da ponta da barra quando ela está nas posições inicial ($\boldsymbol{\theta_0} = 33{,}85°$) e final ($\boldsymbol{\theta_f} = 0°$). Para isso:

i. determine a aceleração angular da barra a partir do torque do peso e do momento de inércia.
ii. com esse valor e a distância da ponta da barra ao eixo, calcule a componente tangente da aceleração da extremidade da barra.
iii. calcule a componente vertical da aceleração tangente da extremidade da barra.

Note que a aceleração centrípeta da extremidade da barra é nula no início do movimento (em $\boldsymbol{\theta_0}$ a velocidade é nula) e tem a direção horizontal quando $\theta = 0°$, por isso ela não contribui para a componente vertical da aceleração nesses dois ângulos – e apenas neles[1].

B5. *Cálculo da posição da barra*. A equação de movimento da barra (assunto do item **B3** e que você usou nos cálculos do item **B4**), deve ter a forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\cos\theta \qquad (1)$$

em que θ é o ângulo da barra com a horizontal, t o tempo, e C é uma expressão algébrica das grandezas a, d e g, cujo valor numérico é constante para este experimento e deve ser calculado a partir dos dados da Tabela 1.

As condições iniciais do movimento, usando ω para representar a velocidade angular da barra, são

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad (2)$$

$$\omega(0) = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_0 = 0 \qquad (3)$$

por que a barra está inicialmente parada no ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$, cujo valor numérico foi dado no item B4.

A equação diferencial da fórmula (1) não tem solução analítica com as funções transcendentes simples (seno, cosseno, exponencial, logaritmo), assim encaminharemos para resolvê-la numericamente. O esquema geral para isso está no Anexo 1; aqui nos limitaremos a montar a planilha para este cálculo específico – leia antes de realizar o cálculo!

Começamos com a definição de um intervalo de tempo pequeno, $\Delta t = 0{,}005$, durante o qual a aceleração e a velocidade são aproximadamente constantes. Monta-se uma planilha como a da figura 2, mas com o valor correto de C – usamos C=30/s^2 somente para ilustrar o procedimento.

[1] Para converter graus em rad no Excel ou Google Sheets, multiplique por “pi( )/180”.

	A	B	C	D
1	Δt (s)	0,005	C (1/s^2)	30,0
2				
3	t (s)	theta (rad)	omega (rad/s)	alfa (rad/s^2)
4	0	0,5917	0,000	-24,90
5	0,005	0,5917	-0,125	-24,90
6	0,01	0,5910	-0,249	-24,91
7	0,015	0,5898	-0,374	-24,93
8	0,02	0,5879	-0,498	-24,96
9	0,025	0,5854	-0,623	-25,00
10	0,03	0,5823	-0,748	-25,06

Figura 2. Imagem de uma parte da planilha que calcula a posição da barra em função do tempo por integração numérica da equação (1). Os únicos valores digitados na planilha são os das células B1, D1, A4, B4 e C4. Nas células D4, A5, B5 e C5 escrevem-se as fórmulas que correspondem ao método de Euler de integração numérica (veja texto), que são copiadas para as células A, B, C e D das linhas que seguem à linha 4.

Os tempos em que a posição será calculada foram escolhidos espaçados igualmente, por um valor $\Delta t = 0{,}005$ s inserido na célula B1. O tempo inicial foi para a célula A4 e a fórmula para os demais tempos ($t_{i+1} = t_i + \Delta t$) na célula A5, = A4 + B1 (ou =A4 + B$1), que muda as linhas adequadamente ao ser copiada para as demais células da coluna A para gerar os valores seguintes.

O ângulo inicial foi digitado na célula B4, e sua mudança após Δt depende da velocidade angular, $\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\, \Delta t$, de modo que a fórmula da célula B5 é = B4 + C4*B1, já na forma para ser copiada para as demais linhas da coluna B.

A velocidade inicial foi digitada na célula C4, e sua mudança após Δt depende da aceleração angular, $\omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i\, \Delta t$ de modo que a fórmula da célula C5 é = C4 + D4*B1, que deve ser propagada para as outras linhas da coluna C

Finalmente, na célula D4 entra a fórmula da aceleração angular dada pela equação (1), $\alpha = -C\cos\theta$: = - D1 * COS(A4), depois copiada para todas as demais células da coluna D.

