

Guía del experimento “La Barra que cae” – Los efectos de los vínculos

A) Introducción al experimento

Todos los objetos en caída libre en las proximidades de la superficie de la Tierra tienen una aceleración constante, g , cuando se puede ignorar la resistencia del aire. Este experimento comprueba si esta propiedad es cierta o no para un cuerpo conectado a un soporte por un eje, de manera que cuando se abandona a la acción de la gravedad, cae, girando alrededor de ese eje. La cuestión es entender si girar libremente alrededor de un eje fijo es lo mismo que caer libremente.

B) Procedimiento de análisis

B1. Modelo. Mira los videos del experimento y observa el movimiento de la barra. Reflexiona y descríbelo, **usando tus propias palabras** (estas notas no serán calificadas, pero permitirán comprobar tu concepción inicial cuando termines el informe):

- i. En el aparato experimental, localiza los vínculos de la barra. ¿Cómo se mantienen a lo largo del movimiento? Y ¿qué constituyen esos vínculos? Identifica cuáles de sus propiedades son importantes para mantenerlos intactos durante todo el movimiento. Asegúrate de tener en cuenta que la barra es un conjunto (enorme) de partículas, ¿por qué permanecen juntas?
- ii. Crea un modelo del sistema para que cualquier persona pueda entender cómo se ensambla, qué ocurre y por qué. En otras palabras, describe el aparato experimental, incluyendo los elementos que influyen en el movimiento filmado, así como las propiedades de los elementos que son importantes para el particular movimiento observado, pero sin usar palabras típicas de la física.
- iii. ¿Cuál es el papel de cada uno de los vínculos en el movimiento de la barra?
- iv. Trata de entender por qué, durante la caída, el extremo de la barra se adelanta a la esferita; trata de esbozar una respuesta para este hecho. A partir de lo que observaste en el video, ¿podrías anticipar si la aceleración de la barra es constante? ¿Por qué? ¿Su valor sería **menor, igual o mayor que g** ? Mira el video de la cadena que cae, en la pestaña *Videos e quadros*.
- v. Construye el **modelo físico** del aparato experimental, es decir, escribe un texto que explique cómo las fuerzas que actúan sobre la barra causan el movimiento observado, sin utilizar ecuaciones, pero incluyendo términos como fuerza, torque, momento de inercia, aceleración angular, etc.

Es importante centrarse en estas cuestiones, ya que nos permiten establecer una primera hipótesis sobre la forma en que cae ese objeto.

B2. Toma de datos. Observa las imágenes del conjunto que se te asignó. Mide las posiciones angulares de la línea dibujada en la barra, léida en el transportador, y los tiempos, para cada una de las imágenes. Coloca esos valores en diferentes columnas. Ten en cuenta que el transportador tiene dos valores de escala para cada ángulo; usa el que está más alejado de las marcas, los ángulos léídos deberán estar entre 0 y 34°. No olvides estimar las desviaciones estándar de los ángulos y usar la cantidad adecuada de dígitos significativos; la incertidumbre en el tiempo puede ser ignorada.

B3. Modelo matemático. Probablemente el modelo físico del ítem B1.v atribuye la aceleración angular de la barra al torque del peso. Por otro lado, identificar que el eje de rotación de la barra, que

está fijo, agrega una dificultad para que la barra acelere es importante ya que depende de su momento de inercia en relación con ese eje. La rigidez de la barra, junto con el eje de rotación fijo, determina la relación entre la velocidad lineal y angular de la barra, para todos sus puntos.

Usando esos elementos, escribe la ecuación de movimiento de la barra alrededor del eje y la relación matemática entre la velocidad angular (una para toda la barra) y la velocidad lineal (diferente para cada punto de la barra). La **Figura 1** muestra un esquema de la disposición de los elementos del aparato experimental, donde las letras E, CM y P representan los puntos donde se encuentran el eje de rotación, el centro de masa y el extremo de la barra, respectivamente. H y Q son los puntos de la línea horizontal que pasa por E y están alineados verticalmente con CM y P, respectivamente. En la **Tabla 1** se muestran los valores de las magnitudes físicas necesarias para desarrollar el modelo, pero de todos los valores proporcionados, sólo **a** y δ entrarán en los cálculos – las otras cantidades se cancelan a lo largo del desarrollo matemático, o tienen valores que se pueden ignorar en este análisis.