(**Opcional**: o método do Euler é fácil de programar e entender, mas um exame da planilha deixa evidente um problema: as posições em $t = 0$ e $t = \Delta t$ são iguais, o que não é correto. Uma aproximação melhor consiste em usar a velocidade em $t = \frac{\Delta t}{2}$, que é bem aproximada por $\omega(\Delta t) \cong \frac{1}{2}\alpha(0)\Delta t$ – note que $\alpha(0) \cong \alpha(\Delta t)$, porque a barra está inicialmente parada. Em geral, é sempre melhor aproximar $\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i) + \omega\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)\Delta t$ – essa é exatamente a aproximação que usamos para calcular numericamente a velocidade a partir da posição, basta isolar ω nessa relação. Além disso, esse raciocínio vale também para a estimativa da velocidade a partir da aceleração: $\omega\left(\frac{t_{i+2} + t_{i+1}}{2}\right) = \omega\left(\frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) + \alpha(t_{i+1})\Delta t$. Assim, substituir o valor digitado na célula C4 pela fórmula = 0,5 D4*B1 e a da célula C5 por = C4 + D5*B1 aumenta consideravelmente a precisão. Esse é o método do ponto médio, uma das variações do método de Runge-Kutta, e está muito bem explicado no *Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Capítulo 9, seção 6 - https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_09.html).

B6. *Resultados e comparação com o modelo*. Faça, em um mesmo sistema de eixos, os gráficos dos dados experimentais da posição angular em função do tempo (use pontos) e o dos valores calculados em **B4** (ligue os pontos calculados com uma linha suave). Avalie qualitativamente o grau de similaridade entre o modelo desenvolvido e o arranjo experimental.

B7. *Aceleração da ponta da barra*. Para a análise da aceleração e a comparação com o valor da gravidade local em qualquer instante da queda, é conveniente calcular separadamente as componentes angular e centrípeta da aceleração,

$$\vec{a} = \alpha \cdot r \cdot \hat{\mu}_\theta - \omega^2 \cdot r \cdot \hat{\mu}_r$$

em que $r = d + \frac{a}{2}$ (veja figura), depois projetá-las na direção vertical, usando os vetores unitários radial e tangencial

$$\hat{\mu}_r = \cos(\theta) \cdot \hat{\imath} + \mathrm{sen}(\theta) \cdot \hat{\jmath}$$

$$\hat{\mu}_\theta = -\mathrm{sen}(\theta) \cdot \hat{\imath} + \cos(\theta) \cdot \hat{\jmath}$$

em que $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são os vetores unitários nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Obtém-se que a componente vertical da aceleração da ponta da barra é

$$a_y = r[\alpha \cdot \cos\theta(t) - \omega^2 \cdot \mathrm{sen}\,\theta(t)] \qquad (4)$$

Calcule numericamente, em uma planilha, a aceleração vertical da ponta da barra em função do tempo usando $\theta(t)$ do modelo matemático do item **B4**. Note que, neste experimento, a aceleração angular α que entra nessa fórmula (4) é negativa.

Procedimento de elaboração do relatório

Cada grupo deve entregar um único documento, com as seguintes seções:

C1. *Identificação*. Liste os nomes dos membros do grupo e indique o conjunto de dados analisado.

C2. *Descrição do Experimento*. Descreva o que você observa no vídeo e as componentes do arranjo experimental de forma sucinta, mas de modo que se possa entender do que se trata e como funciona. Para isso, inclua todos os elementos que desempenham um papel no movimento tal como você vê nas imagens, deixando claro como os objetos se vinculam de maneira a resultar no movimento observado, mas não use fórmulas. O foco deve estar nos elementos e nas suas características, em tudo que for importante para construir um arranjo experimental similar. Escreva duas versões da sua descrição, uma sem usar os nomes das grandezas físicas, como você faria para quem não estuda física, e outra, usando nomes como força, torque, inércia, mas sem usar fórmulas, como você precisou *pensar* para escrever as equações necessárias à representação matemática do modelo. Para ajudar, use suas anotações iniciais do item **B1**.

C3. *Dados Obtidos*. Apresente a tabela obtida no item **B2**. Verifique se expressou os valores das grandezas em unidades apropriadas e com número adequado de algarismos significativos. Não se esqueça de mencionar como realizou os cálculos e chegou nos resultados.

C4. *Modelo Matemático*. Justifique porque o movimento não tem aceleração constante e explique porque foi necessário montar toda uma planilha para calcular as posições no tempo.

C5. *Análise de dados*. Apresente o gráfico da posição angular da barra em função do tempo, experimental e calculado (item **B6)**.