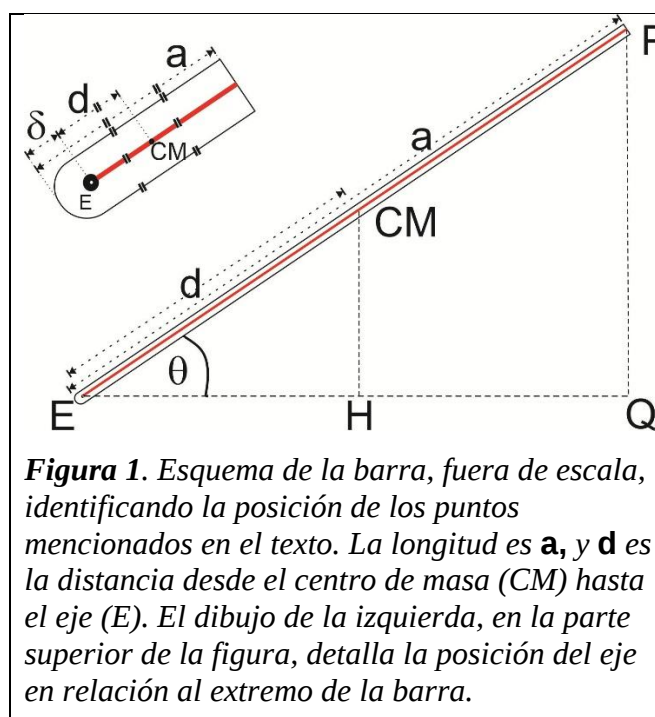


Tabla 1. Características del aparato experimental, aunque algunos no sean necesarios para los cálculos que se realizarán con el modelo. Los nombres y dimensiones se muestran en la Figura 1. Las incertidumbres de estos datos son menores que el dígito menos significativo de la lista.

Dimensión	Valor
a (longitud de la barra)	55,0 cm
δ (distancia eje-extremidad)	0,63 mm
masa de la barra	124 g
ancho de la barra	0,8 cm
espesura de la barra	0,3 cm
diámetro del eje	0,21 cm
g , aceleración local de la gravedad	979 cm/s ²

B4. Explorando el movimiento. Mira una vez más el vídeo en el que la barra y una esfera se abandonan a la acción de la gravedad en el mismo instante; es evidente que la barra solo se adelanta a la esfera cerca del final del movimiento, lo que sugiere que la aceleración al principio es menor que g y al final, mayor que g .

Comprueba si el modelo del ítem **B3** tiene esta propiedad, calculando la componente vertical de la aceleración de la punta de la barra cuando se encuentra en las posiciones inicial ($\theta_0 = 33,85^\circ$) y final ($\theta_f = 0^\circ$). Para eso:

- Determina la aceleración angular de la barra a partir del torque del peso y el momento de inercia.
- Con ese valor y la distancia desde la punta de la barra hasta el eje, calcula la componente tangente de la aceleración del extremo de la barra.

iii. Calcula la componente vertical de la aceleración tangente del extremo de la barra.

Nota que la aceleración centrípeta del extremo de la barra es cero al comienzo del movimiento (en θ_0 la velocidad es nula) y tiene dirección horizontal cuando $\theta = 0^\circ$, es por eso que no contribuye con la componente vertical de la aceleración en estos dos ángulos, y solo en ellos ¹.

B5. Cálculo de la posición de la barra. La ecuación de movimiento de la barra (objeto del ítem **B3** y que se utilizó en los cálculos del ítem **B4**), debe tener la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C \cos \theta \quad (1)$$

donde θ es el ángulo de la barra con la horizontal, t el tiempo, y C es una expresión algébrica de las cantidades a , d y g , cuyo valor numérico es constante para este experimento y debe ser calculado a partir de los valores de la **Tabla 1**.

Las condiciones iniciales del movimiento, usando ω para representar la velocidad angular de la barra, son

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (2)$$

$$\omega(0) = \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_0 = 0 \quad (3)$$

porque la barra está inicialmente parada en el ángulo θ_0 , cuyo valor numérico fue dado en el ítem **B4**.

La ecuación diferencial de la fórmula (1) no tiene solución analítica con las funciones transcendentales simples (seno, coseno, exponencial, logaritmo), así guiaremos para que sea resuelta numéricamente. El esquema general para eso está en el Anexo 1; aquí nos limitaremos a montar la planilla para este cálculo específico – **lee antes de realizar el cálculo!**

Comenzaremos con la definición de un intervalo de tiempo pequeño, $\Delta t = 0,005$, durante el cual la aceleración y la velocidad son aproximadamente constantes. Se monta una planilla como la de la **Figura 2**, pero con el valor correcto de C – usamos $C = 30/s^2$ solamente para ilustrar el procedimiento.

¹ Para convertir grados a rad en el Excel o Hojas de cálculo de Google, multiplica por “pi()/180”.

	A	B	C	D
1	Δt (s)	0,005	C (1/s ²)	30,0
2				
3	t (s)	theta (rad)	omega (rad/s)	alfa (rad/s ²)
4	0	0,5917	0,000	-24,90
5	0,005	0,5917	-0,125	-24,90
6	0,01	0,5910	-0,249	-24,91
7	0,015	0,5898	-0,374	-24,93
8	0,02	0,5879	-0,498	-24,96
9	0,025	0,5854	-0,623	-25,00
10	0,03	0,5823	-0,748	-25,06
11	0,035	0,5786	-0,873	-25,12

Figura 2. Imagen de una parte de la planilla que calcula la posición de la barra en función del tiempo mediante la integración numérica de la ecuación (1). Los únicos valores escritos en la planilla son los de las celdas B1, D1, A4, B4 y C4. En las celdas D4, A5, B5 y C5 se escriben las fórmulas que corresponden al método de integración numérica de Euler (ver texto), las cuales se copian en las celdas A, B, C y D de las filas que siguen a la línea 4.

Los tiempos en que la posición será calculada fueron elegidos equiespaciados, por un valor $\Delta t = 0,005$ s insertado en la celda B1. El tiempo inicial fue para la celda A4 y la fórmula para los demás tiempos ($t_{i+1} = t_i + \Delta t$) en la celda A5, = A4 + \$B\$1 (o =A4 + B\$1), que muda las líneas adecuadamente al ser copiada para las demás celdas de la columna A, que generan los valores siguientes.

El ángulo inicial fue digitado en la celda B4, y su cambio, después de un Δt depende de la velocidad angular, $\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t$, de modo que la fórmula de la celda B5 es = B4 + C4*\$B\$1, ya con la forma para ser copiada para las demás líneas de la columna B.

La velocidad inicial fue digitada en la celda C4, y su cambio después de un Δt depende de la aceleración angular, $\omega_{i+1} = \omega_i + \alpha_i \Delta t$ de manera que la fórmula de la celda C5 es = C4 + D4*\$B\$1, que debe ser propagada para las otras líneas de la columna C.

Finalmente, en la celda D4 entra la fórmula de la aceleración angular dada por la ecuación (1), $\alpha = -C \cos \theta$: = -\$D\$1 * COS(A4), después copiada para todas las demás celdas de la columna D.

(Opcional: el método de Euler es fácil de programar y entender, pero un examen de la planilla deja evidente un problema: las posiciones en $t = 0$ y $t = \Delta t$ son iguales, lo que no es correcto. Una aproximación mejor consiste en usar la velocidad en $t = \frac{\Delta t}{2}$, que resulta mejor aproximada por $\omega(\Delta t) \cong \frac{1}{2} \alpha(0) \Delta t$ – nota que $\alpha(0) \cong \alpha(\Delta t)$, porque la barra está inicialmente parada. En general, es siempre mejor calcular $\theta(t_{i+1}) = \theta(t_i) + \omega\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right) \Delta t$ – esa es exactamente la aproximación que usamos para calcular numéricamente la velocidad a partir de la posición, basta aislar ω en esa relación. Además de eso, el razonamiento vale también para la estimativa de la velocidad a partir de la aceleración: $\omega\left(\frac{t_{i+2}+t_{i+1}}{2}\right) = \omega\left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right) + \alpha(t_{i+1}) \Delta t$. Así, al substituir el valor digitado en la celda

C4 por la fórmula = 0,5 D4*\$B\$1 y el de la celda C5 por = C4 + D5*\$B\$1 aumenta considerablemente la precisión. Ese es el método del punto medio, una de las variantes del método de Runge-Kutta, y está bien explicado e *Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Capítulo 9, sección 6 - https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_09.html).