C6. *Resultados e discussão.* Discuta se o modelo é compatível com a observação dentro das incertezas experimentais. Você ajustou algum parâmetro aos dados? Discuta o significado do procedimento adotado, tanto se sua reposta foi sim, quanto não.

Comente sobre sua expectativa inicial acerca do valor da aceleração da barra pensada no item **B1**, e se ela é consistente com os resultados obtidos em **B4**. Que propriedades do sistema determinam que a aceleração é (**constante**, **variável**) e (**menor**, **igual**, **maior**) que g? Qual foi o papel do vínculo nesse resultado?

Discuta porque a ponta da barra ultrapassa a bolinha em queda livre.

C7. *Conclusão.* Relate o grau de sucesso do modelo em explicar o movimento, destacando a importância de haver, ou não, ajustado um parâmetro aos dados. Retome a introdução, atente para o objetivo do experimento e comente se ele foi alcançado plenamente, parcialmente ou não, e por quê (você pode retomar suas hipóteses e indagações registradas no item **B1** e verificar se o experimento corroborou ou não tais expectativas iniciais).

ANEXO 1. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Quando uma partícula se move sob influência de forças com resultante constante, sua aceleração também é constante, e podemos encontrar sua velocidade e posição a cada instante a partir de fórmulas bem conhecidas. Considere, porém, uma partícula que se move em um espaço onde a força resultante e, portanto, sua aceleração, dependem da posição e da velocidade. Nesse caso, a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em um instante determinam a posição e a velocidade em um instante seguinte, que por sua vez, determinam a aceleração neste instante. Portanto, todas as três grandezas: posição, velocidade e aceleração do corpo variam *continuamente* no tempo. Uma das formas de resolver numericamente o problema consiste em substituir a variação contínua do tempo por uma sequência de pequenos intervalos de duração Δt. A aproximação mais simples é a que supõe que a aceleração seja *constante* durante cada intervalo, que dá origem ao **método de Euler**. Se o intervalo de tempo for suficientemente pequeno, a variação da aceleração durante o intervalo será pequena e poderá ser desconsiderada.

Sejam x_0, v_{0x} e a_{0x} respectivamente a posição, velocidade e aceleração na direção x da partícula no instante inicial t_0. Quando ignoramos a variação da velocidade durante o intervalo de tempo, a nova posição é dada por:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t \tag{1}$$

De maneira similar, se a aceleração durante Δt for constante, a velocidade no instante $t_1 = t_0 + \Delta t$ será dada por

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}\Delta t \tag{2}$$

Podemos usar os valores de x_1 e v_{1x} para calcular a nova aceleração a_{1x} usando a equação de movimento e depois calcular x_2 e v_{2x} usando x_1, v_{1x} e a_{1x}:

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\Delta t \tag{3}$$

$$v_{2x} = v_{1x} + a_{1x}\Delta t \tag{4}$$

As relações entre a posição e a velocidade nos tempos t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ são dadas por

$$x_{n+1} = x_n + v_{nx}\Delta t \tag{5}$$

$$v_{(n+1)x} = v_{nx} + a_{nx}\Delta t \tag{6}$$

que são generalizações das fórmulas (1) e (2).

Para encontrar a velocidade e a posição em algum tempo t, dividimos, portanto, o intervalo de tempo $t - t_0$ em um grande número de intervalos menores Δt e aplicamos repetidamente as equações (5) e (6), começando no tempo inicial t_0. Isso envolve um grande número de cálculos repetitivos que são realizados mais facilmente em um computador. A técnica de dividir o intervalo de tempo em pequenos trechos e calcular a aceleração, velocidade e posição a cada novo passo usando os valores do passo anterior é chamada de *integração numérica*.

A fim de ilustrar essa técnica, vamos considerar um problema no qual um paraquedista em repouso se larga de uma certa altura, quando ele passa a ser influenciado tanto pela gravidade quanto pela força de arrasto, que é proporcional ao quadrado da rapidez. Encontraremos a velocidade v_y e a distância percorrida y como funções do tempo por meio da integração numérica. A equação que descreve o movimento de um objeto de massa m largado do repouso, quando se ignora o empuxo, é

$$mg - bv^2 = ma_y \tag{7}$$

em que se adotou um referencial Oy orientado no sentido da força da gravidade. A aceleração é, portanto,

$$a_y = g - \frac{b}{m}v^2 \tag{8}$$

É conveniente escrever a constante $\frac{b}{m}$ em termos da rapidez terminal v_T. Colocando $a_y = 0$ na equação (8), obtemos

$$0 = g - \frac{b}{m}v_T^2 \tag{9}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_T^2} \tag{10}$$

Substituindo (10) em (8), fica

$$a_y = g\left(1 - \frac{v^2}{v_T^2}\right) \tag{11}$$

Para resolver numericamente a equação (11), precisamos usar valores numéricos para g e para v_T. Em *Física para cientistas e engenheiros*[1], Paul Tipler sugere que uma rapidez terminal razoável para um paraquedista seja de 60 m/s. Escolhendo-se $y_0 = 0$ para a posição inicial, $v_{0y} = 0$ para a velocidade inicial e $a_{0y} = g = 9{,}81$ m/s² para a aceleração da gravidade, encontra-se a velocidade v_y e a posição y em algum tempo posterior, digamos para um instante de tempo $t = 20$ s, divide-se o intervalo de tempo $0 \le t \le 20$ s em muitos intervalos pequenos Δt e aplicamos as equações (5), (6) e (11). Faz-se isso usando uma planilha eletrônica de cálculo, como mostrado na tabela A.2 abaixo Apêndice, em que escolhemos $\Delta t = 0{,}5$ s e obtivemos os gráficos das **Figuras 1** e **2**. Para $t = 20$ s, teremos os resultados $v = 59{,}9$ m/s e $y = 939{,}9$ m.

Podemos esperar que seja melhor adotar intervalos de tempo muito pequenos, digamos $\Delta t = 0{,}000.000.001$ s. Mas existem pelo menos duas razões para não se adotar intervalos de tempo extremamente pequenos. Primeiro, quanto menor o intervalo de tempo, maior será o número de cálculos necessários e mais tempo o programa levará para rodar. Depois, o computador guarda apenas um número fixo de algarismos em cada passo do cálculo, de forma que em cada passo existe um erro de arredondamento, que vai se acumulando conforme o tempo aumenta. Quanto maior o número de cálculos, mais importante fica o erro de arredondamento. Segundo Tipler[1] , uma boa regra é não usar mais do que cerca de 10^5 intervalos de tempo para cada integração numérica típica.

Tabela A.1: Parâmetros e condições iniciais para cálculo do problema do pára-quedista:

Δt (s)	**y₀** (m)	**v₀** (m/s)	**a₀** (m/s²)	**v_T** (m/s)
0,5	0	0	9,81	60

Tabela A.2: Planilha com cálculos segundo o método numérico de determinação das posições:

t (s)	**y** (m)	**v** (m/s)	**a** (m/s²)
0,0	0,000	0,000	9,810
0,5	0,000	4,905	9,744
1,0	2,453	9,777	9,550
1,5	7,341	14,552	9,233
2,0	14,617	19,168	8,809
2,5	24,201	23,573	8,296
3,0	35,988	27,721	7,716
3,5	49,848	31,579	7,093
4,0	65,637	35,125	6,448
4,5	83,200	38,349	5,802
5,0	102,374	41,250	5,173
5,5	123,000	43,837	4,573
6,0	144,918	46,124	4,013
6,5	167,980	48,130	3,498
7,0	192,045	49,879	3,030
7,5	216,984	51,394	2,612
8,0	242,681	52,700	2,242
8,5	269,031	53,821	1,916
9,0	295,942	54,779	1,633
9,5	323,332	55,596	1,387
10,0	351,129	56,289	1,176
10,5	379,274	56,877	0,995
11,0	407,713	57,375	0,840
11,5	436,400	57,794	0,708
12,0	465,297	58,148	0,596
12,5	494,372	58,447	0,501
13,0	523,595	58,697	0,421
13,5	552,943	58,908	0,354
14,0	582,397	59,085	0,297
14,5	611,940	59,233	0,249
15,0	641,557	59,358	0,209
15,5	671,235	59,462	0,175
16,0	700,967	59,550	0,147
16,5	730,742	59,623	0,123
17,0	760,553	59,685	0,103
17,5	790,395	59,736	0,086
18,0	820,263	59,779	0,072
18,5	850,153	59,815	0,060
19,0	880,060	59,845	0,051
19,5	909,983	59,871	0,042
20,0	939,918	59,892	0,035

Obs. 1: *Este método tem finalidade didática e dá uma boa aproximação em casos simples, como o do movimento de uma moeda num plano inclinado, mas normalmente se usa o método de Runge-Kutta*[2]*, que é acessível ao estudante que entendeu o método de Euler.*