B6. Resultados y comparación con el modelo. En un mismo sistema de ejes, haz los gráficos de los valores experimentales de la posición angular en función del tiempo (usa puntos) y el de los valores calculados en **B4** (une los puntos calculados con una línea suave). Evalúa cualitativamente el grado de semejanza entre el modelo desenvuelto y el medido.

B7. Aceleración de la punta de la barra. Para el análisis de la aceleración y la comparación con el valor de la gravedad local en cualquier instante de la caída, es conveniente calcular separadamente las componentes angular y centrípeta de la aceleración,

$$\vec{a} = \alpha \cdot r \cdot \hat{\mu}_\theta - \omega^2 \cdot r \cdot \hat{\mu}_r$$

donde $r = d + \frac{a}{2}$ (ver figura), y después proyectarlas en la dirección vertical, usando los vectores unitarios radial y tangencial

$$\hat{\mu}_r = \cos(\theta) \cdot \hat{i} + \sin(\theta) \cdot \hat{j}$$

$$\hat{\mu}_\theta = -\sin(\theta) \cdot \hat{i} + \cos(\theta) \cdot \hat{j}$$

donde $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son los vectores unitarios en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

Se obtiene así la componente vertical de la aceleración de la punta de la barra como

$$a_y = r[\alpha \cdot \cos \theta(t) - \omega^2 \cdot \sin \theta(t)] \quad (4)$$

Calcula numéricamente, en la planilla, la aceleración vertical de la punta de la barra en función del tiempo usando $\theta(t)$ del modelo matemático delo ítem **B4**.

Procedimiento de elaboración del informe

Cada grupo debe entregar un único documento, con las siguientes secciones:

C1. Identificación. Lista los nombres de los miembros del grupo e indica el conjunto de daos analizado.

C2. Descripción del Experimento. Describe lo que has observado en el video y los componentes del aparato experimental de forma sucinta, pero de modo que se pueda entender de que se trata y cómo funciona. Para eso, incluye todos los elementos que desempeñan algún papel em el movimiento tal como aparecen en las imágenes, dejando claro como los objetos se vinculan para dar forma al movimiento observado, pero no uses fórmulas. El foco debe estar en los elementos y en las características, en todo la que fuera importante para construir un aparato experimental similar. Escribe dos versiones de la descripción, una sin usar los nombres de las magnitudes físicas, como lo harías para quien no estudia física, y otra, usando nombres como fuerza, torque, inercia, pero sin usar fórmulas, como has necesitado *pensar* para escribir las ecuaciones necesarias para la representación matemática del modelo. Para ayudar, usa las anotaciones iniciales del ítem **B1**.

C3. Datos Obtenidos. Presenta la tabla obtenida em el ítem **B2**. Verifica si has expresado los valores de las cantidades en unidades apropiadas y con el número adecuado de dígitos significativos. No olvides de mencionar como realizaste los cálculos y llegaste a los resultados.

C4. Modelo Matemático. Justifica porque el movimiento no tiene aceleración constante y explica porque fue necesario montar toda una planilla para calcular las posiciones angulares con relación al tiempo.

C5. Análisis de datos. Presenta el gráfico de la posición angular de la barra en función del tiempo, experimental y calculado (ítem **B6**).

C6. Resultados e discusión. Discute si el modelo es compatible con la observación dentro de las incertezas experimentales. ¿Has ajustado algún parámetro a los datos? Discute el significado del procedimiento adoptado, tanto si la respuesta fue si, como no.

Comenta sobre la expectativa inicial acerca del valor de la aceleración de la barra pensada en el ítem **B1**, y si ella es consistente con los resultados obtenidos en **B4**. ¿Qué propiedades del sistema determinan que la aceleración es (constante, variable) y (menor, igual, mayor) que g ? ¿Cuál fue el papel del vínculo en ese resultado?

Discute porque la punta de la barra ultrapasa a la esferita en caída libre.