Obs. 2: *A equação* (7) *não leva em conta o ar carregado pelo paraquedas, o que depende da situação analisada e pode não ser uma boa aproximação. Para a solução completa, veja referência [3].*

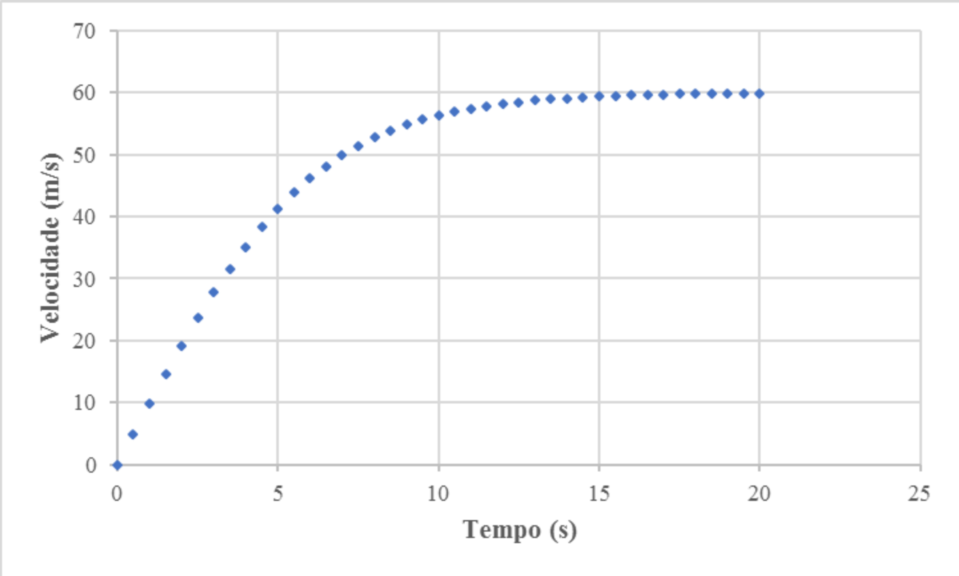

Figura 1. Velocidade adquirida pelo paraquedista em função do tempo, calculado conforme modelo discutido no texto.

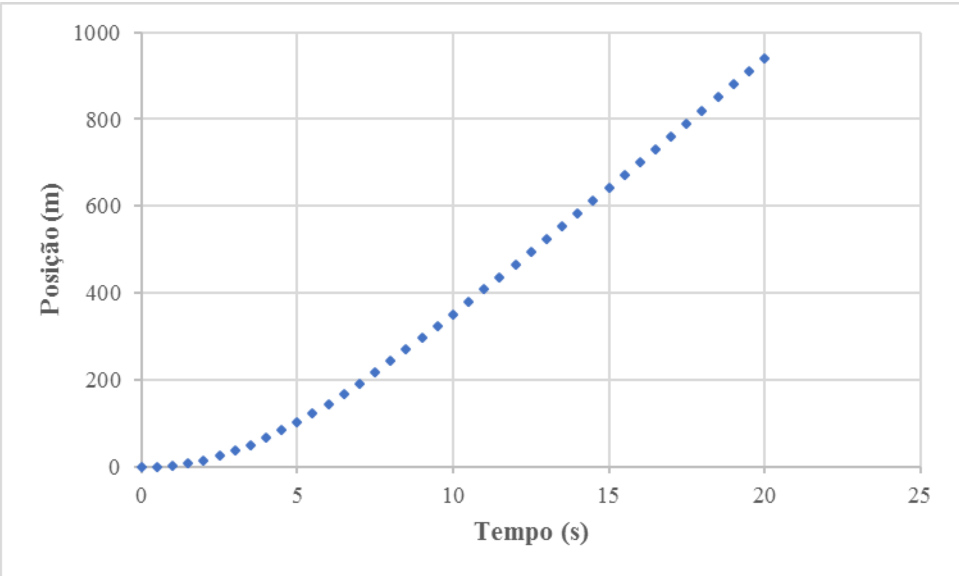

Figura 2. Posição vertical do pára-quedista em função do tempo, calculado conforme modelo discutido no texto.

Referências Bibliográficas

[1] Tipler, Paul A., Mosca, Gene. *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol. 1, 6ª Ed. LTC.
[2] *The Feynman Lectures on Physics*, Vol 1, Cap. 9-6 www.feynmanlectures.caltech.edu/I_09.html
[3] David Auerbach. *The Parachute Paradox*. Am. Journal of Physics, 62 (11) 1041, Nov. 1994.