C7. Conclusión. Relata el grado de suceso del modelo al explicar el movimiento, destacando la importancia de haber, o no, ajustado un parámetro a los datos. Vuelve a la introducción, foca en el objetivo del experimento y comenta si fue alcanzado plenamente, parcialmente o no, y porque (puedes retomar las hipótesis e indagaciones registradas en el ítem **B1** y verificar si el experimento corroboró o no las expectativas iniciales).

ANEXO 1. INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Cuando una partícula se mueve bajo la influencia de fuerzas con resultante constante, su aceleración también será constante, y podemos encontrar su velocidad y posición a cada instante a partir de fórmulas bien conocidas. Considere, que una partícula que se mueve en un espacio donde la fuerza resultante y, así, su aceleración, depende de la posición y de la velocidad. En ese caso, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en un instante determinan su posición y velocidad en un instante siguiente, que, a su vez, determinan la aceleración en ese instante. Por lo tanto, las tres cantidades: posición, velocidad y aceleración del cuerpo varían *continuamente* con el tiempo. Una de las formas de resolver numéricamente el problema consiste en substituir la variación continua con el tiempo por una secuencia de pequeños intervalos de duración Δt . La aproximación más simple es la que supone que la aceleración sea *constante* durante cada intervalo, lo que da origen al **método de Euler**. Si el intervalo de tiempo fuera suficientemente pequeño, la variación de la aceleración durante el intervalo será pequeña y podría ser desconsiderada.

Sean x_0 , v_{0x} y a_{0x} respectivamente la posición, velocidad y aceleración en la dirección x de la partícula en el instante inicial t_0 . Cuando ignoramos la variación de la velocidad durante el intervalo de tiempo, la nueva posición es dada por:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t \quad (1)$$

De manera similar, si la aceleración durante Δt fuera constante, la velocidad en el instante $t_1 = t_0 + \Delta t$ será dada por

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}\Delta t \quad (2)$$

Podemos usar los valores de x_1 y v_{1x} para calcular la nueva aceleración a_{1x} usando la ecuación de movimiento y después calcular x_2 y v_{2x} usando x_1 , v_{1x} y a_{1x} :

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\Delta t \quad (3)$$

$$v_{2x} = v_{1x} + a_{1x}\Delta t \quad (4)$$

Las relaciones entre la posición y la velocidad en los tiempos t_n y $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ son dadas por

$$x_{n+1} = x_n + v_{nx}\Delta t \quad (5)$$

$$v_{(n+1)x} = v_{nx} + a_{nx}\Delta t \quad (6)$$

que son generalizaciones de las fórmulas (1) y (2).

Para encontrar la velocidad y la posición en algún tiempo t , dividimos, por lo tanto, el intervalo de tiempo $t - t_0$ en un gran número de intervalos menores Δt y aplicamos repetidamente las ecuaciones (5) y (6), comenzando en el tiempo inicial t_0 . Eso resulta en un gran número de cálculos repetitivos que son realizados más fácilmente en un computador. La técnica de dividir el intervalo de tiempo en pequeños trechos y calcular la aceleración, velocidad y posición a cada nuevo paso usando los valores del paso anterior es llamada de *integración numérica*.

Para ilustrar esa técnica, vamos a considerar el problema en que un paracaidista en reposo se lanza de una cierta altura, cuando pasa a ser influenciado tanto por la gravedad como por la fuerza de arrastre, que es proporcional al cuadrado de la rapidez. Encontraremos la velocidad v_y y la distancia

recorrida y en función del tiempo por medio de la integración numérica. La ecuación que describe el movimiento de un objeto de masa m largado del reposo, cuando se ignora el empuje, es

$$mg - bv^2 = ma_y \quad (7)$$

donde se adoptó un referencial Oy orientado con el mismo sentido de la fuerza de la gravedad. La aceleración es, por lo tanto,

$$a_y = g - \frac{b}{m} v^2 \quad (8)$$

Es conveniente escribir la constante $\frac{b}{m}$ en función de la rapidez terminal v_T . Colocando $a_y = 0$ en la ecuación (8), obtenemos

$$0 = g - \frac{b}{m} v_T^2 \quad (9)$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_T^2} \quad (10)$$

Substituyendo (10) en (8), queda

$$a_y = g \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right) \quad (11)$$

Para resolver numéricamente la ecuación (11), precisamos usar valores numéricos para g y para v_T . En *Física para cientistas e engenheiros*^[1], Paul Tipler sugiere que una rapidez terminal razonable para un paracaidista sea de 60 m/s. Eligiendo $y_0 = 0$ para la posición inicial, $v_{0y} = 0$ para la velocidad inicial y $a_{0y} = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad, se encuentra la velocidad v_y y la posición y en algún tiempo posterior, digamos para un instante de tiempo $t = 20 \text{ s}$, se puede dividir el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$ en muchos intervalos pequeños Δt y aplicar las ecuaciones (5), (6) y (11). Que se realiza usando una planilla electrónica de cálculo, como mostrado en la tabla A.2 abajo, donde que elegimos $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ y obtuvimos los gráficos de las **Figuras 1 y 2**. Para $t = 20 \text{ s}$, tendremos los resultados $v = 59,9 \text{ m/s}$ e $y = 939,9 \text{ m}$.

Podemos esperar que obtengamos mejores resultados al adoptar intervalos de tiempo muy pequeños, digamos $\Delta t = 0,000.000.001 \text{ s}$. Pero existen por lo menos dos razones para que no se adopten intervalos de tiempo extremadamente pequeños. Primero, cuanto menor sea el intervalo de tiempo, mayor será el número de cálculos necesarios y mayor el tiempo que el programa llevará para rodar. Segundo, el computador guarda apenas un número fijo de números en cada paso del cálculo, de manera que en cada paso existe un error de arredondamiento, que se va acumulando a medida que el se realizan los cálculos. Cuanto mayor sea el número de cálculos, mas importante será el error de arredondamiento. Según Tipler^[1], una buena regla resulta em no usar más que cerca de 10^5 intervalos de tiempo para cada integración numérica típica.

Tabla A.1: Parámetros y condiciones iniciales para el cálculo del problema del paracaidista:

Δt (s)	y_0 (m)	v_0 (m/s)	a_0 (m/s ²)	v_T (m/s)
0,5	0	0	9,81	60

Tabla A.2: Planilla con los cálculos según el método numérico de determinación de las posiciones:

t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
0,0	0,000	0,000	9,810
0,5	0,000	4,905	9,744
1,0	2,453	9,777	9,550
1,5	7,341	14,552	9,233
2,0	14,617	19,168	8,809
2,5	24,201	23,573	8,296
3,0	35,988	27,721	7,716
3,5	49,848	31,579	7,093
4,0	65,637	35,125	6,448
4,5	83,200	38,349	5,802
5,0	102,374	41,250	5,173
5,5	123,000	43,837	4,573
6,0	144,918	46,124	4,013
6,5	167,980	48,130	3,498
7,0	192,045	49,879	3,030
7,5	216,984	51,394	2,612
8,0	242,681	52,700	2,242
8,5	269,031	53,821	1,916
9,0	295,942	54,779	1,633
9,5	323,332	55,596	1,387
10,0	351,129	56,289	1,176
10,5	379,274	56,877	0,995
11,0	407,713	57,375	0,840
11,5	436,400	57,794	0,708
12,0	465,297	58,148	0,596
12,5	494,372	58,447	0,501
13,0	523,595	58,697	0,421
13,5	552,943	58,908	0,354
14,0	582,397	59,085	0,297
14,5	611,940	59,233	0,249
15,0	641,557	59,358	0,209
15,5	671,235	59,462	0,175
16,0	700,967	59,550	0,147
16,5	730,742	59,623	0,123
17,0	760,553	59,685	0,103
17,5	790,395	59,736	0,086
18,0	820,263	59,779	0,072
18,5	850,153	59,815	0,060
19,0	880,060	59,845	0,051
19,5	909,983	59,871	0,042
20,0	939,918	59,892	0,035

Obs. 1: Este método tiene finalidad didáctica y da una buena aproximación en casos simples, como el del movimiento de una moneda en un plano inclinado, pero normalmente se usa el método de Runge-Kutta^[2], que es accesible al estudiante que comprendió el método de Euler.

Obs. 2: La ecuación (7) no lleva en cuenta el aire cargado por el paracaídas, lo que depende de la situación a ser analizada y puede no ser una buena aproximación. Para la solución completa, vea la referencia [3].

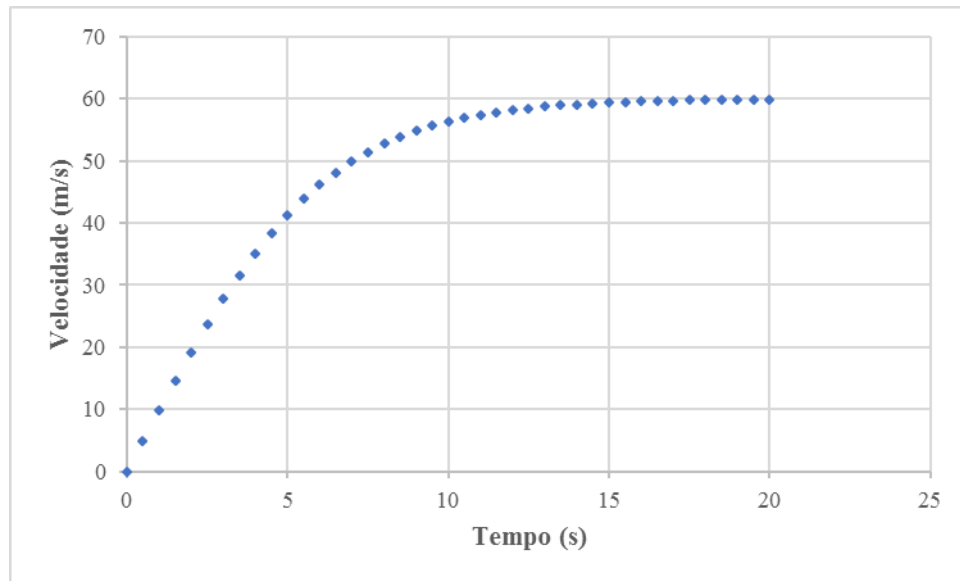


Figura 1. Velocidade adquirida por el paracaidista en función del tiempo, calculado de acuerdo al modelo discutido en el texto.

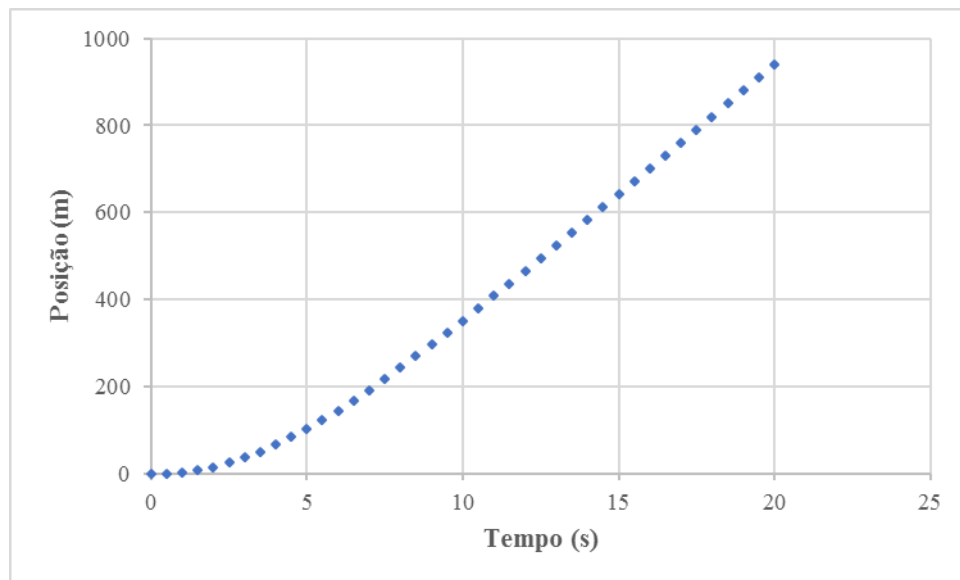


Figura 2. Posición vertical del paracaidista en función del tiempo, calculado de acuerdo al modelo discutido en el texto.

Referências Bibliográficas

- [1] Tipler, Paul A., Mosca, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**, Volume 1, 6ª Edição, LTC.
- [2] The Feynman Lectures on Physics, Vol 1, Cap. 9-6 www.feynmanlectures.caltech.edu/I_09.html
- [3] The Parachute Paradox. (David Auerbach). American Journal of Physics, 62 (11) 1041, November 1994.